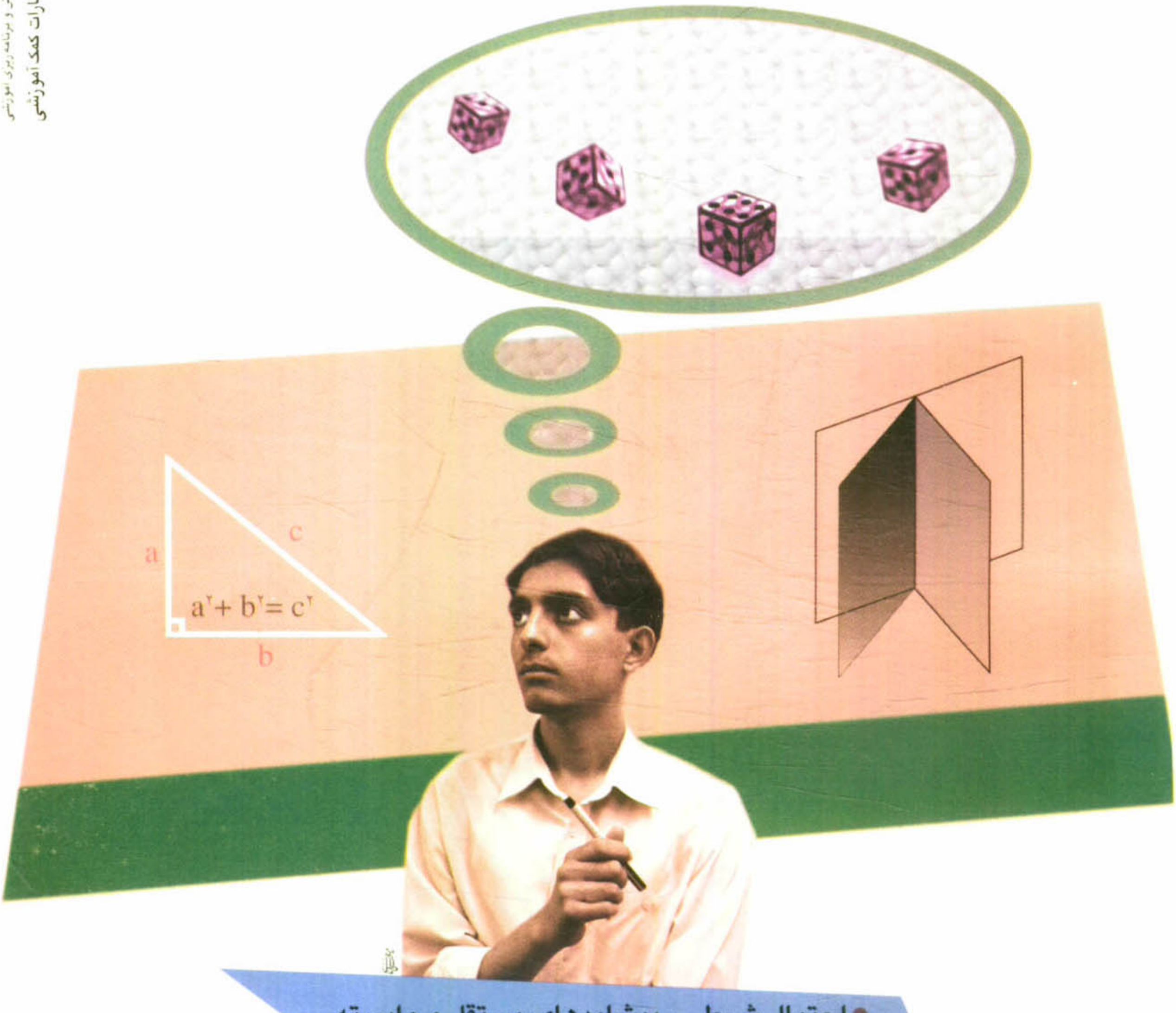
آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

رشد برهان ۴۳

برای دانش‌آموزان دوره‌ی **متوسطه**

دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی اول
پاییز ۱۳۸۳، بها: ۲۵۰۰ ریال
www.roshdmag.org
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی





هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران به همت فرهیختگان و مردم غیور استان کردستان از یکم تا سوم شهریورماه ۱۳۸۳ در شهر سنندج برگزار شد. در این کنفرانس حدود ۱۰۰۰ نفر از پیشگامان آموزش ریاضی کشور حضور داشتند و در کل ۱۷۰ مقاله در قالب سخنرانی، پوستر و کارگاه آموزشی ارائه شد که از نظر آماری تعداد شرکت‌کنندگان و ارائه مقالات در بین کنفرانس‌های قبلی در ایران بی‌نظیر بود.

برای اطلاع بیشتر از جزئیات و مقالات ارائه شده در این کنفرانس می‌توانید به آدرس سایت www.tmkurd.org مراجعه نمایید.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی متوسطه

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دورهٔ چهاردهم، شماره ۱
پاییز ۱۳۸۳
بها: ۲۵۰۰ ریال
شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

www.roshdmag.org

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه کردن مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجله: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ ـ ۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۴ ـ ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۱۱۱۰



یادداشت سردبیر

آغاز فصل پاییز همواره مصادف است با آغاز بهار علم و دانش و بازگشایی مراکز آموزشی؛ آغازی که همه ی دانش آموزان بی صبرانه انتظار آن را می کشند و خود را برای آن آماده می کنند، شما چطور؟ آیا با دستی پر، با برنامه ریزی دقیق و با پشتکاری کافی، سال تحصیلی را آغاز کرده اید؟

راستی اگر اولین بار است که مجله ریاضی برهان را مطالعه می کنید، پیوستن به جمع خوانندگان این مجله را به شما خوش آمد می گوییم، ان شاءالله بتوانیم مهم ترین خواسته های شما را برآورده سازیم.

شما چقدر با ریاضیات دوست هستید؟ تا چه اندازه به آن علاقه مندید؟ چه مقدار برای آن اهمیت قائل هستید؟ به نظر من اگر برای ریاضیات اهمیت قائل شوید، به آن علاقه مند خواهید شد و حتماً با آن دوست می شوید. البته در تمام این مراحل عواملی تاثیرگذارند که از آن جمله است، آموزش ریاضیات مطابق با استانداردهای جهانی، که این استانداردها می بایست با توجه به موقعیت اجتماعی، فرهنگی و حتی جغرافیایی و امکانات آموزشی ما، تعدیل یافته و به شکلی قابل اجرا و مفید مورد استفاده قرار گیرد.

به نظر شما آنچه در حال حاضر تحت عنوان ریاضیات می آموزید تا چه اندازه شما را با ریاضیات مانوس کرده است؟ آیا آموزش ریاضی را به عنوان یک دانش آموز، با شیوه ی فعلی قبول دارید؟ اگر جواب شما منفی است، چه پیشنهادی دارید؟

از عوامل مهم و مؤثر در آموزش ریاضی، استفاده از منابع کمک آموزشی است که یکی از آنها هم اکنون در دستان شماست و در حال مطالعه آن می باشید، ما می خواهیم از طریق مطالب این مجله شما را با ریاضیات دوست و به طرف آن جذب کنیم؛ یک دوست خوب باید آیینه ی دوست خود باشد و حسن و عیب او را گوشزد کرده و در فکر رفع نقایص دوست خود باشد، باید با دوست خودش هم صحبت باشد و اگر احتیاج دارد از او کمک بخواهد، اگر ان شاءالله «برهان» را دوست خود می دانید، هم عیب های ما را تذکر دهید و هم اگر اشکالی دارید یا در مواردی ضعف دارید از ما سؤال کنید، به هر صورت با مجله رشد برهان ارتباط برقرار کنید تا دوستی شما با مجله و با ما پایدارتر و پویاتر باشد.

۱۶ ۱۷

پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی

اشاره

در شماره قبل به تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری پرداختیم، همچنین به سازماندهی که ریاضیدان‌های مختلف از ریاضیات داشته‌اند اشاره شد. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم:

ریاضیات کاربردی همچون وسیله‌ای برای سازمان دادن دانش ریاضی، اساس کار خود را بر دستاوردهای حاصل از حل مسأله‌های مربوط به اندازه‌گیری و مقایسه‌ای قرار می‌دهد. عنصرها و مبانی تشکیل دهندهٔ ریاضیات کاربردی، عبارت‌اند از نیازهای مربوط به فعالیت عملی، و در اطراف این عنصرها، گونه‌های مختلف مسأله‌ها جمع شده‌اند.

در برابر سازماندهی کاربردی، مهم‌ترین ویژگی روش نظری سازماندهی دانش ریاضی، عبارت است از یکپارچگی آن به یاری اثبات عبور منطقی از یک موقعیت به موقعیت دیگر.

از همین جا، اختلاف بین ریاضیات نظری با ریاضیات کاربردی، در ارتباط متقابلی که با فعالیت عملی دارند، نتیجه می‌شود. اگر ریاضیات کاربردی بر فعالیت عملی تکیه دارد و از آن نیرو می‌گیرد، ریاضیات نظری تا اندازهٔ زیادی خودگردان است و با سازوکار درونی و انگیزهٔ درونی خود پیشرفت می‌کند. البته این وضع به معنای آن نیست که ریاضیات نظری، به مفهوم کلی خود، با عمل ارتباطی ندارد و به نیازها و خواست‌های بیرون از خود توجهی نمی‌کند. برای این که ماهیت اختلاف‌ها و عنصرهای شباهت را در برخورد این نوع ریاضیات، با عمل روشن کنیم، دو مثال مشخص از این گونه کنش‌های متقابل می‌آوریم.

نخستین مثال به زمان گسترش فعال ریاضیات نظری در دورهٔ جدید مربوط می‌شود. نیوتن با استفاده از «حساب بی‌نهایت کوچک‌ها» و به کار بردن آن در مسأله‌های مربوط به پیدا کردن شکل واقعی زمین، این شکل را به صورت نظری پیش‌بینی کرد. او با این فرض که زمین، زمانی به حالت مذاب و آتشین بوده است، ثابت کرد که شکل واقعی زمین، شبه کره‌ای است که در دو قطب خود فشرده شده است. ولی نیوتن در چاپ کشف خود که در ضمن، تأکیدی بر قانون جاذبهٔ عمومی بود، شتاب نکرد و تنها وقتی تصمیم به انتشار آن گرفت که اندازه‌گیری *پی‌کار* (۱۶۸۲) آماده شد. نیوتن از مقداری که پی‌کار برای شعاع زمین به دست آورده بود و از دستاوردهای آن زمان دربارهٔ شتاب فشردگی استفاده کرد؛ او برای فشردگی به مقدار ۱ : ۲۳۲۰ رسید. این نتیجه‌گیری، در رابطه با ساختمان ریاضیات نظری، یک نتیجه‌گیری کاربردی است. بدون وجود ساختمان نظری، چنین نتیجه‌ای به دست نمی‌آمد. وجود ساختمان منظم و یکپارچهٔ ریاضیات نظری، امکان استفاده از آن را به وجود می‌آورد. ریاضیات نظری این قابلیت را دارد که همهٔ آن نیازهای عملی را، که با امکان‌های دستگاه نظری سازگار است، به حساب می‌آورد.

ریاضیات نظری، که در تدارک این مسأله (که نسبت به ریاضیات نظری عنصری بیرونی است). به موفقیت می‌رسد، خود موجب تدارک‌های بعدی در همین جهت می‌شود. در تلاش‌های بعدی، یا نتیجه‌گیری نیوتن دقیق‌تر یا به کلی رد می‌شود. با وجود این، همهٔ این تلاش‌ها با استفاده از ساختمان نظری

ریاضیات انجام می‌گیرد. در کنار ملاحظه‌های نیوتن، با آغاز از دکارت، نظریهٔ دیگری هم دربارهٔ زمین وجود داشت که بنابر آن، زمین مانند سایر جسم‌های بزرگ سماوی، در نتیجهٔ حرکت‌های توفانی ذره‌های مختلف تشکیل شده است. کاسینی‌ها ـ پدر و پسر ـ که هوادار نظر دکارت بودند، با استفاده از همان ابزار، یعنی ریاضیات نظری، پاسخ دیگری به‌دست آوردند: زمین یک بیضوی است که محور کوچک‌تر آن بر صفحهٔ استوا قرار دارد. بررسی‌های شاگردان پی‌کار، که در فرانسه انجام شد، همین دیدگاه دوم را تأیید می‌کرد. به زبان دیگر، ابزار ریاضیات نظری می‌تواند با تکیه بر دیدگاه‌های مختلف، به نتیجه‌های دقیقی برسد. بدون این ابزار نمی‌توان تصویرهای مقدماتی و مبهم را به‌جلو برد و به نتیجه رسانید. ماهیت کاربرد ریاضیات نظری در به‌دست آوردن نتیجه‌ای مشخص، به کمک آن است، نه این که در دستور این نتیجهٔ مشخص، ابزار ریاضیات نظری وجود داشته باشد.

این امکان که می‌توان از یک ابزار نظری، به طریقه‌های گوناگون استفاده کرد، موجب پیشرفت بعدی در بررسی‌های عملی و کاربردی می‌شود. این بررسی‌ها تحت تأثیر ریاضیات نظری، با توجه به سطح تکامل آن و با استفاده از موفقیت‌های آن، پیش می‌روند و دگرگون می‌شوند. عدم تطبیق نتیجه‌گیری‌های نیوتن و هواداران دکارت، لزوم مطالعهٔ دقیق‌تر بررسی‌های عملی با جهت‌گیری‌های تازه‌ای را به‌وجود می‌آورد. «فرهنگستان علوم فرانسه تصمیم گرفت دو هیأت برای اندازه‌گیری کمان زمین، یکی در نزدیکی استوا و دیگری در نزدیکی قطب بفرستد. مقایسهٔ این کمان‌ها نشان می‌داد، کدام دیدگاه ـ دیدگاه نیوتن یا دیدگاه خانواده کاسینی و هواداران دکارت ـ که مورد استفادهٔ ابزار نظری قرار گرفته، درست است. در سال ۱۷۳۵ بوگه، گُودُن و لاکُون دامین به پرو فرستاده شدند، که در آن‌جا، کمان ۳ درجه و ۷ دقیقه را اندازه گرفتند. هیأت دوم در ترکیب مُون‌پرتویی، کلر و دیگران، در سال ۱۷۳۶ به لاپلان‌دیا (در شمال اسکاندیناوی) اعزام شدند که در آن‌جا کمانی به طول یک درجه را اندازه گرفتند.» [آ. آ. هوساک در «آغاز نظریهٔ تقریب تابع‌ها»]. هر دو مأموریت، برای اندازه‌گیری ضریب فشردگی «شبه کرهٔ» زمین، تنها به یاری تصویرهای نظری و با استفاده از ریاضیات نظری ممکن بود. با توجه به یک مسألهٔ کاربردی، می‌توان در درون ریاضیات نظری، راه تکامل را یافت؛ تکاملی که متکی بر ابزارهای نظری است. از این راه می‌توان مسأله‌های کاربردی را تصحیح کرد و آن را به طرف ساختمان‌های نظری پیش برد. به‌ویژه از همین راه است که مسألهٔ نخستین، با امکان‌های ریاضیات نظری، در جهت‌های مختلف صیقل می‌خورد، مضمون آن مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و همهٔ آن‌چه را که به‌نحوی معادل مسألهٔ نخستین است، به‌طور دقیق، از مضمون آن بیرون می‌کشد.

ریاضیات نظری «نورافکنی» نیرومند است که با پرتوهای خود، مسأله‌های کاربردی را به‌طور کامل روشن می‌کند. ولی برخلاف نورافکن واقعی، که خصلت ثابتی دارد و تنها یک طرف جسم ساکن را روشن می‌کند، ریاضیات نظری ابزاری بسیار حساس و دقیق برای مطالعه است و موجب توجه به بسیاری از پیچیدگی‌های مسألهٔ کاربردی می‌شود. از جمله هیأت‌هایی که به پرو و لاپلان‌دیا رفتند، به تجزیه و تحلیل اندازه‌گیری‌های انجام شده و نتیجه‌های حاصل از آن پرداختند. از مشهورترین این کارها، می‌توان از کتاب کلرو با عنوان «نظریهٔ شکل زمین، بر اساس مقدمات هیدروستاتیک» (۱۷۴۳) و مقاله‌های لوپرتویی نام برد که در آن‌ها، دربارهٔ پیشرفت ریاضیات نظری و کاربردی با عنوان نتیجه‌هایی از اندازه‌گیری انجام شده، صحبت می‌کند. ریاضیات نظری با کامل کردن خود، و به‌ویژه از نظر روش‌های مناسب، در برابر خواست‌ها و نیازهای بیرونی، عکس‌العمل نشان می‌دهد. این روش‌ها که وجود آن‌ها بیرون از مسأله‌هایی است که در عمل او بیرون از ریاضیات پیدا شده‌اند، خود را با امکان‌های ریاضیات نظری تطبیق می‌دهند و با گونه‌های روش‌هایی که می‌توانند سودمند باشند، به صحنهٔ اصلی ریاضیات نظری گام می‌نهند. دربارهٔ ریاضیات نظری می‌توان گفت، نورافکنی است که خودش، خودش را تکمیل می‌کند؛ ولی این میل تا جایی است که بتواند از پتانسیل خود استفاده کند و تا زمانی که این نیروی درونی تمام نشده است، نمی‌تواند طرح تغییر ساختاری خود را تغییر دهد. بستگی‌های نظری تازه‌ای به وجود می‌آورد و به «گذار منطقی» تازه‌ای، از یک موقعیت به موقعیت دیگر می‌رسد. این نیروی بالقوهٔ درونی، که می‌توان آن را «نیروی تاریخی» ریاضیات نظری دانست، ناشی از پرسش‌هایی است که در عمل، در برابر ریاضیدانان قبلی قرار گرفته است. ریاضیات نظری تنها در محدودهٔ

مسأله‌هایی حرکت می‌کند که با عنصرهای تشکیل دهندهٔ ریاضیات کاربردی پیشین شباهت داشته باشد. به همین دلیل است که ریاضیات نظری دوران جدید، که ریشه‌هایی در ریاضیات کاربردی سده‌های میانه دارد و برای حل مسأله‌هایی مناسب است، با انتخاب موضوع‌هایی که جنبهٔ دینامیکی دارد (یا به قول انگلس، ریاضیات با کمیّت‌های متغیر)، اغلب برای حل مسأله‌هایی که به صورت‌های مختلف به هم مربوط‌اند و در آن‌ها تعداد بسیار زیادی از پارامترهای ممکن دخالت دارند، مناسب از آب درمی‌آید.

نطفه‌های تکامل نظری، که برای دانش ریاضی مناسب باشند، حتی در میان نخستین نسل پژوهشگران هم دیده می‌شود. سپس اویلر در مقاله‌های خود و لاپلاس در «مسأله‌ای دربارهٔ شکل زمین» (که در ۱۷۶۳ نوشته و در سال ۱۷۸۶ از طرف فرهنگستان علوم پاریس چاپ شد)، عنصرهایی از ریاضیات نظری را تکامل دادند. در این جا می‌توان سرچشمه‌های نظریهٔ تقریب تابع‌های پیوسته را پیدا کرد که روی تابع‌های ساده‌ای، که در مجموعهٔ معینی از نقطه‌ها تعریف شده‌اند، مقدار تابع‌های تقریبی را معین کرد. «در الگوریتم‌های لاپلاس برای پیدا کردن بهترین تقریب، می‌توان به‌نحوی قضیه‌های داله ـ پوسن، شنیر و دیگر قضیه‌های مشابه آن‌ها را دربارهٔ تقریب‌های یکنواخت، بازشناخت» [آ. آ. هوساک در «آغاز پیشرفت نظریهٔ تقریب تابع‌ها»]. مسأله‌های عملی و کاربردی کمک می‌کنند تا بخش‌های دیگری مورد مطالعه قرار گیرند؛ ولی خود این مطالعه، در چارچوب ریاضیات نظری انجام می‌گیرد و مرزهای مجاز تصحیح و پیشرفت ریاضیات نظری، به‌وسیلهٔ عامل‌هایی که نسبت به آن بیرون است، درست از همین جا می‌گذرد. ریاضیات در محدودهٔ این مرزها، همراه با رابطه‌های منطقی (که در اساس استدلال‌ها هستند)، به نظری شدن ادامه می‌دهند.

مثال دوم، به دورهٔ ریاضیات کاربردی سده‌های میانه مربوط می‌شود که در واقع، از زمان ریاضیات نظری و دورهٔ هلنی آغاز می‌شود و تا زمان پیدایش ریاضیات نظری دورهٔ جدید ادامه می‌یابد. این موضوع به حیطهٔ مطالعهٔ «چشم‌انداز» (پرسپکتیو)، سازمان دادن آن و رابطهٔ متقابل آن با دانش ریاضیات کاربردی مربوط می‌شود.

سمت‌گیری کاربردی دانش دربارهٔ پرسپکتیو، به‌ویژه در زمان نوزایی (رونسانس) قابل تأمّل است.

یکی از حالت‌های خاص تصویر، عبارت است از تصویر مرکزی شکل فضایی بر صفحه (یا نگاشت تصویری شکل فضایی). دربارهٔ پرسپکتیو، نوشته‌های لئون باتیستا آلبرتی (۱۴۰۴ ـ ۱۴۷۲ میلادی)، پیترو دولا فرانچسکو (۱۴۱۶ ـ ۱۴۹۲)، لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ ـ ۱۵۱۲)، آلبرخت دُورر (۱۴۷۱ ـ ۱۵۲۸) و دیگر پژوهشگران دوران نوزایی، اهمیت زیادی دارد. همهٔ آنان به موضوع پرسپکتیو در درجهٔ اول برای ساختن تصویر چیزهای دنیای واقعی و هم برای کارهای نقاشی و معماری



علاقه‌مند بودند. نظریهٔ ریاضی پرسپکتیو، در نظریه‌های کلی بینایی، همراه با روان‌شناسی دیدن، مطالعهٔ ساختمان چشم، مطالعهٔ درک طبیعت نور و غیر آن حل می‌شود. از جمله می‌توان سخن ارسطو را آورد که مرز اپتیک و ریاضیات را مشخص می‌کند: «اپتیک خطوط ریاضی را مطالعه می‌کند؛ اما به صورت فیزیکی و نه ریاضی.» در دورهٔ نوزایی، توجه اصلی به ویژگی‌هایی از پرسپکتیو بود که در عمل به کار می‌آمدند و در تقسیم‌بندی تابلوها و نقشهٔ ساختمان‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفتند. درضمن، تعریف پرسپکتیو هم با تکیه بر نشانه‌هایی ساخته شد که برای ساختارهای ریاضی، بیرونی بود. لئوناردو داوینچی که پرسپکتیو را «موضوعی استدلالی» می‌داند، بلافاصله بر کار عملی آن تأکید می‌کند: «پرسپکتیو چیزی جز دیدن جایی از طریق شیشهٔ مسطح کاملاً روشن نیست؛ به‌نحوی که بر سطح آن، باید همهٔ چیزهایی که در پشت این شیشه واقع‌اند، نقش شده باشد.» در ریاضیات کاربردی، هر نتیجه‌ای که از اندازه‌گیری و محاسبه به‌دست آید، اهمیت دارد. بنابراین برخلاف ریاضیات نظری، دستاوردهای ریاضیات کاربردی، از دیدگاه پژوهشگر، ربطی به ارزش نظری آن ندارد و تنها کاربرد عملی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. درواقع، این دستاوردها در ورای نظریه قرار دارد و هیچ اجباری ندارد که در چارچوب نظریه بیان شود.

افزایش حجم ریاضیات کاربردی، رشد کمیّت دستاوردها و دقیق‌تر شدن آن‌ها، در ارتباط مستقیم با خواست‌های بیرونی است؛ بدون این که لزومی به تصحیح این دستاوردها به کمک نظریه یا تطبیق آن‌ها با نظریه وجود داشته باشد و بدون این که ابزار نظری، تأثیر مشخصی بر انتخاب هدف‌ها و روش‌های حل مسأله‌ها بگذارد. ریاضیات نظری، مسأله‌های عملی را ارزیابی می‌کند، با دید انتقادی به آن‌ها می‌نگرد و تلاش می‌کند آگاهی‌های ریاضی را که جهت‌گیری عملی دارند، به آگاهی‌های کاربردی تبدیل کند. ولی ریاضیات کاربردی، به عکس، مسأله‌های عملی را جذب می‌کند و در خود فرو می‌برد. در این جا نیازهایی که در زندگی و عمل مطرح می‌شوند، در گونه‌های مختلف مسأله‌هایی که جهت‌گیری کاربردی دارند، جذب و تحکیم می‌شوند؛ بدون این که کم‌ترین توجهی به بستگی نظری آن‌ها شود. دستاوردها و شیوهٔ به‌دست آوردن آن‌ها، در دانش ریاضی و در تقسیم‌بندی نظری آن اثر می‌گذارد. لئون باتیستا آلبرتی قضیه‌های تازه‌ای را طرح و ثابت می‌کند و ملاک عمل او، میزان سودمندی کلی آن‌هاست. بعد اشاره می‌کند که این قضیه‌ها به حوزه‌ای از دانش ریاضی تعلق دارند؛ ولی خیلی زود آن را فراموش می‌کند. همچنین لئوناردو داوینچی به توضیح برخی جنبه‌های پرسپکتیو به صورت «دستورالعمل‌هایی» برای رسم تصویرها و منظره‌ها می‌پردازد. او شرح می‌دهد که چگونه تصویرها را قرار دهند، چگونه چیزها را در ارتباط با دوری و نزدیکی آن‌ها به چشم، به کمک تصویر نمایش دهند، چگونه امکان دیدن منظره از نقطه‌های مختلف تأمین کنند و....

خود نوع طرح این روش‌های کار، به نوع «دستورالعمل‌ها» و «نسخه‌های» ریاضیات کاربردی دوران بابلی‌ها و مصر باستان برای حل مسأله‌ها شباهت دارد. و این، پیامد استفاده از دستاوردهای ریاضیات کاربردی است. همین لئوناردو داوینچی روش درست به تصویر کشیدن مکان‌ها را این طور شرح می‌دهد: «شیشه‌ای به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ صفحهٔ کاغذ سلطنتی انتخاب کن. آن را به‌خوبی در برابر چشمانت، یعنی بین چشم و چیزی که می‌خواهی به تصویر بکشی، محکم کن. سپس چشمت را در فاصلهٔ $\frac{2}{3}$ آرَش از شیشه قرار بده و سر خود را، به‌نحوی محکم نگهدار که هیچ حرکتی نداشته باشد. بعد یک چشم خود را با پوششی ببند. قلم‌مو یا مداد نرم را بردار و آن‌چه در آن طرف شیشه می‌بینی، روی آن رسم کن.» در گذشته، چنین «نسخه‌هایی» دربارهٔ نظریهٔ پرسپکتیو در مقایسه با نتیجه‌های حاصل از آن، در درجهٔ دوم قرار می‌گرفت و پوشیده می‌ماند. همین نتیجه‌گیری‌ها که به صورتی مبهم جنبهٔ نظری موضوع را منعکس می‌کنند، به معنای شباهتی است که بین ریاضیات کاربردی قبل از یونان و ریاضیات کاربردی سده‌های میانه (همراه با دورهٔ رنسانس) وجود دارد؛ گرچه دورهٔ دوم بعد از دورهٔ پیشرفت ریاضیات یونان باستان آمده است.

هم لئوناردو داوینچی و هم لئون باتیستا آلبرتی، از موفقیت گذشتگان دربارهٔ نظریهٔ پرسپکیتو اطلاع داشتند؛ زیرا «وی‌تِه‌لو» در کتاب مشهور خود «اپتیک» آن را شرح داده بود و «جون پیکام» در رساله‌ای «دربارهٔ پرسپکتیو» دستاوردهای نظریهٔ پرسپکتیو را که در گذشته به‌دست آمده بود، جمع کرده بود. ولی این پوشش، جنبهٔ دشمنی با نظریه را ندارد، بلکه تا حد امکان از نظریه استفاده می‌کند؛ از نظریه تا آن‌جا استفاده می‌کند

که سودمند باشد.[1] در زمان تسلط ریاضیات کاربردی که تزلزلی در تکامل مستقل ریاضیات نظری قبلی پدید می‌آید، ریاضیات نظری مورد انکار قرار نمی‌گیرد؛ ولی در برابر مسأله‌های کاربردی هم قرار نمی‌گیرد و با آن رقابت نمی‌کند.

وقتی در عمل به پرسپکتیو نیاز باشد، به ناچار به‌وجود می‌آید، بررسی و مطالعه می‌شود و مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. به یاد آوریم که آلبرتی معمار بود، فرانچسکو نقاشی می‌کرد، دیورر هم نقاش بود و درباره‌ٔ علاقه و استعدادهای همه‌جانبه‌ٔ لئوناردو داوینچی، نیازی به سخن گفتن نیست، و روشن است، وقتی آموزش پرسپکتیو، مربوط به کاربرد مورد استفاده‌ٔ آن باشد، به‌هیچ‌وجه نمی‌توان آن را ریاضیات خالص به‌شمار آورد. انتقال آگاهی از استاد به دستیار خود، در رابطه‌ٔ معلمی و شاگردی مشخص می‌شود و این، همان محدودیت تاریخی آموزش است که موجب تحکیم ریاضیات کاربردی سده‌های میانه شده است.

ریاضیات کاربردی پایداری خود را در فعالیت گروه اجتماعی خاصی به‌دست می‌آورد که در آن، همه‌ٔ گونه‌های آموزشی به هم آمیخته است. به‌وجود آمدن بستگی‌های نظری در ریاضیات و رابطه‌های منطقی بین حکم‌های ریاضی، به حلقه‌ٔ نظری زنجیره‌ٔ حرکت و تغییر دانش ریاضی و متناظر با آن، فعالیت علمی را به جنب و جوش جدّی وامی‌دارد؛ فعالیت در جهت جست‌وجوی قضیه‌ها و حکم‌های تازه‌ٔ نظری، به کمک پیچ‌های منطقی و تبدیل عنصرهای ریاضی. جهشی کیفی در فعالیت پدید می‌آید و سرچشمه‌ٔ نیرومندی برای ظهور قانونمندی‌های درونی ساختارهای نظری می‌شود و آن‌ها را به جلو صحنه می‌راند. درباره‌ٔ رابطه‌ٔ متقابل ریاضیات کاربردی و فعالیت‌های عملی، ریاضیات کاربردی به‌طور کامل و در مجموع، از فعالیت‌های عملی پیروی می‌کند. ریاضیات نظری، این سلسله مراتب را به نفع کشف قانونمندی‌های درونی ریاضیات به هم می‌زند. مطالعه‌ٔ این قانونمندی‌ها، ضرورت تقسیم به‌دو گروه را پدید می‌آورد؛ گروه اول به سمت عمل می‌رود (ریاضیات کاربردی) و گروه دوم ریاضیات «خالص» را مطالعه می‌کنند. خود دانشمند ریاضی («نظریه‌پرداز») بیش‌تر فرزند ریاضیات نظری به‌شمار می‌آید، نه این که ریاضیات نظری فرزند او باشد.

مثال‌هایی که آوردیم، اهمیت اختلاف در روش سازماندهی ریاضیات را در رابطه‌ٔ متقابلی که با مسأله‌های عملی دارند، روشن می‌کنند:

۱. ریاضیات نظری، ضمن انتخاب مسأله‌ٔ عملی، با استفاده‌ای که از ساختمان نظری برای حل آن می‌کند، آن را به درون خود راه می‌دهد و جای آن را در فضای ساختار نظری خود مشخص می‌کند. در مقابل ریاضیات کاربردی، از دیدگاه نظری، برای انتخاب مسأله‌ها و امکان حل آن‌ها، توقّع چندانی ندارد. با وجود این «بی‌توقّعی» نظری ریاضیات کاربردی نسبت به انتخاب مسأله‌ها، به معنای آن نیست که، در ریاضیات کاربردی، هیچ‌گونه محک و معیاری برای انتخاب مسأله‌ها وجود ندارد.

۲. ریاضیات نظری، در ارزیابی و با احتیاط، با پیشرفت تولید و با نتیجه‌های حاصل از آن برخورد می‌کند. دیدگاه مسأله را تصحیح می‌کند و همه‌ٔ امکان‌های نظری را، که در درون مسأله وجود دارد، از آن بیرون می‌کشد. در ضمن، تصحیح خود ریاضیات نظری، در بستر بستگی‌های نظری موجود و به‌وسیله‌ٔ تکامل ساختاری آن، تحقق می‌یابد. در عوض ریاضیات کاربردی در پیوستگی با بنیادهای عملی پیش می‌رود.

۳. دستاوردهای تازه در ریاضیات نظری، با رابطه‌های منطقی (که اثبات‌ها و استدلال‌ها، براساس آن انجام می‌گیرد) و به یاری کار عملی در جهت کامل کردن ساختار درونی دانش نظری، تحکیم می‌شوند. در ریاضیات کاربردی، دستاوردهای تازه به‌کمک آموزش (و با توجه به اثر بیرونی آن)، تحکیم می‌یابد.

به این ترتیب، ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی، از یک طرف در رابطه با واقعیت، موازی با هم پیش می‌روند و از طرف دیگر، ریاضیات کاربردی رابطه‌ای آگاهانه با واقعیت دارد؛ در حالی که رابطه‌ٔ ریاضیات نظری با واقعیت ناآگاهانه است. خصلت این «موازی بودن» را می‌توان به‌طور خلاصه، این‌طور بیان کرد: برای ریاضیات نظری، عمل و کاربرد جنبه‌ٔ بیرونی دارد؛ ولی برای ریاضیات کاربردی، جنبه‌های درونی و بیرونی بر هم منطبق‌اند. با همه‌ٔ این‌ها باید یادآوری کرد که این مقایسه را نمی‌توان خیلی جلو برد و از آن، جای بررسی واقع‌بینانه‌ٔ موضوع‌های ریاضی و بستگی‌های آن‌ها، از نظر تاریخی استفاده کرد.

زیرنویس

۱. البته از این‌جا نباید به این نتیجه رسید که در زمینه‌ٔ پرسپکتیو، خبری از سنّت نظری نبوده است. این سنّت نظری را می‌توان در کارهای کندی، خازنی و دیگران پیدا کرد.

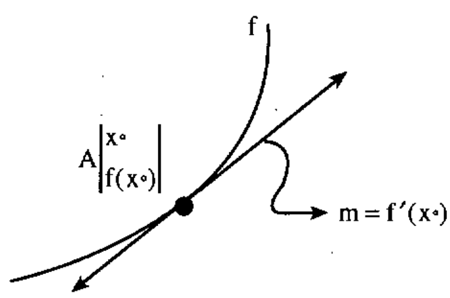
مشتق پذیری تابع f در نقطهٔ x_0 روی منحنی f

احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

فرض می‌کنیم که تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $a < x_0 < b$.

تابع f را در نقطهٔ x_0، وقتی مشتق‌پذیر گوییم که $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ برابر یک عدد مشخص و معین باشد. در این صورت، این حد را (که برابر شیب خط مماس بر منحنی f در x_0 است) مشتق تابع f در نقطهٔ به طول x_0 می‌گوییم و آن را با نماد $f'(x_0)$ نشان می‌دهیم.

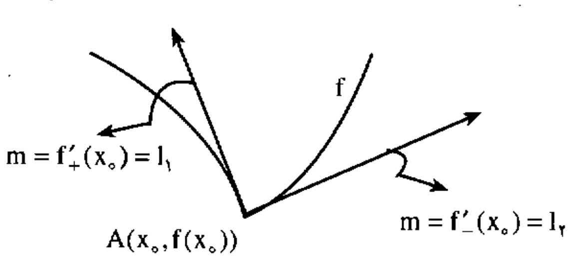


تذکر ۱. اگر حد فوق برابر با دو مقدار متفاوت شود یا ∞ شود و یا مقدار نامعلومی شود، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 مشتق‌پذیر نیست.

تذکر ۲. اگر در یک مسأله ناچار شدیم $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ را یک‌بار وقتی $x \to x_0^+$ و یک بار برای وقتی $x \to x_0^-$ بیابیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

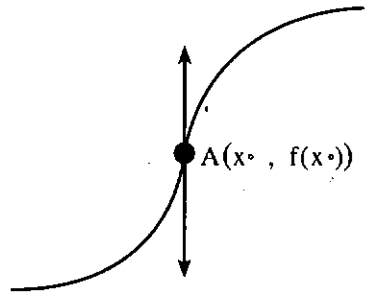
الف. اگر $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$، در این صورت l_1 را با نماد $f'_+(x_0)$ نشان می‌دهیم و این عدد، شیب خط مماس بر منحنی تابع f در طرف راست نقطه‌ای به طول x_0 است و آن را مشتق راست می‌گوییم.

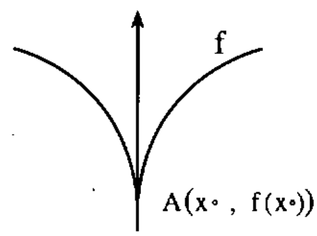
ب. اگر $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$، در این صورت l_2 را با نماد $f'_-(x_0)$ نشان می‌دهیم و این عدد شیب خط مماس بر منحنی تابع f در طرف چپ نقطهٔ به طول x_0 است و آن را مشتق چپ می‌گوییم.



تذکر ۳. اگر $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$، ∞ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول x_0 است؛ ولی بنا به تعریف می‌گوییم تابع f در x_0 مشتق‌پذیر نیست، ∞ هم یک عدد حقیقی نیست؛ ولی راستای خط مماس را نشان می‌دهد

که عمود بر محور xهاست؛ مانند شکل‌های زیر:





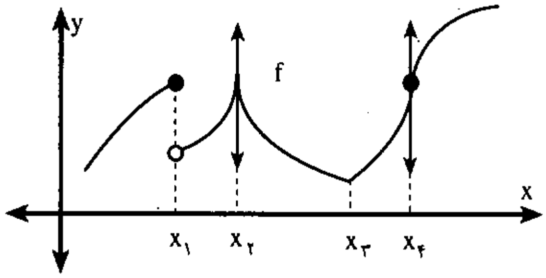
نکتهٔ مهم. همهٔ مسائل مشتق‌پذیری، مسائل حد با ابهام $\frac{0}{0}$ است. برای حل آن‌ها باید:

۱. عبارت $f(x)-f(x_0)$ را تجزیه کرد تا عامل $(x-x_0)$ در آن ایجاد شود، پس از حذف این عامل از صورت و مخرج، حد مورد نظر محاسبه می‌شود.

۲. اگر عبارت $f(x)-f(x_0)$ رادیکالی باشد، باید صورت و مخرج کسر را در عبارت مناسبی ضرب کنیم تا رادیکال صورت حذف شود، سپس مانند شمارهٔ (۱) عمل می‌کنیم.

۳. اگر عبارت $f(x)-f(x_0)$ مثلثاتی باشد، آن عبارت را به حاصلضرب تبدیل می‌کنیم و از هم‌ارزی $u \to 0 \begin{cases} \sin u \sim u \\ \tan u \sim u \end{cases}$ استفاده می‌کنیم؛ در این موقع، عبارت‌های مورد نیاز به عبارت‌های جبری تبدیل می‌شوند، آن‌گاه حد مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

تذکر ۴. یک نمودار، در نقاط زاویه‌دار، در نقاط ناپیوسته و در نقاطی که خط مماس بر منحنی تابع موازی محور yها باشد، مشتق‌پذیر نیست. به نمودار تابع f در این شکل توجه کنید.



این تابع در نقاط به طول‌های x_1 و x_2 و x_3 و x_4 مشتق‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۱. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-2x+3$ را در نقطهٔ $x_0=2$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x+3-7}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-2}$$

$$x^3-2x-4 \,\Big|\, \frac{x-2}{x^2+2x+2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+2)=10=f'(2)$$

این تابع در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۲. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$ را در نقطهٔ $x_0=-1$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{7}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{7}}{x+1}\times\frac{\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{7}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-6x-7}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-6x}+7\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-7)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-6x}+7\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-7}{\sqrt{x^2-6x}+7}$$

$$= \frac{-8}{2\sqrt{7}} = \frac{-4}{\sqrt{7}} = f'(-1)$$

پس این تابع در $x_0 = -1$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۳. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{2}}{x-1} \times \frac{\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{2(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{2(x^3+x)} + \sqrt[3]{4}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{2(x^3+x)} + \sqrt[3]{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{2(x^3+x)} + \sqrt[3]{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{2(x^3+x)} + \sqrt[3]{4}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}} = f'(1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۴. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 4$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sin\sqrt{x} - \sin 2}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2\sin\frac{\sqrt{x}-2}{2}.\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4} =$$

$$x \to 4; \frac{\sqrt{x}-2}{2} \to 0 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x}-2}{2} \sim \frac{\sqrt{x}-2}{2}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{2\left(\frac{\sqrt{x}-2}{2}\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x}-2\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4).\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\cos\frac{\sqrt{x}+2}{2}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\cos 2}{4} = f'(4)$$

بنابراین، تابع f در $x_0 = 4$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۵. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + 3x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos\sqrt{x^2+3x} - \cos 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}.\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$x \to 1; \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2} \to 0 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2} \sim \frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\right).\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{-\left(\sqrt{x^۲+۳x}-۲\right)\left(\sqrt{x^۲+۳x}+۲\right)\sin\frac{\sqrt{x^۲+۳x}+۲}{۲}}{(x-۱)(\sqrt{x^۲+۳x}+۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{-\left(x^۲+۳x-۴\right)\sin\frac{\sqrt{x^۲+۳x}+۲}{۲}}{(x-۱)(\sqrt{x^۲+۳x}+۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{-(x-۱)(x+۴).\sin\frac{\sqrt{x^۲+۳x}+۲}{۲}}{(x-۱)(\sqrt{x^۲+۳x}+۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{-(x+۴)\sin\frac{\sqrt{x^۲+۳x}+۲}{۲}}{\sqrt{x^۲+۳x}+۲}$$

$$= \frac{-۵\sin ۲}{۴} = f'(۱)$$

پس این تابع در $x_۰ = ۱$ مشتق‌پذیر است.

مسألهٔ ۶. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^۲ - ۲|$ را در نقطهٔ $x_۰ = \sqrt{۲}$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = \lim_{x\to \sqrt{۲}} \frac{f(x)-f(\sqrt{۲})}{x-\sqrt{۲}} = \lim_{x\to \sqrt{۲}} \frac{|x^۲-۲|-۰}{x-\sqrt{۲}}$$

$$= \lim_{x\to \sqrt{۲}} \frac{|x-\sqrt{۲}|.|x+\sqrt{۲}|}{x-\sqrt{۲}}$$

الف) $\lim_{x\to \sqrt{۲}^+} \frac{|x-\sqrt{۲}|.|x+\sqrt{۲}|}{x-\sqrt{۲}} = \lim_{x\to \sqrt{۲}^+} \frac{(x-\sqrt{۲}).(x+\sqrt{۲})}{x-\sqrt{۲}}$

$$= \lim_{x\to \sqrt{۲}^+} \left(x+\sqrt{۲}\right)$$

$= ۲\sqrt{۲} = f'_+\left(\sqrt{۲}\right)$ (مشتق راست تابع f در $x_۰ = \sqrt{۲}$)

ب) $\lim_{x\to \sqrt{۲}^-} \frac{|x-\sqrt{۲}|.|x+\sqrt{۲}|}{x-\sqrt{۲}} = \lim_{x\to \sqrt{۲}^-} \frac{-(x-\sqrt{۲}).(x+\sqrt{۲})}{x-\sqrt{۲}}$

$$= \lim_{x\to \sqrt{۲}^-} -\left|x+\sqrt{۲}\right|$$

$= -۲\sqrt{۲} = f'_-\left(\sqrt{۲}\right)$ (مشتق چپ تابع f در $x_۰ = \sqrt{۲}$)

پس این تابع در $x_۰ = \sqrt{۲}$ مشتق‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۷. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[۳]{(x-۲)\left(x^۲+۱\right)}$ را در نقطهٔ $x_۰ = ۲$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{(x-۲)\left(x^۲+۲\right)}-۰}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{(x-۲)}.\sqrt[۳]{x^۲+۲}}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۳}} = \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲}}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}} = \frac{\sqrt[۳]{۶}}{۰^+} \to +\infty$$

این تابع در $x_۰ = ۲$ مشتق‌پذیر نیست و راستای خط مماس بر منحنی در این نقطه، موازی محور yهاست.

مسألهٔ ۸. مشتق‌پذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲(x-۲)}$ را در نقطهٔ $x_۰ = ۰$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x^۲(x-۲)}-۰}{x}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x^۲}.\sqrt[۳]{x-۲}}{\sqrt[۳]{x^۳}} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{\sqrt[۳]{x}} = \frac{\sqrt[۳]{-۲}}{۰^\pm} \to \mp\infty$$

این تابع هم در $x_۰ = ۰$ مشتق‌پذیر نیست و راستای خط مماس بر منحنی در $x_۰ = ۰$ موازی مجور yهاست.

مسألهٔ ۹. مشتق‌پذیر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x.\cos\frac{۱}{x}, & x \neq ۰ \\ ۰, & x = ۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x_۰ = ۰$ بررسی کنید.

حل:

عددی نامعلوم در بازهٔ

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{x\cos\frac{۱}{x}-۰}{x} = \lim_{x\to ۰} \cos\frac{۱}{x}$$

$$= \cos(\pm\infty) = [-۱,۱]$$

پس این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

فرض کنید این شکل سه طبقهٔ یک ساختمان باشد.

طبقهٔ سوم	مشتق‌پذیری
طبقهٔ دوم	پیوستگی
طبقهٔ اول	حد

قضیهٔ ۱. اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ ۲. اگر تابع f در x_0 پیوسته باشد، آن‌گاه f در x_0 حد دارد.

قضیهٔ ۳. اگر تابع f در x_0 حد نداشته باشد، آن‌گاه f در x_0 نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر. سه قضیه را با شکل بالا می‌توان بیان کرد.

مسألهٔ ۱۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^3+x, & x \ge 2 \\ ax^2+bx, & x<2 \end{cases}$ در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است. a و b را بیابید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x, & x \ge 2 \\ ax^2+bx, & x<2 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & x \ge 2 \\ 2ax+b, & x<2 \end{cases}$$

چون تابع f در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_-(2) = f'_+(2)$؛ بنابراین:

$$2a(2)+b = 3(2)^2+1 \Rightarrow 4a+b=13$$

چون تابع f در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است، پس f در $x_0 = 2$ پیوسته است و حد دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a+2b=10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+b=13 \\ 4a+2b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$$

معماهای فـ  ـکری و منطقی

C، J، M و S چهار نفرند که شغلشان قصاب، داروساز، بقّال و پلیس ـ گرچه نه لزوماً به همین ترتیب ـ است.

C و J همسایه‌اند و به نوبت همدیگر را با اتومبیل به سر کار می‌برند.

درآمد J بیش از M است.

C به طور منظم در بازی بولینگ از S می‌برد.

قصاب همیشه پیاده سر کار می‌رود.

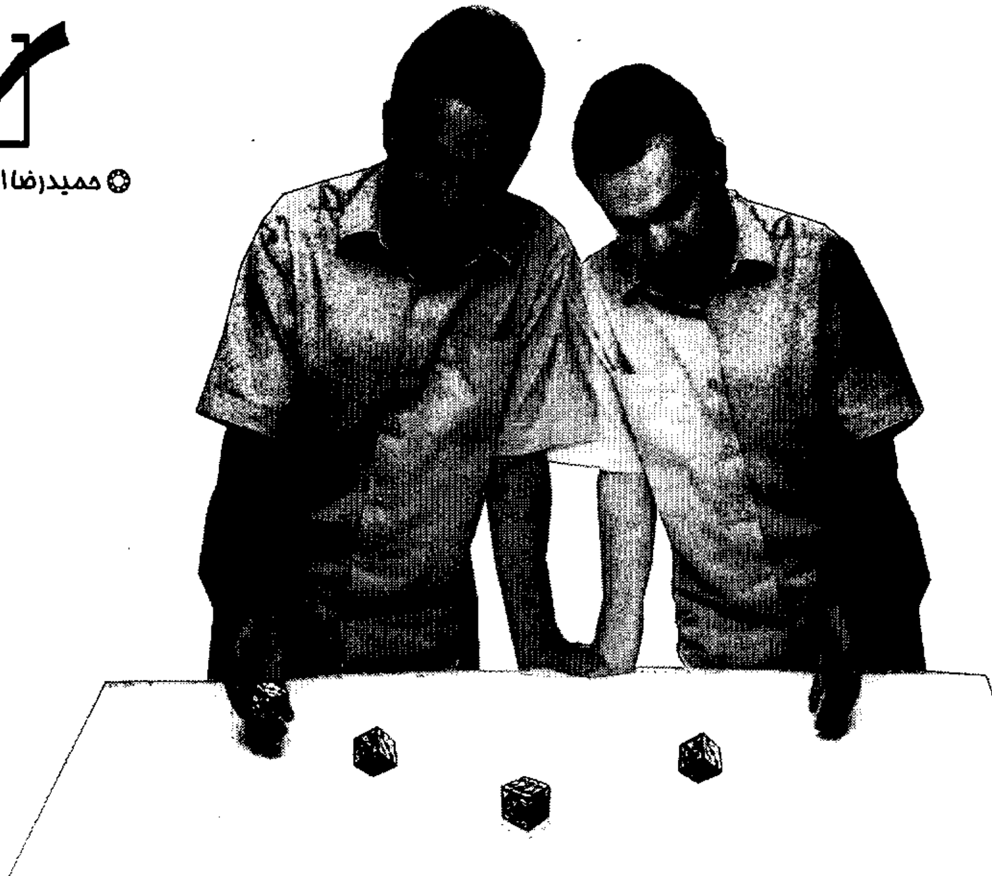
پلیس نزدیک داروساز زندگی نمی‌کند.

تنها وقتی که بقّال و پلیس ملاقات کردند، وقتی بود که پلیس بقّال را به خاطر سرعت زیاد توقیف کرد.

درآمد پلیس از داروساز یا بقّال بیشتر است.

شغل هر یک چیست؟

حمیدرضا امیری



احتمال شرطی: پیشامدهای مستقل و وابسته

معمولاً دانش‌آموزانی که مبحث احتمال شرطی و مسائل مربوط به آن را بررسی می‌کنند، تا حدود زیادی با مشکل روبه‌رو می‌شوند و حتی دبیران محترم نیز در انتقال این مفاهیم، تا حدی انرژی بیش‌تری صرف می‌کنند؛ در صورتی که به اعتقاد من، احتمال شرطی و مسائل مربوط به آن، نسبت به مسائل احتمال غیرشرطی، ساده‌تر و از پیچیدگی کم‌تری برخوردارند؛ البته به شرط آن که احتمال غیرشرطی را خوب درک کرده باشیم.

درواقع، اشکال اصلی در این است که مقدمات و مفاهیم اولیهٔ احتمال درک نشده است؛ والا یک مسألهٔ احتمال شرطی، چیزی جز محدودیت قائل شدن برای یک مسألهٔ احتمال غیرشرطی نیست. بنابراین سعی می‌کنم ابتدا مفاهیم اولیه و مقدمات احتمال را به صورتی ساده و تا حدی شهودی بیان کنم و سپس به بحث اصلی، یعنی احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل و وابسته می‌پردازم.

اولین توضیح، دربارهٔ واژهٔ احتمال است که بعضی آن را مترادف با شانس در نظر می‌گیرند، که این اشکال دارد. شما می‌دانید که وقتی یک پدیدهٔ تصادفی رخ می‌دهد، احتمال به‌وقوع پیوستن یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای حاصل، عددی است حقیقی مانند $0 \le n \le 1$، که در واقع عدد n شانس به‌وقوع پیوستن پیشامد مزبور را اندازه‌گیری می‌کند؛

بنابراین احتمال مترادف است با اندازه‌گیری شانس.

توضیح دیگر در مورد سه واژهٔ پدیدهٔ تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی است که در توضیحات قبل به کار رفته است.

هر پدیده‌ای که در رخداد آن قطعیّت وجود نداشته باشد، به‌طوری که از همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن اطلاع داشته باشیم، اما چگونگی به وقوع پیوستن آن مشخص نباشد، یک پدیدهٔ تصادفی نامیده می‌شود.

به عنوان مثال، این پدیده که سنگی را از ارتفاعی رها کنیم و به زمین برخورد کند، یک پدیدهٔ قطعی است و تصادفی محسوب نمی‌شود؛ ولی پدیدهٔ انداختن یک تاس، یک پدیدهٔ تصادفی است؛ زیرا اولاً از همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن پدیده اطلاع داریم (عدد ۱ یا ۲ یا ... و یا ۶ ظاهر خواهد شد) و ثانیاً، تا وقتی تاس در حرکت است، هیچ قطعیتی در رو شدن هریک از ۶ عدد ۱ تا ۶ وجود ندارد.

حالا اگر پدیده‌ای تصادفی رخ دهد و ما همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن آن پدیده را در یک مجموعهٔ مانند S قرار دهیم، به مجموعهٔ S فضای نمونه‌ای آن پدیدهٔ تصادفی گفته می‌شود. به‌عنوان مثال، وقتی تاسی را می‌ریزیم، فضای نمونه‌ای آن (مجموعه‌ای شامل همهٔ حالت‌های ممکن) عبارت است از $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ یا وقتی سکه‌ای را می‌اندازیم، $S=\{H,T\}$ فضای نمونه‌ای آن است. به عنوان مثال، اگر ارقام ۲، ۳، ۴ را به تصادف کنار هم قرار دهیم، $S=\{۴۳۲,۴۲۳,۳۲۴,۳۴۲,۲۴۳,۲۳۴\}$ فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی را تشکیل می‌دهد.

در صورتی که یک پدیدهٔ تصادفی رخ داده و S فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی باشد، هر زیرمجموعهٔ S مانند A را یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای S می‌نامیم. درواقع هر پیشامد تصادفی از یک فضای نمونه‌ای، زیرمجموعه‌ای از آن فضای نمونه‌ای بوده که می‌تواند تُهی ($\varnothing$) یا خود مجموعه‌ی S باشد، که پیشامد تهی را پیشامد نَشدنی یا غیرممکن و S را پیشامد حتمی می‌نامند.

به نظر شما وقتی یک تاس را می‌ریزیم، چند پیشامد تصادفی می‌توان برای این پدیدهٔ تصادفی تعریف کرد؟ با عجله جواب ندهید! به تعریف پیشامد تصادفی که ذکر شد، دقت کنید. بلی، صحیح است؛ $۲^۶$ پیشامد تصادفی در ریختن یک تاس می‌توان تعریف کرد (هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ ۶ عضوی که تعدادشان $۲^۶$ است). اگر فرض کنیم $A_۱=\varnothing$ و $A_۲=S$، $A_۳=\{۲,۳,۴\}$، $A_۴=\{۱,۴,۶\}$، $A_۵=\{۲,۳,۶\}$ و $A_۶=\{۱,۴\}$ برای هر یک از مجموعه‌های $A_۱$ تا $A_۴$، می‌توان پیشامدهایی به صورت زیر تعریف کرد:

$A_۱$: پیشامد این که تاس عددی بزرگ‌تر از ۶ بیاید.

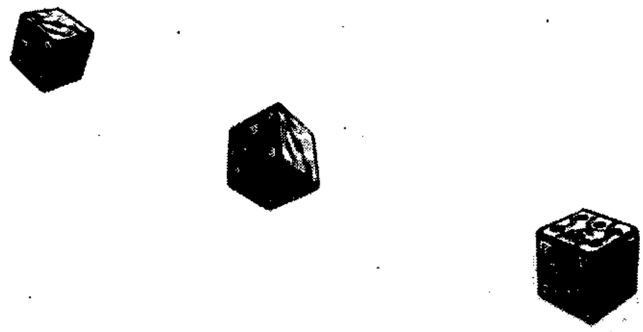
$A_۲$: پیشامد این که تاس عددی کوچک‌تر از ۷ بیاید.

$A_۳$: پیشامد این که تاس عددی بین ۱ و ۵ بیاید.

$A_۴$: پیشامد این که عدد رو شده، در معادلهٔ $(x-۱)(x-۴)(x-۶)=۰$ صدق کند.

تمرین: برای هریک از مجموعه‌های $A_۵$ و $A_۶$ یک پیشامد تعریف کنید.

موضوع دیگری که بسیار مهم بوده و به بحث آیندهٔ ما هم مربوط است، موضوع رخداد یک پیشامد تصادفی است و حالت‌هایی که می‌تواند یک پیشامد تصادفی رخ دهد، این بحث را با یک پرسش و طرح یک مسأله کامل می‌کنیم: مجموعه‌های $A_۱=\{۲\}$، $A_۲=\{۲,۴,۶\}$، $A_۳=\{۲,۳,۵\}$، $A_۴=\{۱,۲,۳\}$ و $A_۵=\{۱,۳,۴,۵,۶\}$ را در نظر می‌گیریم. حال اگر یک تاس را بریزیم، واضح است که $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای این پدیده بوده و $A_۱,A_۲,\cdots,A_۵$ همگی پیشامدهایی در این فضای نمونه‌ای هستند. سؤال این است که اگر مشاهده کنیم که تاس عدد ۲ را نشان می‌دهد، کدام یک از پیشامدهای تصادفی $A_۱$ تا $A_۵$ قطعاً رخ داده‌اند؟ پیشامد $A_۱$ قطعاً رخ داده است، پیشامد $A_۲$ چطور؟ اگر فرض کنیم پیشامد $A_۲$، «رو شدن عدد زوج» تعریف شود و تاس ۲ بیاید، آیا زوج نامیده؟ پس $A_۲$ نیز رخ



داده است.

اگر پیشامدهای A_3 و A_4 به ترتیب «رو شدن عدد اول کوچک‌تر از ۷» و «رو شدن عدد طبیعی و کوچک‌تر از ۴» تعریف شوند، آیا A_3 و A_4 نیز رخ داده‌اند؟ جواب مثبت است و تنها پیشامد A_5 است که رخ نداده، لذا می‌توان گفت: هر پیشامد (زیرمجموعه) از فضای نمونه‌ای S (ریختن یک تاس) که شامل عدد ۲ باشد، رخ داده است (اگر تاس ۲ آمده باشد)، تعداد این پیشامدها برابر است با $۳۲ = ۲^۵$. چرا؟

تمرین. دو تاس را با هم می‌ریزیم و مشاهده می‌کنیم که مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۱۰ است؛ در این صورت چند پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای حاصل می‌تواند رخ دهد؟

جواب: $(۲^{۳۳})$

یکی دیگر از موضوع‌هایی که در آینده با آن روبه‌رو خواهیم شد، مسألهٔ رخداد دو پیشامد A و B به صورت توأم است. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و بخواهیم با هم رخ بدهند، دو حالت ممکن است پیش آید؛ یکی آن‌که این دو پیشامد که با هم رخ می‌دهند، از نظر عضو نیز اشتراک داشته باشند و دیگر این‌که عضو مشترک نداشته باشند؛ یعنی اشتراک مجموعه‌ای برای آن‌ها تهی باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. تاسی را می‌ریزیم و پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد اول» تعریف می‌کنیم، که در این مثال $(A \cap B) = \{۲\}$؛ بنابراین اگر تاس ۲ بیاید، دو پیشامد A و B با هم رخ داده‌اند.

مثال ۲. تاسی را می‌ریزیم و پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد فرد» تعریف می‌کنیم که در این مثال $(A \cap B) = \varnothing$؛ بنابراین A و B نمی‌توانند با هم رخ بدهند.

تذکر مهم: در احتمال همواره رخداد دو پیشامد A و B را به صورت توأم و با نماد $(A \cap B)$ نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر $p(A \cap B)$، یعنی «احتمال رخداد دو پیشامد A و B با هم».

نتیجهٔ مهم: اگر A و B هردو از یک فضای نمونه‌ای مانند S تعریف شده باشند، $(A \cap B)$ یعنی رخداد توأم A و B با اشتراک مجموعه‌ای برای دو مجموعهٔ A و B برابر است.

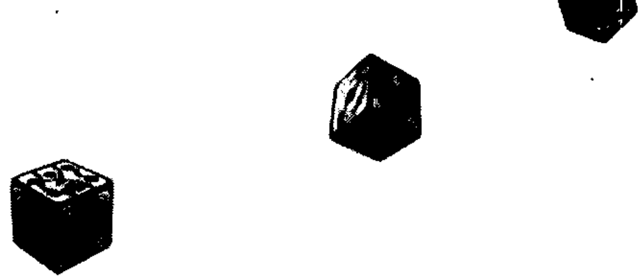
پس اگر در یک مسأله احتمال، به $p(A \cap B)$ برخوردیم، برای آن فقط یک تعبیر داریم و آن «احتمال این که دو پیشامد A با هم رخ بدهند» بنابراین اگر A و B هردو از یک فضای نمونه‌ای مانند S تعریف شده باشند، کار ساده است و به دنبال اعضای مشترک A و B هستیم.

حال به بحث اصلی خودمان، یعنی احتمال شرطی بازمی‌گردیم، پس از این، فرض می‌کنیم شما مقدمات احتمال را آموخته‌اید و سعی می‌کنیم از رابطهٔ اصلی احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S، یعنی $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کنیم.

اگر به یاد داشته باشید، در ابتدای بحثمان اشاره کردم که «یک مسألهٔ احتمال شرطی، چیزی جز محدودیت قائل شدن برای یک مسألهٔ احتمال غیرشرطی نیست». سعی می‌کنم این موضوع را با ذکر چند مثال برای شما ملموس کنم و سپس مدل احتمال شرطی و قوانین مربوط به آن را بیان و تجزیه و تحلیل کرده، به طرح و حل مسائلی می‌پردازیم تا سرانجام پیشامدهای مستقل و وابسته را تعریف کنیم.

مثال ۱. تاسی را می‌ریزیم، اگر احتمال روشدن عدد اول را بخواهیم، جواب می‌دهید $p(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$. حال اگر سؤال کنیم چقدر احتمال دارد عدد اول رو شود، به شرط آن‌که بدانیم تاس عدد زوج آمده، جواب شما چیست؟

وقتی می‌گوییم به شرط آن که تاس عدد زوج آمده، یعنی پیشامد زوج آمدن رخ داده است؛ لذا فضای نمونه‌ای جدیدی که همواره زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای اصلی است، به‌وجود



آمده است، که در این مثال، شرط موجود باعث شده $S_۱ = \{۲,۴,۶\}$ فضای نمونه‌ای جدید باشد که ما در این فضای نمونه‌ای، به‌دنبال پیشامد مطلوب خودمان، یعنی اول آمدن تاس هستیم که چون فقط عدد ۲ در $S_۱$ اول است، احتمال رو شدن عدد اول به شرط زوج آمدن، عبارت است از: $p(A) = \frac{۱}{۳}$.

مثال ۲. دو تاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن‌که:

الف. مجموع دو تاس ۸ باشد؛ به شرط آن‌که بدانیم هر دو تاس اوّل هستند.

ب. مجموع دو تاس کم‌تر از ۷ باشد؛ به شرط آن که هر دو تاس مثل هم باشند.

ج. هر دو زوج باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان ۷ است.

د. مجموعشان بزرگ‌تر از ۹ باشد؛ به شرط آن که بدانیم: هر دو بزرگ‌تر از ۳ هستند.

هـ. هر دو بزرگ‌تر از ۳ باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم مجموعشان بزرگ‌تر از ۹ است.

حل: در حل تمام قسمت‌ها، همواره B را پیشامدی که رخ داده و A را پیشامد مطلوب است، فرض می‌کنیم:

الف)

$B = \{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۵,۵),(۳,۳)\}$

$A = \{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)\}$

$P(B$ رخداد پیشامد A به شرط$) = p(A/B) = \frac{۲}{۹}$

(پیشامد B درواقع فضای نمونه‌ای جدید است که در آن به دنبال مجموع ۸ هستیم و فقط دو زوج (۵,۳) و (۳,۵) در B یافت می‌شوند که مجموعشان ۸ است. حال اگر کمی دقت کنید، ملاحظه می‌کنید که $A \cap B = \{(۳,۵),(۵,۳)\}$ و درواقع $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۲}{۹}$ همان احتمال مطلوب است!

(بعداً نیز ثابت می‌شود که $p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ به‌عنوان فرمولی برای محاسبهٔ احتمال رخداد A به شرط آن‌که B رخ داده باشد، به‌کار می‌رود.)

ب) $B = \{(۱,۱),(۲,۲),\cdots,(۶,۶)\}$

$A = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۱),\cdots,(۲,۴),(۴,۲)\}$

$A \cap B = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\} \Rightarrow p(A/B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ج) $B = \{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$A = \{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$

$(A \cap B) = \varnothing \Rightarrow p(A/B) = \frac{۰}{۶} = ۰$

(درواقع اگر مجموع دو تاس ۷ باشد که عددی فرد است، باید یکی از آن دو عدد زوج و دیگری فرد باشد و امکان هر دو زوج بودن وجود ندارد.)

د)

$B = \{(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

$A = \{(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۶),(۶,۶)\}$

$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B) = A \Rightarrow p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{۶}{۹}$

هـ) $B = \{(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۶),(۶,۶)\}$

$A = \{(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(B)}{n(B)} = ۱$

(توجه دارید که $(A \cap B)$ به همان معناست که قبلاً روی آن بحث شد؛ یعنی A و B با هم رخ بدهند و چون A و B از یک فضای نمونه‌ای هستند، عضوهای مشترک A و B مورد نظر است.)

در شمارهٔ بعد، به بیان و تجزیه و تحلیل مدل احتمال شرطی و قوانین مربوط به آن خواهیم پرداخت. توصیه می‌کنم

برای آمادگی بیش‌تر، تمرین‌های زیر را حل کنید.

تمرین:

۱. سه تاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن‌که:

الف. هر سه اوّل باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم مجموعشان کم‌تر از ۹ است.

ب. هر سه فرد باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان ۷ است.

۲. سه سکّه را با هم می‌اندازیم، چه‌قدر احتمال دارد:

الف. هر سه H بیایند؛ به شرط آن‌که بدانیم حداقل یکی از آنها H است.

ب. دو سکه T بیاید؛ به شرط آن‌که بدانیم حداکثر دو سکّه H است.

۳. در جعبه‌ای، ۴ مهرهٔ آبی، ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. از این جعبه، سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم، چه‌قدر احتمال دارد:

الف. هر سه مهره آبی باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم هر سه همرنگ هستند.

ب. ۲ مهره آبی و ۱ مهرهٔ سبز باشد؛ به شرط آن‌که بدانیم هیچ‌کدام قرمز نیستند.

(جواب این تمرین‌ها را در شمارهٔ بعدی مجلّه ملاحظه خواهید کرد.)

معماهای فـ  ـکری و منطقی

B، C، J و S که نام‌های اشخاصی هستند که مسؤولیت‌های حسابداری، صندوقداری، ریاست و مدیرعامل را ـ گرچه نه لزوماً به این ترتیب ـ در بانکی به عهده دارند.

مدیرعامل، گرچه صندوقدار مرتب او را شکست می‌دهد، با هیچ‌کس دیگر در بانک شطرنج بازی نمی‌کند.

هم رئیس و هم صندوقدار شطرنجبازان بهتری نسبت به حسابدارند.

J و S همسایهٔ دیوار به دیوارند و اغلب عصرها با هم شطرنج بازی می‌کنند. C شطرنجباز بهتری نسبت به J است.

حسابدار نزدیک مدیرعامل زندگی می‌کند؛ اما از دیگران دور است.

مقام هر یک کدام است؟

بحثی در حل معماهای فکری و منطقی

از: وایلی
ترجمه: غلامرضا یاسی پور



یکی از موارد مکمل آموزش ریاضی، پرداختن به معماهاست. و در این میان، معماهای فکری ـ منطقی، و ریاضی، جای ویژه‌ای به خود اختصاص می‌دهند.

معماهای فکری ـ منطقی یا ریاضی، روش تحقیق و پژوهش، چگونگی پرداختن به مسائل فکری، استفاده از تفکر ناب، و از همه مهمتر، گذشتن از حوزه های به ظاهر غریب منطق و فکر را به پردازندهٔ به خود می‌آموزد و او را به سیاحت در زمینه‌های ناآشنای خرد رهنمون می‌شود. مقالهٔ زیر، نگاهی است مختصر به این چشم‌انداز پرثمر؛ امیدواریم که برای خواننده مفید باشد.

***

معماهای با ویژگی صرفاً منطقی، از یک طرف با توجه به این واقعیت که شامل بازی با کلمات، گزاره‌های عمداً فریب‌آمیز و حدس زدن ـ و به طور مختصر، هیچ نوع کجروی‌ای از این دست ـ نیست، با چیستان‌ها متفاوت‌اند، و از طرف دیگر، با پرسش‌ها و اغلب معماهای ریاضی، از این لحاظ تفاوت دارند که به جای تکیه بر حافظهٔ بیش‌تر، بر مبنای تفکر تنظیم شده‌اند، به عبارت دیگر، کلید حل آنرا، به جای این‌که به مخزنی از اطلاعات نیاز داشته باشد، بیش‌تر به هوش و درایت طبیعی و ذاتی متکی است.

برای این‌که معماهای فکری‌ـ‌منطقی تا حد امکان با این موضوع مطابقت داشته باشد، حداکثر کوشش را به کار می‌بریم که موارد مبتنی بر واقعیت آن‌ها حتی‌الامکان معدود و محدود باشد. در بعضی از مثال‌ها، کاربرد مختصری جبر مقدماتی، می‌تواند به ساده کردن راه‌حل کمک کند؛ اما هیچ یک از آن‌ها به هیچ‌گونه اطلاعات فنی‌ای ماورای جداول ضرب و این واقعیت که:

زمان × سرعت = فاصله

نیاز ندارد. ولی این انتظار را داریم که حل کننده با این واقعیت که یک انسان باید بزرگ‌تر از فرزندان خود باشد و زمانی که دو نفر در یک بازی مختلط دو نفره شرکت می‌کنند، یکی مرد و دیگری زن است و با واقعیت‌های ساده در حد تجربیات

روزمرّه آشنا باشد.

ملاحظهٔ این مطلب جالب است که معماهایی از نوع صرفاً منطقی، مظهر فرایندهای کامل عملی‌اند. در آغاز کار، شخص با توده‌ای از داده‌های کم‌وبیش نامرتبط مواجه می شود. از این واقعیت‌ها شاید بتوان بلافاصله استنتاج های مثبت معدودی استخراج کرد؛ اما معمولاً ضروری می‌شود که در مورد آن‌ها فرض های موقتی یا عملی، برای جست‌وجوی راهنمایی در نظر گرفته شود و در این صورت باید درستی فرض های مزبور، با آزمایش کردن پیامدهای آن‌ها در سازگاری با داده‌های اولیه، به دقت مورد بررسی قرار گیرد و در صورت ظهور ناسازگاری، باید مفروضات موقتی مزبور را کنار گذاشت و فرض‌های دیگری را تا رسیدن به مجموعه‌ای از نتایج سازگار، جانشین آن‌ها کرد. سپس باید به امتحان این نتایج برای یکتایی آن‌ها در این مورد پرداخت که آیا فقط آن‌ها شرایط مسأله را برقرار می‌کنند یا موارد دیگر نیز به‌طور مساوی قابل قبول‌اند.

بنابراین با استفاده از فرایند اساسی در نظر گرفتن فرض، استخراج نتایج از آن و امتحان سازگاری آن‌ها در چارچوب کلی مسأله، سرانجام پاسخ از دل اطلاعات به ظاهر نامربوطی بیرون کشیده می‌شود که ارائه داده شده‌اند.

ویژگی ذاتی معماهای منطقی است که راه‌حلشان را نمی‌توان به صورت الگویی ثابت درآورد. با وجود این، در این مرحله، ارائه پیشنهادهایی عمومی برای پرداختن به معماهایی از این نوع، می‌تواند سودمند باشد. ابتدا مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

B، P، R و S چهار هنرمند با استعداد و خلاّق‌اند، که تخصص یکی بندبازی، یکی نقاشی، یکی خوانندگی و دیگری نویسندگی (گرچه نه لزوماً به این ترتیب) است.

۱. شبی که «خواننده» اولین اجرای خود را در کنسرتی انجام داد، B و R در میان جمعیت شنونده بودند.

۲. هم P، هم «نویسنده»، برای کشیدن تصویرشان، مقابل «نقاش» نشسته‌اند.

۳. «نویسنده» که بیوگرافی‌اش از S جزو کتاب‌های پرفروش قرار گرفته است، می‌خواهد بیوگرافی B را نیز بنویسد.

۴. B هیچ‌گاه با R آشنا نبوده است.

حوزهٔ هنری هریک از این چهارنفر چیست؟

از برداشتن واقعیت‌ها و فرض‌ها، و نتایج متعدد مبتنی بر آن‌ها، گیج‌کننده و مشکل است. در جمیع معماها، البته غیر از ساده‌ترینشان، بهتر است که تحلیلمان را به طور سیستماتیک به یک سری یادداشت تبدیل کنیم. یکی از روش‌های رسیدن به این مقصود، تنظیم آرایه‌ای است که در بردارندهٔ تمام امکانات باشد؛ به این ترتیب:

	نویسنده	خواننده	نقاش	بندباز
B				
P				
R				
S				

به عنوان مثال، اگر اکنون به این نتیجه برسیم که P نمی‌تواند بندباز باشد، حرفی، مثلاً ✗، در مقابل نام او در ستون با سرستون *بندباز* قرار می‌دهیم، یا اگر تشخیص دهیم که B باید نقاش باشد، علامت دیگری، مثلاً O، در مقابل نامش در این ستون می‌گذاریم، و با استفاده از آن می‌توانیم مربع‌های باقی‌ماندهٔ در این سطر و ستون را با ✗ پر کنیم (زیرا تنها یک B و تنها یک نقاش موجود است). به طور واضح، زمانی‌که به گونه‌ای سازگار و دقیق یک O در هر سطر و در هر ستون قرار دهیم، راه‌حل کامل می‌شود و با استفاده از آن، مشخص می‌کنیم که هریک از این اشخاص چه کاره است.

در مسألهٔ مورد بحث، از (۱) می‌دانیم که نه B و نه R خواننده است؛ در نتیجه در مقابل آن‌ها و در ستون مناسب × قرار می‌دهیم. از (۲) در می‌یابیم که P نه نقاش و نه نویسنده است و از (۳) می‌فهمیم که نویسنده نه B و نه S است. جدول، با ✗هایی که به نحو مطلوب در آن قرار گرفته‌اند، به صورت زیر است:

	نویسنده	خواننده	نقاش	بندباز
B	✗	✗		
P	✗		✗	
R		✗		
S	✗			

اکنون با حذف، آشکار می‌شود که R نویسنده است. در نتیجه یک O در مقابل نام او و در ستون با سرستون نویسنده قرار می‌دهیم و مربع‌های باقی مانده در سطرش را با × پرمی‌کنیم. گذشته از این، طبق (۲)، R مقابل نقاش قرار گرفته، در حالی که طبق (۴)B او را نمی‌شناسد؛ بنابراین B نقاش نیست و در نتیجه، با حذف، باید بندباز باشد. اما در این صورت نه Pو نه S نمی‌توانند بندباز باشند و این ملاحظه خواننده را به عنوان تنها مورد ممکن برای P به جا می‌گذارد. سرانجام، S باید نقاش باشد و راه‌حل کامل می‌شود.

شیوه‌ای که به توضیح آن پرداختیم، در مورد معماهای شناسایی نیز مناسب است؛ معماهایی که در آن‌ها اطلاعات لازم به صورت گزاره‌های شرطی یا ممکن خاص داده شده‌اند. دراین‌باره مثالی ساده می‌زنیم:

(۱) اگر A، P باشد، C، R نیست.

(۲) اگر B، P یا R باشد، A، Q است.

(۳) اگر A، Q یا R باشد، B، P است.

تناظر بین نمادهای (C، B و A) و نمادهای (R، Q و P) را مشخص کنید.

فرض می‌کنیم کار را با پذیرش فرض A، P است، آغاز کرده‌ایم. در این صورت، جدولی رسم می‌کنیم که در آن O در مقابل A در ستون با سرستون P و × در مربع‌های دیگر واقع در سطر A و ستون P قرار داشته باشد:

	P	Q	R
A	O	✗	✗
B	✗		
C	✗		

اکنون از (۱)، C نمی‌تواند R باشد؛ در نتیجه باید Q باشد و در این صورت و لزوماً B باید R باشد. اما از (۲)، اگر B، R باشد، A باید Qباشد، که هم با فرض A، P است و هم با نتیجهٔ C، Q است، متناقض است. این عدم سازگاری وادارمان می‌کند که فرض A، P است را کنار بگذاریم.

اکنون کار را با رسم جدول تازه‌ای بر مبنای این واقعیت ادامه می‌دهیم که A، P نیست. بنا به (۳)، اگر A، P نباشد، آن‌گاه B باید P باشد. در نتیجه، می‌توان یکO در مقابل B در ستون P وارد کرد و در مربع‌های باقی‌مانده در این سطر و ستون × قرار داد:

	P	Q	R
A	✗		
B	O	✗	✗
C	✗		

در این صورت، از (۲) نتیجه می‌گیریم که A، Q است و از آن به دست می‌آوریم که C، R است، و حل مسأله را کامل می‌کنیم.

در بعضی معماها اطلاعات داده شده، شامل مجموعه‌ای از گزاره‌هایی‌ست که می‌دانیم تعدادی از آنها دروغ است؛ البته بدون این‌که مشخص باشد که اظهارات ناراست کدام است. معماهایی از این دست را نیز می‌توان با استفاده از جدول مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال، مورد زیر را در نظر می‌گیریم:

یک روز صبح فینلی «Finelli» را در حالی که گلوله خورده بود، مرده یافتند و پلیس چند ساعت بعد، سه مظنون را بازداشت کرد. سه مظنون مورد بازپرسی قرار گرفتند و اظهارات زیر را بیان کردند.

B: (۱) من این کار را نکرده‌ام.

(۲) قبل از این با J ملاقات نکرده‌ام.

(۳) البته فینلی را می‌شناختم.

J: (۱) من این کار را نکرده‌ام.

(۲) B وT هر دو از رفقای من هستند.

(۳) B هرگز کسی را نکشته است.

T: (۱) من این کار را نکرده ام.

(۲) هنگامی که B گفت هیچ گاه J را ندیده، دروغ گفت.

(۳) نمی‌دانم چه کسی این کار را انجام داده است.

اگر یکی و تنها یکی از گزاره های هر نفر دروغ باشد و اگر یکی از سه نفر مقصر باشد، جنایتکار کدام است؟

در این مورد، جدول مناسب به صورت زیر است:

	۱	۲	۳
B			
J			
T			

و برای این که مسأله مان با گزاره های داده شده سازگار باشد، باید یک F (برای *دروغ*) و دو T (برای *راست*) در هر سطر آن وارد کنیم.

در آغاز می توانیم این استنتاج مثبت را استخراج کنیم که T بی گناه است؛ زیرا اگر او مرتکب جنایت شده باشد، اولین و سومین گزاره اش دروغ می شوند که متناقض با این شرط داده شده است، که تنها یکی از اظهارات هر نفر دروغ است. این نتیجه را می توانیم به صورت یک T مقابل *T* در ستون اول درج کنیم.

اکنون دو مورد داریم: یا (الف) B مقصّر است، یا (ب) J مقصّر است. اگر (الف) را فرض کنیم، در این صورت گزارهٔ اول B دروغ می شود و گزارهٔ آخر J نیز چنین است، و این مطلب، تحت شرایط مسأله به این معناست که گزارهٔ دوم B و گزارهٔ دوم J باید راست باشند. اما این غیرممکن است؛ زیرا این دو واضحاً مناقض یکدیگرند. در نتیجه باید این فرض را رها کنیم که B جنایتکار مورد بحث است. بنابراین، نتیجه می شود که J کسی است که فینلی را به قتل رسانده است و این موضوع را می توان با بررسی جدول کامل با توجه به مورد (ب) بررسی کرد:

	۱	۲	۳
B	T	F	T
J	F	T	T
T	T	T	F

معماهایی که با استفاده از رمزبندی یا مخفی کردن ارقام در یک محاسبهٔ حسابی مطرح می شوند، چیزی غیر از توجه به حقایق عددی واضح نیاز ندارند. در این مورد نیز مانند معماهای از نوع شفاهی تر پیشین، ردیابی سر نخ ها و نتایج با استفاده از طریق منظم جدول بندی مفید است. برای توضیح این مطلب، مثال زیر را در نظر می گیریم:

در یک مسألهٔ ضرب، به جای هر یک از ارقام ۰ تا ۹ حرف متفاوتی قرار داده ایم و محاسبهٔ رمزی شده را به صورت زیر درآورده ایم:

```
        A L E
        R U M
    ---------
      W I N E
    W U W L
  E W W E
  -----------
  E R M P N E
```

هر یک از این حروف، به جای چه رقمی قرار گرفته است؟

برای منظم کردن کار، ابتدا حروف متفاوت ظاهر در مسأله را در یک سطر می نویسیم:

ALERUMWINP

سپس زیر هر حرف، هم ارز عددی آن را، در صورت کشف، یادداشت می کنیم و در ستون های زیر، حروف گوناگون سرنخ ها و فرض های موقتی را در حالی می نویسیم که مواظبیم استنتاج های مرتبط را در یک سطر افقی قرار داده باشیم.

در مسائلی از این دست، با جست وجویی ساده، اغلب می توان ارقام ۰تا ۱ را به دست آورد یا دست کم آن ها را به امکاناتی بسیار معدود، محدود کرد. به عنوان نمونه، هیچ گاه ۰ به صورت آخرین رقم سمت چپ یک عدد صحیح قرار نمی گیرد و زمانی که عددی در صفر ضرب شود، نتیجه منحصراً از صفرها تشکیل می شود. گذشته از این، هنگامی که عددی در ۱ ضرب شود، نتیجهٔ خود آن عدد است. در مسألهٔ مورد بحث، می توان ۰ را با بررسی حتی ساده تری شناخت؛ زیرا در ستون دوم از راست، N به علاوهٔ L برابر N شده، در حالی که عددی از ستون سمت راست انتقال نیافته و این بدان معناست که L باید صفر باشد.

در جست وجویمان برای ۱، می توانیم بلافاصله R، U و

M را حذف کنیم؛ زیرا هیچ‌یک از آن‌ها، به عنوان مضروب‌فیه سطر دوم، ELA را به دست نداده است. گذشته از این، E به این دلیل نمی‌تواند ۱ باشد که U برابر E حاصلی مختوم به U به دست نداده است. در مسألهٔ مورد بحث، سرنخ‌هایی در این مورد نداریم که A، I، N، P یا W رقم ۱ هستند یا نه.

حاصلضرب جزئی WUWL به L ختم شده است، که می‌دانیم ۰ است. در نتیجه یکی از دو حرف U و E باید ۵ باشد. با نگاه کردن به رقم‌های یکان حاصل ضرب‌های جزئی دیگر، ملاحظه می‌کنیم که هم M×E و هم R×E اعداد ختم شده به E هستند. اندکی دقت (یا نگاهی به جدول ضرب)، نشان می‌دهد که در این صورت E باید ۵ باشد.

اما در صورت ۵ بودن E، R و M باید فرد باشند؛ زیرا عدد زوج ضرب شده در ۵، حاصلی مختوم به ۰ می‌دهد و در هیچ‌یک از دو حاصلضرب جزئی اول و سوم، چنین نیست. گذشته از این، با استدلالی مشابه، واضح می‌شود که U عددی زوج است.

در این مرحله، بهتر است به جدولمان بازگشته، زیر U امکانات مختلف، یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸ را قرار دهیم. مقابل هریک از این‌ها مقدار نظیر W را، چنان که از حاصلضرب جزئی WUWL دریافته‌ایم، می‌نویسیم. اکنون دو رقم آخر این حاصلضرب معین می‌شوند؛ زیرا مشخص است که عامل ALE برابر ۵ ـ است. به سادگی ملاحظه می‌شود که این مقادیر W برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ است.

اکنون با بررسی ستون دوم از چپ، می‌توانیم امکان‌های نظیر R را استنتاج کنیم. همان‌گونه که قبلاً ملاحظه کردیم، R باید فرد باشد؛ در نتیجه مقدار آن دو برابر W به‌علاوهٔ ۱ است (۱ به ضرورت از ستون سمت راست آن انتقال یافته است.) در این صورت، مقادیر ممکن R عبارت‌اند از ۳، ۵، ۷ و ۹، و جدولمان به صورت زیر در می‌آید:

A	L	E	R	U	M	W	I	N	P
	۰	۵							
			۳	۲		۱			
			۵	۴		۲			
			۷	۶		۳			
			۹	۸		۴			

اکنون در ستون سوم از چپ مثال، مجموع ارقام W، U و W باید بیش از ۹ باشد؛ زیرا ۱ باید از این ستون به ستون سمت چپ انتقال یافته باشد. مقادیر واقع در دو سطر اول جدول، برای این منظور بسیار کوچک‌اند؛ بنابراین می‌توانیم هر دوی این سطرها را خط بزنیم.

بررسی بیشتر مجموع ارقام W، U و W در ستون سوم از چپ و در ارتباط با این واقعیت که M فرد است، نشان می‌دهد که M در سطر سوم جدول، باید ۳ باشد؛ در حالی که در سطر چهارم باید ۷ باشد. این ماجرا مجازمان می‌کند که سطر سوم جدول را نیز کنار بگذاریم؛ زیرا این سطر شامل ۳، هم برای M و هم برای W است، که غیر ممکن است. بنابراین، جواب صحیح باید جوابی باشد که در سطر چهارم است. در نتیجه R، ۹، U، ۸، M، ۷ و W، ۴ است. با قرار دادن این مقادیر در مسأله، مشخص کردن این که A، ۶، I، ۲، N، ۳، P، ۱ است، عملی آسان است و حل مسأله را کامل می‌کند.

مثال زیر را به عنوان مثالی از معمایی در نظر می‌گیریم که به جای ارقام رمزبندی شده، شامل رقم‌های پنهان است: یک مسأله تقسیم طولانی هر رقم غیر از رقم ۷ پنهان است، به صورت زیر است:

```
              ۰ ۷ ۰
      ۰ ۰ | ۰ ۰ ۰ ۰ ۰
           ۰ ۷ ۷
             ۰ ۷ ۰
             ۰ ۷ ۰
                 ۰ ۰
                 ۰ ۰
```

ارقام مفقود را بیابید.

مرحلهٔ واضح پرداختن به این مسأله، اولین حاصلضرب جزئی آن، یعنی ۷۷- است؛ زیرا این حاصلضرب بیش‌تر از موارد واقع در مسألهٔ مشخص شده است. اما تنها اعداد یک رقمی‌ای که حاصلضربشان به ۷ ختم می‌شود، ۳ و ۹ هستند. در نتیجه، اولین رقم واقع در خارج قسمت، باید یکی از این اعداد و آخرین رقم واقع در مقسوم‌علیه، باید عدد دیگر باشد. اگر مقسوم‌علیه‌های ممکن را به صورت ۹- در نظر بگیریم و هریک را در ۳ ضرب کنیم، در می‌یابیم که تنها موردی که

حاصلضربی به صورت ‎-۷۷‎ به دست می‌دهد، ۵۹ است که ۱۷۷ را می‌دهد. از طرف دیگر، اگر مقسوم‌علیه‌های به صورت ‎-۳‎ را مورد بررسی قرار دهیم و هر یک را در ۹ ضرب کنیم، در می‌یابیم که تنها ۵۳ حاصلضرب به صورت ‎-۷۷‎ را به دست می‌دهد. اما باید اولین امکان از این دو را کنار بگذاریم؛ زیرا زمانی که ۵۹ در دومین رقم واقع در خارج قسمت، یعنی ۷ ضرب شود، نتیجه ۴۱۳ می‌شود؛ در حالی که بنا بر مسأله، دومین حاصلضرب جزئی، به صورت ‎-۷-‎ است. این بررسی ۵۳ را به عنوان امکان منحصربه‌فرد مقسوم‌علیه و ۹ را به عنوان رقم اول مقسوم‌علیه باقی می‌گذارد. سرانجام ملاحظه می‌کنیم که آخرین رقم خارج قسمت باید ۱ باشد؛ زیرا آخرین حاصلضرب جزئی تنها شامل دو رقم است. با دانستن این که مقسوم‌علیه ۵۳ و خارج‌قسمت ۹۷۱ است، می‌توانیم برای به‌دست آوردن مقسوم، آن‌ها را در هم ضرب کنیم. در این صورت، بقیهٔ مسأله بلافاصله به دست می‌آید.

معمولاً اغلب معماهای هر مجموعه، جواب‌های منحصربه‌فرد دارند؛ اما تعداد اندکی از آن‌ها، به پاسخ‌های متفاوت و متعددی منجر می‌شوند؛ وضعیتی که عموماً در صورت مسأله خاطرنشان می‌شود. پاره‌ای معما نیز وجود دارند که در آن‌ها موضوع نه یافتن جواب، بلکه اثبات آن است، که داده‌های مفروض، در صورتی که با هم در نظر گرفته شوند، ناسازگارند. در توضیح معمایی از این دست، تفریق رمزبندی شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

```
  E I G H T
- T H R E E
-----------
    F I V E
```

اگر فرض بر این باشد که هریک از حروف به جای رقم متفاوتی قرار دارد، ثابت کنید تخصیص رقم یکتا به هریک از این حروف، برای تشکیل تفریق صحیح، ممکن نیست.

ابتدا توجه می‌کنیم که در چپ‌ترین ستون، تفریق T از E، رقم ۰ را به‌جا گذاشته است. در نتیجه E باید دقیقاً ۱ واحد بیش‌تر از T باشد (۱ را از E برای استفاده در ستون دوم فرض کرده‌ایم). اما در راست‌ترین ستون، T منهای E، رقم E را می‌دهد (زیرا E بزرگ‌تر از T است. برای امکان این تفریق، باید ۱ را از ستون واقع در چپ آن قرض کنیم.) یا در جهت عکس، E بعلاوهٔ E، عددی دو رقمی است که T را در مکان یکان خود دارد. در نتیجه T باید زوج باشد و البته متفاوت از ۰؛ زیرا به عنوان چپ‌ترین رقم، در سطر دوم مسأله ظاهر شده است. بنابراین امکان‌های زیر را داریم:

T:۲ ۴ ۶ ۸

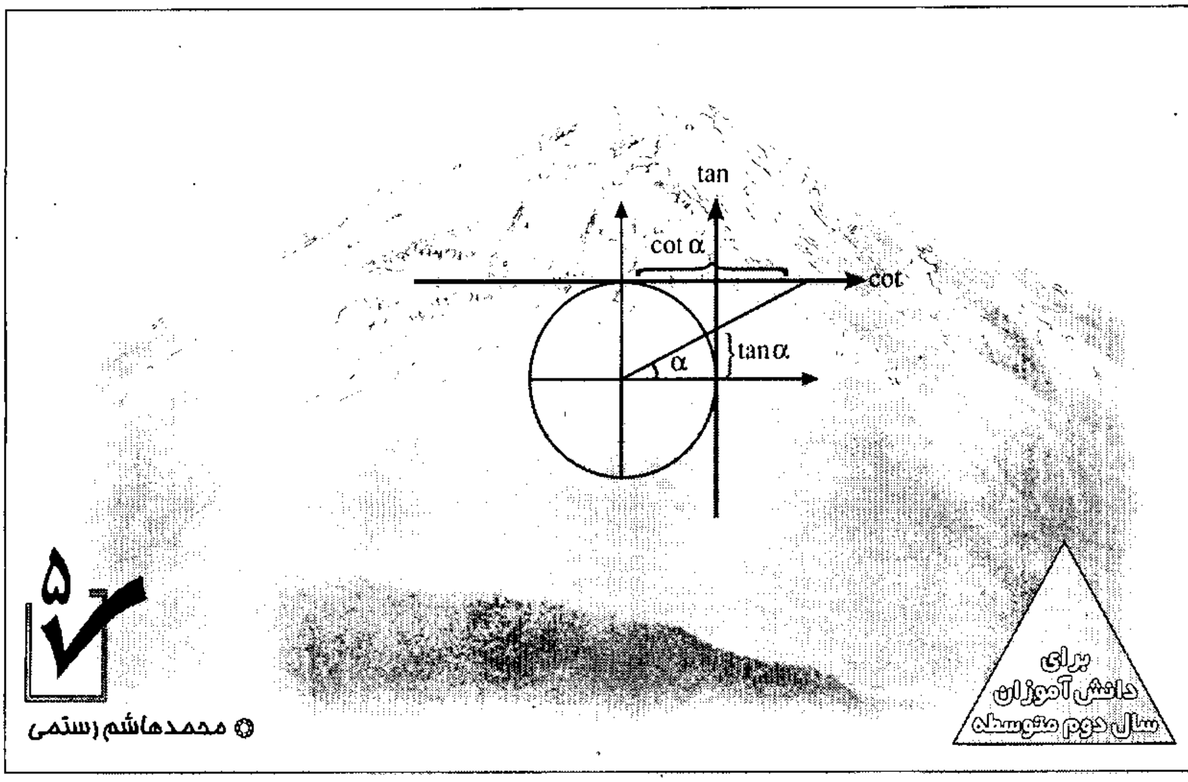
E:۶ ۷ ۸ ۹

در میان این موارد، تنها یک جفت، یعنی E=۹ و T=۸ است که شرط دیگر را برقرار می‌کنند؛ یعنی این شرط را که E یک واحد بیش‌تر از T است.

اکنون تفریق واقع در ستون دوم از راست را در نظر می‌گیریم. پیش از این ملاحظه کردیم که باید از H عدد ۱ را برای استفاده در ستون سمت راست قرض بگیریم. در نتیجه E، یعنی ۹، چون از H منهای ۱ کم شود، V را به جا می‌گذارد. اما این که اول ۱ را از عددی قرض بگیریم و بعد ۹ واحد از آن‌چه می‌ماند، کم کنیم، برابر آن است که از عدد اصلی ۱۰ واحد کم شود، و زمانی که ۱۰ از هر عدد کم شود، رقم یکان آن عدد لزوماً به همان صورت رقم یکان پاسخ ظاهر می‌شود. در نتیجه، حاصل تفریق در ستون دوم از راست باید H باشد و نمی‌تواند رقم متفاوت V شود. این تناقض ناگزیر ثابت می‌کند که مسأله را نمی‌توان برای به دست دادن تفریقی صحیح رمزبندی کرد.

حل بسیاری از معماهای متعارف آسان است؛ اما بعضی از آن‌ها نسبتاً مشکل‌اند. احتمال دارد که شخصی بعضی را آسان‌تر از شخصی دیگر بیابد؛ چرا که روش‌های تحلیل از فردی به فرد دیگر تفاوت می‌کند. زمان لازم برای حل یک مسألهٔ خاص نیز، به عنوان دلیلی بر قابلیت استدلال حل کننده، کم‌اهمیت است؛ زیرا ممکن است شخصی بنا به تصادف محض، فرض صحیح را برای اولین آزمایش خود انتخاب کند؛ در حالی که ممکن است فردی با همان ضریب هوشی، پیش از رسیدن به فرض درست، تعدادی نامشخص از فرض‌های نابسامان را جست‌وجو کند.

این نکته را نیز بیفزاییم که ممکن است معمایی در محتوا تازه و جدید باشد، اما در صورت نمی‌تواند؛ زیرا طرح معمایی که از لحاظ صورت کاملاً تازه باشد، تقریباً غیر قابل تصور است. به‌طور کلی معمایی را فکری-منطقی می‌گوییم که با کم‌ترین اطلاعات لازم و تنها توسط استدلال منطقی قابل حل باشد.



حلّ معادله های ساده مثلثاتی

اشاره

حل معادله‌های $\sin X = a$ و $\cos X = b$ را قبلاً دیدیم. اکنون حل معادله‌های $tgX = c$ و $\cot gX = d$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حل معادله‌های $tgX = c$ **و** $\cot gX = d$.

فرض می‌کنیم $c = tg\alpha$ ، یا $d = \cot g\alpha$ باشد. در این صورت داریم:

$$tgX = tg\alpha \Rightarrow X = k\pi + \alpha$$

$$\cot gX = \cot g\alpha \Rightarrow X = k\pi + \alpha$$

بنابراین جواب کلی هر دو معادلهٔ $tgX = tg\alpha$ و $\cot gX = \cot g\alpha$ به صورت $X = k\pi + \alpha$ است.

مثال ۱. معادلهٔ $۳tgx - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۳tgx - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۳tgx = \sqrt{۳} \Rightarrow tgx = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = tg\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

مثال ۲. معادلهٔ $۳tgx + \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۳tgx + \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۳tgx = -\sqrt{۳} \Rightarrow tgx = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} = -tg\frac{\pi}{۶}$$

$$= tg\left(\frac{-\pi}{۶}\right) \Rightarrow x = k\pi + \left(-\frac{\pi}{۶}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

مثال ۳. معادلهٔ $۳\cot gx - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۳\cot gx - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۳\cot gx = \sqrt{۳} \Rightarrow \cot gx = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$= \cot g\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

مثال ۴. معادلهٔ $۳\cot gx + \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$3\cot gx + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3\cot gx = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot gx = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\cot g\frac{\pi}{3} = \cot g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

مثال ۵. جواب کلی معادلهٔ $(2+\sqrt{3})tg2x - 1 = 0$ و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0,\pi)$ را به‌دست آورید.

حل: داریم:

$$(2+\sqrt{3})tg2x - 1 = 0 \Rightarrow (2+\sqrt{3})tg2x = 1$$

$$\Rightarrow tg2x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$= 2-\sqrt{3} = tg\frac{\pi}{12}$$

جواب کلی معادلهٔ

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$$

برای تعیین جواب‌های خصوصی مورد نظر، به جای k، عددهای صحیح مناسب قرار می‌دهیم.

k	x	
-1	$\frac{-11\pi}{24} < 0$	
0	$\frac{\pi}{24}$	جواب
1	$\frac{13\pi}{24}$	جواب
2	$\pi + \frac{\pi}{24} > \pi$	

به‌طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{24}$ و $\frac{13\pi}{24}$.

مثال ۶. ریشهٔ کلی معادلهٔ $\cot g(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})+1=0$ و سپس ریشه‌های موجود در بازهٔ $(0,2\pi)$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\cot g(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})+1=0 \Rightarrow \cot g(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}) = -1 = -\cot g\frac{\pi}{4}$$

$$= \cot g(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\pi}{6}-\frac{x}{2} = k\pi + (-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{-x}{2} = k\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{2} = k\pi - \frac{5\pi}{12} \Rightarrow x = -2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

جواب کلی معادلهٔ

برای تعیین جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0,2\pi)$ به جای k، عددهای صحیح مناسب قرار می‌دهیم.

k	x	
-1	$2\pi + \frac{5\pi}{6} > 2\pi$	
0	$\frac{5\pi}{6}$	جواب
1	$-\frac{7\pi}{6} < 0$	

تنها جواب خصوصی موجود در بازهٔ داده شده، $x = \frac{5\pi}{6}$ است.

مثال ۷. معادلهٔ $tg\pi x - \sqrt{3} = 0$ داده شده است.

الف. ریشهٔ کلی این معادله را به‌دست آورید.

ب. ریشه‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(-1,1)$ را تعیین کنید.

حل: الف. داریم:

$$tg\pi x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow tg\pi x = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow \pi x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow x = k + \frac{1}{3}$ جواب کلی معادلهٔ

k	x
-2	$-\frac{5}{3} < -1$
-1	$-\frac{2}{3}$
0	$+\frac{1}{3}$
1	$\frac{4}{3} > 1$

به‌طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(-1,+1)$ عبارت‌اند از: $-\frac{2}{3}$ و $+\frac{1}{3}$.

مثال ۸. معادلهٔ $tg(۲x+\frac{\pi}{۳})+\cot g(\frac{\pi}{۶}-۳x)=۰$ را حل کنید.

حل: این معادله را می‌توان به یکی از دو صورت $tgX=tg\alpha$ ، یا $\cot gX=\cot g\alpha$ تبدیل نمود و سپس حل کرد. ما آن را به صورت $tgX=tg\alpha$ تبدیل و سپس حل می‌کنیم. داریم:

$$tg(۲x+\frac{\pi}{۳})+\cot g(\frac{\pi}{۶}-۴x)=۰$$

$$\Rightarrow tg(۲x+\frac{\pi}{۳})=-\cot g(\frac{\pi}{۶}-۴x)=\cot g(-\frac{\pi}{۶}+۴x)$$

$$\Rightarrow ۲x+\frac{\pi}{۳}=k\pi+(-\frac{\pi}{۶}+۴x)\Rightarrow ۲x-۴x=k\pi-\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۳}$$

جواب کلی معادله

$$\Rightarrow -۲x=k\pi-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{-k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

مثال ۹. معادلهٔ $tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})-۳m+۴=۰$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان بیابید که $\frac{۲\pi}{۹}<x<\frac{۷\pi}{۱۸}$ باشد.

ب. حدود m را چنان تعیین کنید که $\frac{۷\pi}{۱۸}<x<\frac{۵\pi}{۹}$ باشد.

پ. مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از جواب‌های معادله $x=\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ باشد.

ت. مقدار m را چنان تعیین کنید که $tg\frac{x}{۲}=۱$ باشد.

ث. به ازای $m=\frac{۵}{۳}$ معادله را حل کنید.

حل: الف. داریم:

$$tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})-۳m+۴=۰\Rightarrow tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=۳m-۴$$

$$\frac{۲\pi}{۹}<x<\frac{۷\pi}{۱۸}\Rightarrow \frac{\pi}{۳}<\frac{۳x}{۲}<\frac{۷\pi}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}<\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳}<\frac{۷\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۰<\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳}<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow tg۰<tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})<tg\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۰<۳m-۴<۱\Rightarrow ۴<۳m<۵\Rightarrow \frac{۴}{۳}<m<\frac{۵}{۳}$$

ب. داریم:

$$\frac{۷\pi}{۱۸}<x<\frac{۵\pi}{۹}\Rightarrow \frac{۳}{۲}\times\frac{۷\pi}{۱۸}<\frac{۳x}{۲}<\frac{۵\pi}{۹}\times\frac{۳}{۲}\Rightarrow \frac{۷\pi}{۱۲}<\frac{۳x}{۲}<\frac{۵\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۷\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۳}<\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳}<\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \frac{\pi}{۴}<\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳}<\frac{\pi}{۲}$$

$$tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})>tg\frac{\pi}{۴}=۱\Rightarrow ۳m-۴>۱\Rightarrow ۳m>۵$$

$$\Rightarrow m>\frac{۵}{۳}$$

پ. برای آن که $x=\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ ، یکی از ریشه‌های معادلهٔ داده شده باشد، باید در این معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$tg(\frac{۳}{۲}\times\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۳})-۳m+۴=۰\Rightarrow tg\frac{۳\pi}{۴}-۳m+۴=۰$$

$$\Rightarrow -۱-۳m+۴=۰\Rightarrow -۳m=-۳\Rightarrow m=۱$$

ت. یک ریشه از معادلهٔ $tg\frac{x}{۲}=۱$ را به دست آورده، در معادلهٔ داده شده قرار می‌دهیم. داریم:

$$tg\frac{x}{۲}=۱=tg\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{\text{در معادلهٔ داده شده}} tg(\frac{۳\times\frac{\pi}{۲}}{۲}-\frac{\pi}{۳})-۳m+۴=۰$$

$$\Rightarrow tg\frac{۵\pi}{۱۲}-۳m+۴=۰\Rightarrow ۲+\sqrt{۳}-۳m+۴=۰$$

$$\Rightarrow m=\frac{۶+\sqrt{۳}}{۳}$$

ث. داریم:

$$m=\frac{۵}{۳}\xrightarrow{\text{در معادلهٔ داده شده}} tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})-۳\times\frac{۵}{۳}+۴=۰$$

$$\Rightarrow tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})-۵+۴=۰\Rightarrow tg(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳})=۱=tg\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳}=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \frac{۳x}{۲}=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{۷\pi}{۱۸}$$

مثال ۱۰. معادلهٔ $۳\cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})-۲m-۱=۰$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان تعیین کنید که $-\frac{۱}{۸}<x<۰$ باشد.

ب. حدود m را چنان بیابید که $-\frac{۱}{۸}<x<\frac{۱}{۸}$ باشد.

پ. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x=\frac{۱}{۲}$ باشد.

ت. به ازای $m=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$، معادله را حل کنید.

حل: الف.

$$۳\cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})-۲m-۱=۰\Rightarrow \cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۲m+۱}{۳}$$

$$-\frac{۱}{۸}<x<۰\Rightarrow -\frac{\pi}{۴}<۲\pi x<۰\Rightarrow -\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}<۲\pi x+\frac{\pi}{۴}<۰+\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۰<۲x+\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \cot g(۲x+\frac{\pi}{۴})>۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲m+۱}{۳}>۱\Rightarrow ۲m+۱>۳\Rightarrow m>۱$$

ب. با توجه به این که $\cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۲m+۱}{۳}$ است، داریم:

$$-\frac{۱}{۸}<x<\frac{۱}{۸}\Rightarrow -\frac{\pi}{۴}<۲\pi x<\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}<۲\pi x+\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۰<۲\pi x+\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})>۰\Rightarrow \frac{۲m+۱}{۳}>۰$$

$$\Rightarrow ۲m+۱>۰\Rightarrow ۲m>-۱\Rightarrow m>-\frac{۱}{۲}$$

پ. $x=\frac{۱}{۲}$، باید در معادله صدق کند. داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{در معادله}}۳\cot g(\pi+\frac{\pi}{۴})-۲m-۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳\times ۱-۲m-۱=۰\Rightarrow ۲m=۲\Rightarrow m=۱$$

ت. داریم:

$$m=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\xrightarrow{\text{در معادله}}۳\cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})-۲(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲})-۱=۰$$

$$۳\cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})-\sqrt{۳}=۰\Rightarrow ۳\cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \cot g(۲\pi x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\cot g\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۲\pi x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x+\frac{۱}{۴}=k+\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۲x=k+\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{k}{۲}+\frac{۱}{۲۴}$$

معماهای فکری و منطقی



C، F، M و S در شهر کوچکی به‌عنوان معمار، بانکدار، داروساز و بقّال ـ گرچه نه لزوماً به این ترتیب ـ خدمت می‌کنند. درآمد هر شخص تعداد درستی دلار است.

داروساز دقیقاً دو برابر بقّال پول درمی‌آورد، معمار دقیقاً دو برابر داروساز و بانکدار دقیقاً دو برابر معمار.

گرچه C از هر کسی که بیش از F درآمد دارد، بزرگ‌تر است و F دو برابر C پول درنمی‌آورد.

S دقیقاً ۳۷۷۶ دلار بیش از M به دست می‌آورد.

شغل هر کس چیست؟

گفت و گو با استاد احمد قندهاری

ذات ریاضی صداقت است

استاد احمد قندهاری، معلم، مؤلف و پژوهنده‌ای است که شما خوانندگان عزیز مجله، آثار ایشان را در شماره‌های گذشته مطالعه کرده‌اید. به جهت آشنایی بیشتر؛ این مصاحبه را آقای غلامرضا یاسی‌پور تدوین کرده‌اند و البته اعضای هیأت تحریریه مجله هم در این مصاحبه شرکت داشته‌اند و سؤالاتی را از استاد قندهاری پرسیده‌اند.

❖ **یاسی‌پور: بسم‌الله الرحمن الرحیم و به نستعین، عَلَیْکَ بِحُسْنِ الخُلق اِنَّ اَحْسَنَ النّاس خُلُقاً اَحْسَنُهُمْ دیناً**

در حدیث آمده که جزو محاسن اصلی هر بشر، حُسن خلق است؛ یعنی خوشخو بودن؛ چرا که پیغمبر اکرم صلوات‌الله علیه، نشانهٔ دینداری را خوشخویی می‌دانند و فرموده‌اند که هر که خوشخوتر باشد، دینش برتر و بالاتر است. بالاترین دینداران، خوشخوترین افراد هستند. بنده هم اولین سؤالم را در مورد همین خوشخویی شروع می‌کنم که یکی از ویژگی‌های استاد قندهاری است؛ یعنی می‌خواهیم بدانیم که استاد قندهاری چطور پس از این همه سال تدریس، همچنان خوشخو و خوش خلق مانده‌اند؟

❂ **استاد قندهاری:** بسم‌الله الرحمن الرحیم. من اصولاً سر کلاس فقط درس نمی‌دهم؛ بلکه زندگی می‌کنم؛ یعنی واقعاً دانش‌آموزان را مثل بچه‌های خودم یا الان که دیگر مثل نوه‌هایم هستند، با آنان رفتار می‌کنم. اگر مطلب خنده‌داری پیش بیاید، می‌گویم و اگر خسته شوم، به دانش‌آموزان می‌گویم حرف بزنند و کمی شوخی کنند تا خستگی‌مان درآید. این جوّ نشاط و شادی را در کلاس، من حاکم می‌کنم. رابطه‌ام با آنان، رابطهٔ شاگردی و معلمی سنّتی نیست که فقط معلم درس بدهد و شاگردان ساکت بنشینند و اجازهٔ صحبت نداشته باشند.

❖ **سؤال بعد این که، روحیهٔ طنزآمیز شما از کجا ناشی شده و آن را از چه زمانی شروع کرده‌اید؟ چون دیده شده که همیشه نکته‌های طنزآمیز هم در صحبت‌هایتان وجود دارد.**

❂ من معمولاً با مطالعهٔ ادبیات و شعر، خستگی ریاضی را در می‌کنم؛ یعنی همیشه شعر می‌خوانم و در مورد مسائل اجتماعی و سیاسی مطالعه دارم. این است که طبعاً آن مقولهٔ طنز را به‌وجود می‌آورد و من این روحیه را در حوزهٔ روزمرّهٔ خودم و کار تدریس تلفیق می‌کنم.

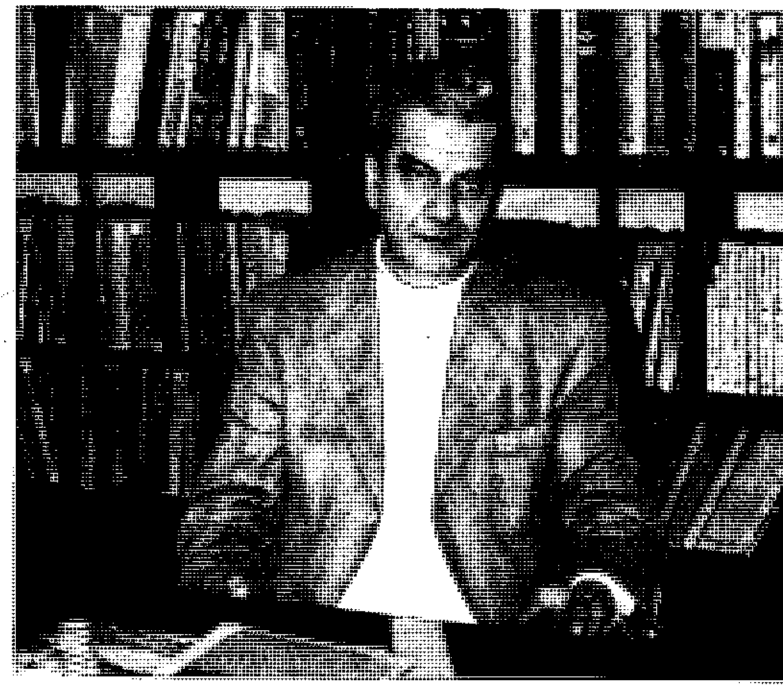
❖ **آیا سر کلاس دربارهٔ مطالب ادبی هم صحبت می‌کنید؟**

❂ بله، حتماً. خیلی وقت‌ها شده که من به دانش‌آموزان گفتم، امروز حالم خوب نیست، بگذارید اول یک شعر برایتان بخوانم.

من اصولاً سر کلاس فقط درس نمی‌دهم، بلکه زندگی می‌کنم

من معمولاً با مطالعهٔ ادبیات و شعر، خستگی ریاضی را درمی‌کنم

من اعتقاد دارم که ریاضی پلی است که یک طرفش محاسبات است و یک طرفش هنر



❖ **این شعرها را هم من از شما شنیده‌ام. تا آن‌جایی که برخورد داشته‌ام، هم شعرهای شاعران قدیم بوده، هم شاعران جدید، و شما با حافظ کاملاً آشنا هستید.**

۞ بله، همین‌طور است. من حتی مقاله‌ای هم دربارهٔ حافظ نوشته‌ام؛ حالا اگر قابل باشد، خدمت شما تقدیم می‌کنم. شاید من بیش از صد بار حافظ را خوانده‌ام. چون در هر زمانی، از حافظ برداشت خاصی می‌کنم. اصولاً کتاب حافظ، یک دوست زودآشنای دست نیافتنی است. زودآشناست به این علت که شعرش را هر کسی با هر بضاعتی بخواند، یک چیزی دریافت می‌کند؛ اما شما وقتی اطلاعاتتان بیشتر می‌شود، دقتتان هم بیشتر می‌شود و برداشت‌های جدیدی از شعر خواهید داشت. این است که حافظ خیلی زیاد به دلم می‌نشیند. غیر از حافظ، شعرهای اخوان ثالث را هم خیلی دوست دارم. اکثر شاعران نوپرداز، شعرهای زیبا دارند؛ مانند فریدون مشیری، که شعر «کوچه»اش بسیار زیباست، یا این غزل از هوشنگ ابتهاج:

امشب به قصهٔ دل من گوش می‌کنی
فردا مرا چو قصه فراموش می‌کنی

که بسیار زیباست و یا شاعرانی مانند سیاوش کسرایی با شعر آرش کمانگیر، احمد شاملو با شعرهای پریاش و عموصحرایش، سهراب سپهری با شعر صدای پای آب، فروغ فرخزاد با شعرهای تولدی دیگرش و بسیاری از شاعران معاصر دیگر.

❖ **پس شما اعتقاد دارید که ریاضی جدا از شعر و هنر نیست؛ بلکه به عکس، با آن‌ها خیلی مرتبط است.**

۞ من اعتقاد دارم که ریاضی پلی است که یک طرفش محاسبات است و یک طرفش هنر. وقتی شما خوب تدریس می‌کنید، به اعتقاد من، این حاکی از هنر شماست.

❖ **شرقی: استاد، من هم با عقیدهٔ شما مبتنی بر خوش‌خلقی و خنده‌رویی در کلاس درس موافقم و خودم هم از ابتدای تجربهٔ معلمی، سعی کرده‌ام همین گونه باشم؛ اما احساس می‌کنم ـ در میان نسل جدید، ظرفیت دانش‌آموزان برای این مسأله کمتر شده است. آیا با نظر اینجانب موافقید و چه راهنمایی‌ای برای ما دارید؟**

۞ اصولاً به دلایلی که عرض می‌کنم،

معتقدم این طور نیست. برعکس تصور ما، در مجموع، هوش بچه‌های یک کلاس از هوش معلم بالاتر است. بنابراین معلم نباید کاری کند که تو ذوق دانش‌آموزان بخورد. مثلاً نباید از خودش تعریف کند؛ بلکه باید دیگران از او تعریف کنند.

❖ یعنی بچه‌ها تغییر نکرده‌اند و ظرفیتشان برای خندیدن کم نشده؟ چون این نکته از نظر اجتماعی و آسیب‌شناسی دانش‌آموزی، بسیار نکتهٔ مهمی است.

۞ من برخورد خاصی ندارم.

❖ یاسی‌پور: بله، این نکته‌ای که فرمودید بسیار مهم است؛ یعنی تمامیت. ما با این نکته در داستان انوشیروان و بزرگمهر در تاریخ ادبیاتمان برخورد کردیم، که وقتی سفیر روم به ایران آمده بود، انوشیروان برای این که به اصطلاح، پیش سفیر روم پُز بدهد، از بزرگمهر پرسید: «ای بزرگمهر تو همه چیز را می‌دانی؟» توقّع داشت که بگوید آری، می‌دانم، که او هم پُز بدهد که بله ما چنین وزیری داریم. ولی او به‌عکس، پاسخ منفی داد. گفت: «نه من همه چیز را نمی‌دانم.» خوب این پاسخ برای او خیلی گران تمام شد. سؤال بعدش این بود که پرسید: «پس همه چیز را که می‌داند؟» گفت: «همه چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادر نزاده‌اند.» این، به تمامیت اشاره دارد؛ زیرا اصطلاحی در ریاضیات داریم به نام تمامیت یا کلیت (Totality)، و این کلیت ماجرا خیلی مهم است. شما اشاره کردید که کل کلاس هوشش از معلم بیشتر است، قطعاً همین طور باید باشد. این همان مسألهٔ تمامیتی است که مطرح کردیم؛ ولی سؤالی که آقای شرقی کرده‌اند، سؤال بسیار مهمی بود که شما پاسخ قطعی به آن دادید و فرمودید که حداقل از نظر شما، این ماجرا و این مسأله تغییر نکرده است.

خوب، این جنبهٔ ادبی که شما فرمودید، بفرمایید در نوشته‌های ریاضی هم باید رعایت شود یا نه؟ یعنی آیا متن‌های ریاضی از ادبیات خاصی برخوردار باشند یا نه؟ زیرا در زبان‌های خارجی می‌بینیم که ریاضیات، فیزیک یا شیمی، از ادبیات و زبان خاصی برخوردارند. ما این زبان را گم کرده‌ایم؛ مثلاً ابوریحان بیرونی در «التفهیم»اش، که به زبان عربی نوشته و بعد خودش به زبان فارسی ترجمه کرده است، می‌گوید اگر من می‌خواستم این مطلب را به زبان خوارزمی، که زبان مادری و اصلی من بود، بنویسم، یک چیز مضحکی از آب درمی‌آمد. برای این که آن زبان، آمادگی این مطالب و اصطلاحاتش را نداشت. بنابراین من به زبان عربی نوشتم و بعد به زبان فارسی درآوردم، و این کتاب را برای یک دختر دوازده، سیزده ساله به نام «ریحانه» نوشته، که او بتواند بخواند؛ یعنی در این حد مطلب را ساده کرده است. آیا شما اعتقادتان بر این است که، با کتاب‌ها و مقالات متعددی که به زبان فارسی یا انگلیسی نوشته‌اید، آیا در آن‌ها ما باید یک زبان ادبی ریاضی داشته باشیم یا نه؟ و اگر باید داشته باشیم، باید تا چه حدّی باشد؟

در مجموع، هوش بچه‌های یک کلاس از هوش معلم بالاتر است؛ بنابراین معلم نباید کاری بکند که تو ذوق دانش‌آموزان بخورد

۞ آنچه که مسلّم است این که، نویسندگانی که کتاب ریاضی می‌نویسند، باید با ادبیات ریاضی آشنا باشند؛ اما تا آن‌جا که من اطلاع دارم، چنین نیست. در مورد نوشته‌های خودم، من سعی می‌کنم برای بچه‌ها بنویسم و این، کار کوچکی نیست. کمااین که شما اگر کتابی برای کودکان می‌نویسید، این کار، کودکانه نیست؛ بنابراین از حساسیت خاصی برخوردار است. آنچه که مسلّم است، این که شما از لحاظ ریاضی باید مطلب را صحیح بگویید، حالا می‌خواهد با لغات ساده‌تر باشد یا سخت‌تر. تعاریف باید مانع و جامع، و دقیق باشد. از این نظر، من یک مقداری رعایت می‌کنم.

❖ امیری: در ارتباط با ادبیات ریاضیات، من فکر می‌کنم دانستن منطق ریاضی، یکی از واجبات است؛ زیرا منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی است. کسی که دستور زبان نداند، ممکن است جای فعل و فاعل را اشتباه کند. این است که آن ادبیات، شاید قسمت عمده‌اش به منطق ریاضی مربوط شود.

❖ صدر: از دانش‌آموزان آقای قندهاری بارها شنیده‌ام که ایشان سر

کلاس تا چه اندازه منظم هستند؛ تخته را به چند قسمت برابر تقسیم می‌کنند، خیلی مرتب می‌نویسند و شکل‌ها را با حوصله، زیبا و دقیق رسم می‌کنند، که این نکته‌ها هم بسیار مهم است؛ یعنی یک معلم نباید وقت کلاس را تلف کند و شکل را بد بکشد. این نکته‌ها خیلی مهم‌اند. سؤالم این است که چه هدف‌هایی را از این نظم دنبال می‌کنید و توقّع جناب‌عالی از دانش‌آموزان در برخورد با این مسأله چیست؟

❂ وقتی یادگیری به صورت تصویری است؛ یعنی شما صحبت‌هایتان را روی تخته منعکس می‌کنید، باید شکل را بسیار خوب و زیبا بکشید، این مسلّماً درصد یادگیری را بالا می‌برد. مضافاً این که، می‌دانیم خود ریاضی یک مقدار درس سنگین، سخت و ثقیلی است، اگر قرار باشد آن را بدخط، مغشوش و تو هم بنویسیم، واقعاً درصد یادگیری پایین می‌آید. بنابراین من پای تخته واقعاً زیبا می‌نویسم. وقتی که هندسه درس می‌دادم، واقعاً شکل‌ها را قشنگ و دقیق می‌کشیدم. در هندسهٔ تحلیلیِ عمومی، ابتدا پاره‌خط‌هایی را می‌کشیدم، بعد کم‌کم به یک شکل خیلی بزرگ تبدیل می‌شد؛ به‌طوری که وقتی روی تخته جا نمی‌شد که آن شکل‌ها را رسم کنم، آن‌ها را روی دیوار می‌کشیدم و به بچه‌ها می‌گفتم، صندلی‌هایتان را رو به دیوار کنید و شکل‌ها را بسیار زیبا روی دیوار می‌کشیدم. آن‌ها هم دلشان نمی‌آمد پاک کنند. خوب همین بودنش روی دیوار، باعث می‌شد که دانش‌آموزان زیاد نگاه کنند و این نگاه کردن مداوم و هر روزه، به اعتقاد من، باعث یادگیری بیشتر می‌شود.

> **ـ وقتی یادگیری به صورت تصویری است، شکل را بسیار خوب و زیبا بکشید و این درصد یادگیری را مسلماً بالا می‌برد**

دکتر شفیعی کدکنی شعری دارد و می‌گوید:

تا کجا می‌کشد این نقشه به دیوار مرا
خوب، خیلی جاها می‌تواند ببرد.

در مورد سؤال دومتان، عرض کنم که به طور کلی رعایت نظم در زندگی روزمره بسیار مؤثر است و همین‌طور مسلّماً روی دانش‌آموزان هم اثر می‌گذارد، و در زندگی روزانه و آینده‌شان بی‌تأثیر نخواهد بود. توقّع دارم که آنان هم منظم باشند.

❖ **یاسی‌پور: این که فرمودید تأثیر چشم بیشتر است، در مثنوی ما داریم که می‌گوید:**

گفت شخصی با یکی کای خوش‌خصال
ده مرا از حق و باطل یک مثال
گوش را بگرفت و گفت این باطل است
چشم حق است و یقینش حاصل است

این همان عین‌اللهی است که عرفاً هم مطرح می‌کنند. عین‌اللهی با چشم آمده، نه گوش. شما هم پس به این اعتقاد دارید که تأثیر بصر، بیشتر از سمع است.

نکتهٔ دیگری که با نظم ارتباط پیدا می‌کند و ادامهٔ آن بحث است، این که، چند سال پیش‌تر، با مرحوم آذرنوش، که یکی از دبیران معروف ریاضی ایران بودند، همراه آقای امیری خدمت ایشان بودیم و مصاحبه می‌کردیم. ایشان به نکته‌ای اشاره کردند که بسیار مهم و آموزنده بود؛ گفتند: «من در چهل سال معلمی خود، به یقین می‌گویم که یک دقیقه دیر سر کلاس نرفتم و وقتی زنگ می‌خورد، یک دقیقه بیشتر شاگرد را در کلاس نگه نمی‌داشتم؛ یعنی درسم را طوری تنظیم می‌کردم که دانش‌آموز را یک دقیقه هم پس از وقت کلاس نگه ندارم.» چون می‌دانید که درس ریاضی را نمی‌توان نیمه‌کاره رها کرد. خوب، بعضی معلمان می‌گویند که پنج دقیقه بمانید تا ما تمام کنیم. خوب مرحوم آذرنوش معلم جبر و مثلثات بود و همهٔ این‌ها شکل و منحنی دارند؛ اما ایشان می‌گفت: «من به جرأت به شما می‌گویم که نه یک دقیقه دیر سر کلاس رفتم و نه یک دقیقه شاگرد را بیش از آن حدّی که باید سر کلاس باشد، نگه داشتم.» خوب این هم حکایت از نظمی می‌کند که ایشان داشتند؛ شما در این مورد چگونه هستید؟

❂ من هم همین‌طور هستم؛ یعنی ممکن است این ۴۲ سالی که تدریس می‌کنم، عدد و رقمش را دقیق به خاطر ندارم، ولی فکر می‌کنم شاید کمتر از ده بار پیش آمده باشد که من یک دقیقه بچه‌ها را نگه داشته باشم. من هم حتماً وقتم را تنظیم می‌کنم.

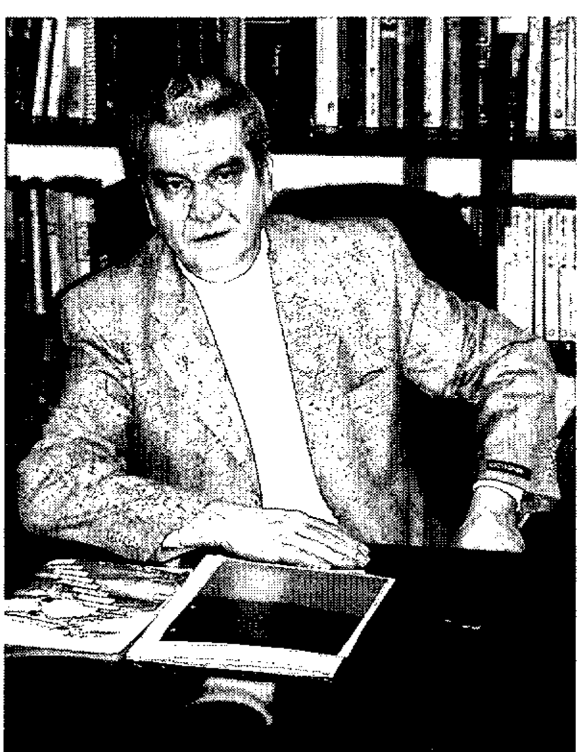
❖ **یاسی‌پور: نکته‌ای را از قول گودمان به خاطرم آمد که گفته، نخستین وظیفهٔ ریاضیدان، یافتن و تحویل دادن چیزی**

است که شاید امروز کمتر کسی طالب آن باشد (البته شاید او کمی بی‌مهری کرده، نمی‌دانم، ولی او این سخن را گفته) یعنی انسان. آیا واقعاً همین طور است؟ یعنی شما فکر می‌کنید در کار معلمی، اولین وظیفهٔ معلم ریاضی، تحویل دادن انسان است یا نه، تحویل دادن استدلال است؟ و یا انسان مستدل؟

❂ من فکر می‌کنم انسان مستدل باشد. در ضمن، کل ریاضی همیشه درستی را مطرح می‌کند؛ یعنی شما در ریاضی به چیز غلط نمی‌رسید. ممکن است حالا از برهان خلف یا راه دیگر اثبات کنید که این گزاره نادرست است، ولی کل مفاهیم ریاضی، مفاهیم درستی است. بنابراین به نظر من، ذات ریاضی صداقت است. شما وقتی جامعه‌شناسی درس می‌دهید، در مورد یک مطلب ممکن است پنج نظریهٔ مختلف و به‌ظاهر متضاد وجودداشته‌باشد و شاید هیچکدام هم رد نشده‌باشد؛ اما در ریاضی کسی نمی‌تواند بگوید این معادلهٔ درجهٔ دو، سه تا ریشه دارد. بنابراین صحّت و درستی‌اش دقیقاً موردنظر است. به همین علت، من فکر می‌کنم در ریاضیات، آنچه که مهم است، تفکر ریاضی است. متأسفانه در نظام جدید به‌علت این‌که کتاب‌ها شتابزده نوشته‌شده و اصولاً مسائل تشریحی وجودندارد و معمولاً هم این مطلب مطرح است که اگر p را داشته‌باشیم، ثابت کنید q وجوددارد، به‌اعتقاد من، این خیلی ریاضی نیست؛ بلکه باید بگویند اگر p را داریم، چه نتایجی می‌توان از آن بگیریم. این تفکر ریاضی را ایجاد می‌کند. اما این در کتاب‌های ما کمتر وجوددارد؛ ما در آموزش به‌طور اعمّ و در آموزش ریاضی به طور اخص، چند تا عامل اصلی داریم. یکی از آنها، عامل محیط و ابزار آموزشی است. شما ببینید در ایران، به‌خصوص در تهران، یک دبستان یا خانه را به دبیرستان و حتی یک خانه را به دانشگاه تبدیل می‌کنند.

❖ یاسی‌پور: **البته دبیرستان باید بزرگتر باشد؛ چون دانشجویان کمی آرام‌ترند و باز این قابل قبول‌تر است. دبیرستانی به هرحال می‌خواهد فوتبال بازی کند و نمی‌توان از او توقّع داشت که بازی نکند.**

❂ علاوه بر این، اگر شما در یک ساختمانی زندگی کنید که پنجرهٔ روبه‌رویتان به یک دیوار بازشود که احیاناً کثیف، شلوغ و بدرنگ باشد، شما را خسته می‌کند. ولی اگر پنجره‌تان روبه‌روی یک محیط باز و پارک باشد و هوای آزاد احساس کنید و آسمان را ببینید، خوب این‌ها در روحیهٔ شما اثر مثبتی می‌گذارد. در کلاس‌ها نور باید از سمت چپ به اتاق بتابد که انعکاس خاصی را در تخته ایجاد نکند و معلم به‌راحتی درس بدهد. خوب این چیزها اصلاً رعایت نمی‌شود. این مشکلات طبعاً به آموزش لطمه می‌زند. این‌ها ابزار آموزشی هستند که بسیار مهم‌اند. از جملهٔ این ابزار کتاب و حقوق کافی برای معلم است. معمولاً ازسوی شاگردان ممتاز، برای معلمی استقبال خوبی نمی‌شود. متأسفانه در ایران ما، در زمینهٔ آموزش و پرورش خوب سرمایه‌گذاری نمی‌کنند.



❖ یاسی‌پور: **درمورد این که فرمودید، دانش‌آموز به هوای آزاد، تفریح و این گونه مسائل نیازدارد، داستانی را درمورد علّامه حلّی نقل می‌کنند. چون می‌دانید که ما در تاریخ فرهنگی‌مان، کمتر کسی را سراغ داریم که لقب علّامه داشته‌باشد، به‌هرحال، علّامه حلّی جزو بزرگان ماست. می‌گویند که ایشان در سنّ**

هفت سالگی به درجهٔ اجتهاد رسیده بود و کسی از شهری آمده بود و سؤالی داشت، و گفته بودند که این سؤال را فقط علّامه حلّی می‌تواند جواب دهد. آن مرد وقتی به محله‌ای که علّامه زندگی می‌کرد، رسید، دید که چند تا بچه درحال خاک‌بازی هستند و از آنان پرسید که خانهٔ علّامه کجاست. یکی از بچه‌ها خانه‌ای را نشان داد، رفت و نشست تا علّامه بیاید، دید که یک بچهٔ هفت ساله آمد. همان بچه‌ای که خاک‌بازی می‌کرد. عبا و لباس رسمی خودش را پوشیده بود. گفت: «بفرمایید مسأله‌تان را مطرح کنید. گفت: «مسأله این است؛ ولی غیر از این که یک مسألهٔ دیگری برایم مطرح شد.» شما الان توی کوچه داشتید خاک‌بازی می‌کردید و چه‌طور آمده‌اید این‌جا.»

به‌هرحال، آن‌طور که شایسته و بایسته بود و در تاریخ نوشته‌اند پاسخ سؤال‌های او را هم داد. نقل می‌کنند که علامه فرمود: من بچه هستم و باید بازی کنم و به‌هرحال نیاز به بازی دارم.

❖ امیری: جناب استاد، آیا تاکنون در کلاس درس به مسأله‌ای برخورد کرده‌اید که حل آن را فراموش کرده یا برای اولین‌بار با آن برخورد کرده باشید؟ و در این صورت، چه برخوردی با آن مسأله و کلاس داشته‌اید؟

❂ من اولاً به بچه‌ها می‌گویم که وقتی می‌نویسم، هوای من را داشته باشید، چون من معمولاً اشتباه می‌کنم. این صداقت من باعث می‌شود که این سخن به دل آنان بنشیند. خیلی وقت‌ها هم شده گفتم که من این را نمی‌دانم، لااقل تا آن‌جایی که اطلاع دارم، خیلی در ارتباط نیستم. حالا اگر اصرار دارید یادداشت کنید و به من بدهید. من می‌روم بررسی می‌کنم. بله، برای من پیش آمده که به‌راحتی بگویم، نمی‌دانم؛ یعنی اصلاً سختم نیست که بگویم نمی‌دانم.

❖ یاسی‌پور: پس شما با این مطالب برخورد کرده، و به‌راحتی از کنار آنها گذشته‌اید. واقعیت این است که معلم نباید کاری کند که شاگرد احساس ضعف کند؛ چون بعضی اوقات ما دیده‌ایم معلمی دنبال این است که شاگرد را متحیّر کند؛ یعنی کاری کند که شاگرد خلّاقیت خود را فراموش کند و این، بدترین نوع تدریس است؛ یعنی معلم کاری کند که شاگرد احساس کند نمی‌تواند کاری انجام دهد. مثلاً یک مسألهٔ مشکل را با راه‌های عجیب‌وغریب مطرح می‌کند که به شاگرد نشان دهد که تو نمی‌توانی حل کنی؛ درحالی که به‌عکس باید باشد. باید مسأله را طوری تنظیم کند که بگوید می‌توانی حل کنی.

❖ امیری: اگر دانش‌آموزی با روش بهتر و کوتاه‌تر مسأله‌ای را حل کند، با او چه برخوردی می‌کنید؟ درضمن تا حالا پیش آمده است یا نه؟

❂ سر یکی از کلاس‌ها یک مسألهٔ حدی بود؛ حدّ سینوس یک عبارت رادیکالی منهای سینوس یک عبارت دیگر. من خودم وقتی این را حل می‌کردم، به حاصل‌ضرب تبدیل و آن را حل می‌کردم. یک‌بار یکی از شاگردان این کلاس گفت: آقا این هم‌ارزی رادیکالی که خود شما توصیه کردید، اگر این‌جا استفاده کنیم، به این سادگی حل می‌شود. من آن دانش‌آموز را تشویقش کردم.

مرحوم آذرنوش می‌فرمود: من به جرأت به شما می‌گویم که طی چهل سال، نه یک دقیقه دیر سر کلاس رفتم و نه یک دقیقه شاگرد را پیش از آن حدّی که باید سر کلاس باشد، نگه داشتم

خلاصه، این امور، مجموعاً در راستای آموزش است. من حتی معتقدم امتحان هم باید در راستای آموزش باشد و شما که امتحان می‌کنید، اگر واقعاً مسأله، گنگی دارد، باید برای همه یک راهنمایی کلی بکنید. چون به اعتقاد من آموزش، شامل مجموعهٔ تدریس و امتحان هم می‌شود.

❖ یاسی‌پور: بله، کاملاً صحیح است، معلم نباید به‌دنبال متحیر کردن شاگرد باشد. مولوی می‌گوید مشکل ما همین است:

طالب حیرانی مردم شدی
دست طَمَعْ اندر الوهیت زدی

می‌گوید اصلاً مشکل ما این است و اصلاً این شریک بودن با خداست؛ زیرا خداوند دلیل المتحیرین است، اصلاً ما در دعا داریم «یا دلیل المتحیرین»، خداوند راهنمای متحیرین است و کسی که طالب حیرانی مردم باشد، درواقع در کار خدا شرکت کرده و این خلاف است. معلم نباید دنبال این باشد و این خلاف آموزش است.

ادامه دارد

دکتر محمّد علی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران

اصل لانه کبوتری

مقدمه

یکی از روش‌های استدلال ریاضی که در اثبات مسائلی در ترکیبیات، نظریه و اعداد، هندسه و دیگر مباحث ریاضی استفاده می‌شود، اصل لانه کبوتری[1] است که گاهی اصل جعبه‌ها یا اصل حجره‌ها نیز نامیده می‌شود. دو صورت از این اصل در زیر آمده است:

۱. اگر m کبوتر n لانهٔ کبوتر را اشغال کنند و m>n، آن‌گاه حداقل یک لانه کبوتر دارای دو یا بیش‌تر کبوتر است.

۲. اگر $k+1$ شیء در k جعبه قرار گیرند، آن‌گاه جعبه‌ای وجود دارد که در آن حداقل دو شیء قرار دارد.

در این مقاله، به بررسی کاربردهای مختلفی از اصل لانه کبوتری می‌پردازیم. مسائلی که با استفاده از این اصل ثابت می‌شوند، در برخی موارد دارای راه‌حل‌های پیچیده‌ای به همراه ابتکار در حل هستند و در بسیاری از مسابقات ریاضی جهانی، مسائلی در این رابطه مطرح شده است. آنچه که در اثبات مسائلی که به کمک اصل لانه کبوتری انجام می‌گیرند قابل توجه است، آن است که در حل مسأله دو عامل کبوترها (اشیا) و لانه‌های کبوترها (جعبه‌ها) به طور مناسب انتخاب شوند؛ طوری که تعداد کبوترها حداقل یک واحد بیشتر از لانه‌ها باشد و سپس با استفاده از اصل لانه کبوتری، نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌آوریم.

کاربرد در ارتباط بین افراد

مثال ۱. دبیرستانی دارای ۱۰۲۵ دانش‌آموز است. آیا می‌توان گفت دو دانش‌آموز وجود دارند که حروف اول و آخر نام فامیلی آنان یکسان است؟

حل: با توجه به آن که حرف اول و آخر نام فامیل هر دانش‌آموز یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی است، لذا تعداد نام‌های مختلفی که می‌توان به دست آورد، برابر است با $۳۲ \times ۳۲ = ۱۰۲۴$. حال لانه‌های کبوترها را این ۱۰۲۴ حالت به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

۱۰۲۴		۳	۲	۱
ی ی	...	ا پ	ا ب	(الف)

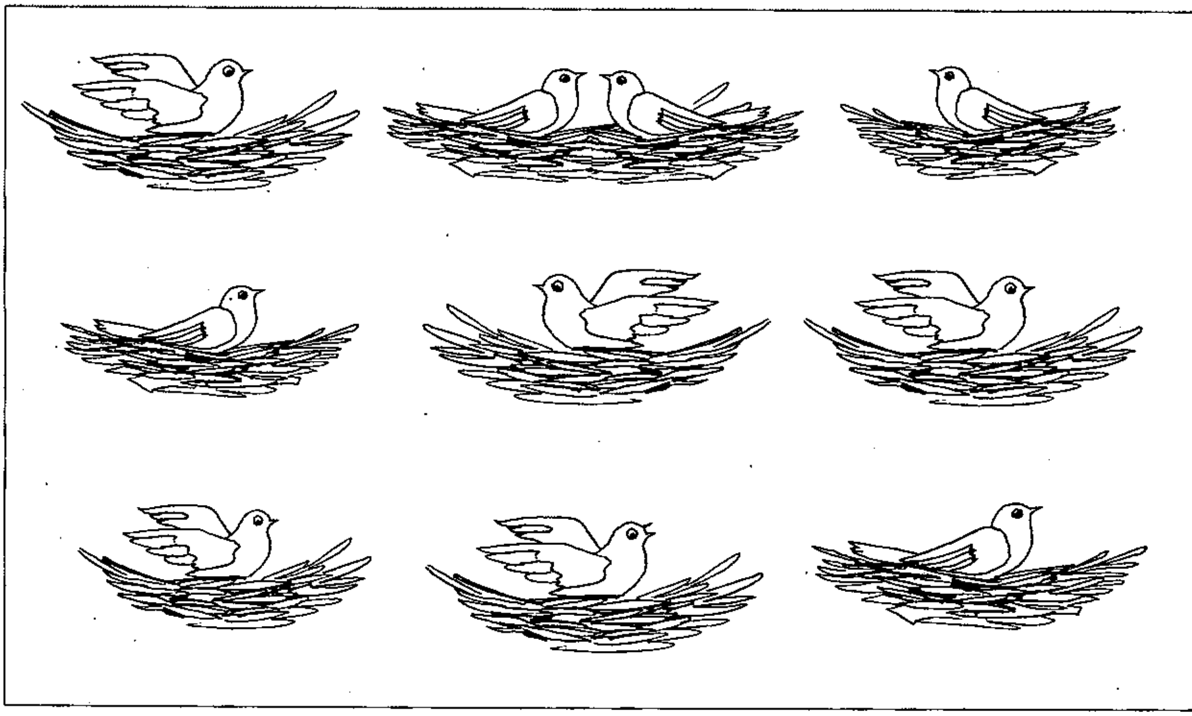
در هریک از این لانه‌ها دو حرف الفبا قرار دارد که به ترتیب حرف اول و آخر نام محصّلان است. حال اگر این ۱۰۲۵ محصل کبوترها فرض شوند، چون تعداد کبوترها یکی بیش‌تر از لانه‌های فوق است، بنابر اصل لانهٔ کبوتری، در یک لانه دو کبوتر قرار می‌گیرند و به عبارت دیگر، دو دانش‌آموز وجود دارند که دارای حرف اول و آخر نام فامیل یکسانی هستند.

مثال ۲. ثابت کنید در یک جمع $n > 1$ نفری، حداقل دو نفر وجود دارند که دارای تعداد دوستان یکسانی هستند.

برهان. اگر به هر کدام از این n نفر برگه‌ای بدهیم و بخواهیم تعداد دوستان خود، در این جمع را درون این برگه بنویسند، روی هر برگه یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ... و $n-1$ نوشته می‌شود. حال لانه‌های کبوتر را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

n		۳	۲	۱
$n-1$	...	۲	۱	۰

حال از این افراد می‌خواهیم برگهٔ خود را در لانهٔ متناظر عدد روی برگه قرار دهند. توجه می‌کنیم که لانه‌های ۱ و n نمی‌توانند همزمان دارای برگه‌ای باشند؛ زیرا اگر در این جمع کسی باشد که هیچ‌کس را نشناسد، ممکن نیست فردی باشد که همگی این افراد را بشناسد. بنابراین تنها $n-1$ لانه خواهیم داشت. در صورتی که این n نفر کبوترها باشند، ملاحظه می‌کنیم که بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو نفر شمارهٔ برگهٔ



یکسانی دارند؛ یعنی تعداد دوستان آنان برابر است.

کاربرد در نظریهٔ اعداد

مثال ۳. ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ ۶ عضوی مجموعهٔ $S=\{1,2,...,9\}$ شامل دو عضو است که مجموعشان ۱۰ است.

برهان. ۵ جعبه را به صورت زیر برچسب گذاری می‌کنیم:

۱ و ۹ برای جعبهٔ اول، ۲ و ۸ برای جعبهٔ دوم، ۳ و ۷ برای جعبهٔ سوم، ۴ و ۶ برای جعبهٔ چهارم و در نهایت ۵ برای جعبهٔ پنجم. حال ۶ عدد از مجموعهٔ S انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را درون جعبه‌هایی که همان برچسب را دارند، قرار می‌دهیم. اگر در این انتخاب ۵ باشد، پنج عدد دیگر انتخابی درون ۴ جعبه باقی‌مانده قرار می‌گیرند و بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از جعبه‌ها شامل حداقل دو عدد می‌شود که مجموع آن‌ها ۱۰ است. اگر در این انتخاب ۵ نباشد، ۶ عدد انتخابی باید درون ۴ جعبهٔ دیگر قرار گیرند و در این حالت نیز بنابر اصل لانه کبوتری، دو جعبه وجود خواهند داشت که شامل دو عدد با مجموع ۱۰ هستند.

مثال ۴. اگر ۱۱ عدد صحیح از مجموعهٔ $S=\{1,2,...,100\}$ انتخاب کنیم، نشان دهید حداقل دوتای آن‌ها چون x و y وجود دارند به طوری که $0<|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<1$.

برهان. می‌دانیم اگر $1\le x\le 100$، آن‌گاه $1\le\sqrt{x}\le 10$ و در نتیجه $1\le[\sqrt{x}]\le 10$. بنابراین $[\sqrt{x}]$ عددی در مجموعهٔ $\{1,2,...,10\}$ است. حال اگر ۱۱ عدد از مجموعهٔ S انتخاب کنیم، بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو تای آن‌ها نظیر x و y هستند که $[\sqrt{x}]=[\sqrt{y}]$. در این‌جا ۱۰ حالت عدد $[\sqrt{x}]$ شمارهٔ لانه‌های کبوتر و ۱۱ عدد انتخابی کبوترها هستند. لذا باید داشته باشیم: $0<|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<1$.

مثال ۵. نشان دهید اگر ۱۰۱ عدد صحیح از مجموعهٔ $S=\{1,2,...,200\}$ انتخاب شوند، دو عدد صحیح بین آن‌ها وجود دارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

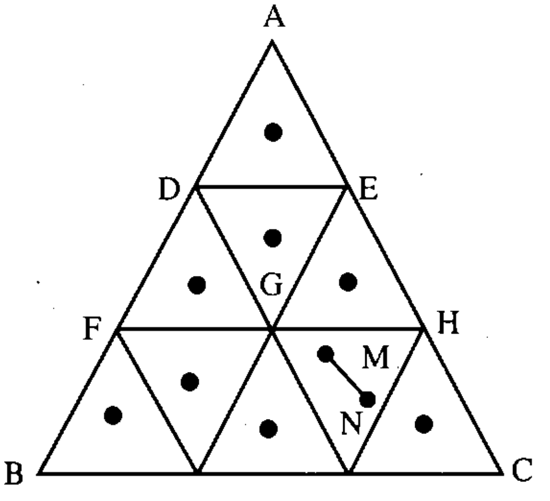
برهان. بنابر قضیهٔ اساسی حساب، هر عدد $n\in S$ را به طور منحصربه‌فردی می‌توان به شکل $n=2^k\times m$ که k عدد صحیح و نامنفی و m عدد مثبت فردی است، نوشت. اگر ۱۰۱ عدد از S انتخاب شوند، چون تنها ۱۰۰ عدد صحیح فرد در S وجود دارند، آن‌گاه بنابر اصل لانه کبوتری، دو عدد

صحیح در S چون n_1 و n_2 وجود دارند که $n_1 = 2^{k_1} \times m$ و $n_2 = 2^{k_2} \times m$ ، k_1 و k_2 اعداد صحیح و نامنفی هستند و $m \in \{1, 3, 5, \ldots, 199\}$. در این مثال، ۱۰۰ حالت عدد m برای لانه‌های کبوتر و ۱۰۱ عدد انتخابی به عنوان کبوترها درنظر گرفته می‌شوند. حال اگر $k_1 \geq k_2$ ، آن‌گاه $n_2 | n_1$ و در غیر این صورت $n_1 | n_2$.

کاربرد در هندسه

مثال ۶. ثابت کنید اگر ۱۰ نقطه درون مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ واحد انتخاب کنیم، حداقل دو تای آن‌ها فاصله‌ای کم‌تر از $\frac{1}{3}$ از هم دارند.

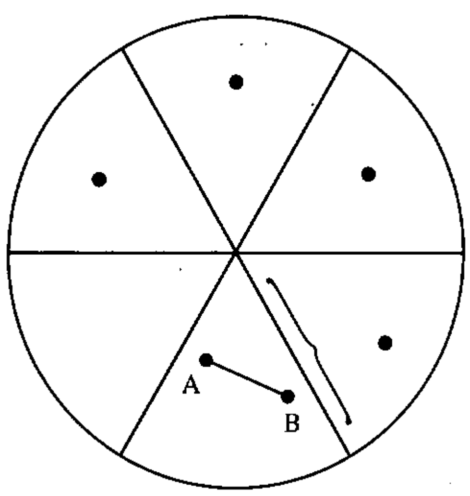
برهان. مطابق شکل زیر، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $AB = 1$ را به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{1}{3}$ تقسیم می‌کنیم؛



حال اگر ۱۰ نقطه درون این مثلث انتخاب کنیم، (نقاط کبوترها و مثلث‌ها لانه‌ها هستند.) بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دوتای آن‌ها نظیر M و N در یک مثلث قرار می‌گیرند، لذا فاصله‌ای کم‌تر از $\frac{1}{3}$ دارند $(MN < \frac{1}{3})$.

مثال ۷. با یک تفنگ ۷ عدد گلوله به سمت یک تخته تیراندازی دایره‌ای شکل به شعاع ۱۰ واحد شلیک می‌شوند. ثابت کنید دو گلوله وجود دارند که حداکثر ۱۰ واحد با یکدیگر فاصله دارند.

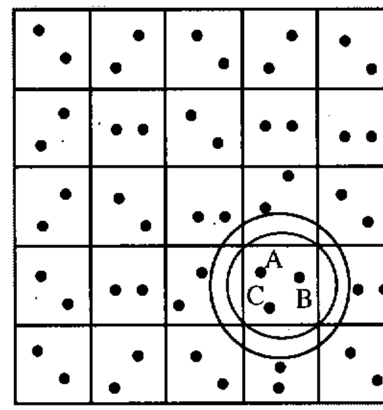
برهان. دایره را به ۶ قطاع مساوی طبق شکل مقابل تقسیم می‌کنیم.



هر قطاع را یک لانه کبوتر و هر گلوله را یک کبوتر می‌گیریم. بنابر اصل لانه کبوتری، قطاعی وجود دارد که دو گلوله چون A و B درون آن است. چون بزرگ‌ترین فاصلهٔ بین این دو نقطه ۱۰ است؛ یعنی $AB \leq 10$ ، لذا حکم ثابت می‌شود.

مثال ۸. تعداد ۵۱ نقطه در یک مربع به ضلع ۱ واحد قرار دارند. ثابت کنید دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{7}$ وجود دارد که شامل سه تا از این نقاط است.

برهان. مربع را مطابق شکل مقابل، به ۲۵ مربع به ضلع



$\frac{۱}{۵}$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت، باید در حداقل یکی از این لانه‌ها ۳ نقطه چون A، B و C باشد. در این حالت ۲۵ مربع کوچک لانه‌ها و ۵۱ نقطه کبوترها هستند. در صورتی که در هیچ کدام از لانه‌ها سه نقطه قرار نگیرد و به عبارت دیگر، در هر مربع کوچک، ۲ یا کم‌تر نقطه قرار گیرد، تعداد کل نقاط حداکثر $۲۵ \times ۲ = ۵۰$ خواهد بود؛ در حالی که مجموع تعداد نقاط باید ۵۱ باشد. حال دایره‌ای محیط بر مربع شامل این سه نقطه در نظر می‌گیریم. اگر r شعاع دایرهٔ محیطی مربع مفروض باشد، آن‌گاه:

$$r^۲ + r^۲ = \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow ۲r^۲ = \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow r = \frac{۱}{\sqrt{۵۰}} < \frac{۱}{\sqrt{۴۹}} = \frac{۱}{۷}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر می‌تواند $\frac{۱}{۷}$ باشد.

آخرین مثال از کاربرد اصل لانه کبوتری را به صورت زیر مطرح می‌کنیم:

مثال ۹. فرض کنید یک تیم فوتبال حداقل یک گل در هر ۲۰ بازی متوالی خود زده است. اگر این تیم در مجموع ۳۰ گل در این ۲۰ بازی بزند، ثابت کنید دنباله‌ای از بازی‌های متوالی وجود دارد که این تیم در این بازی‌ها دقیقاً ۹ گل زده است.

برهان. گیریم S_i مجموع تعداد گل‌های کسب شده در بازی‌های اول تا iام باشد $(۱ \le i \le ۲۰)$. مجموعهٔ $A = \{S_۱, \dots, S_{۲۰}, S_۱ + ۹, \dots S_{۲۰} + ۹\}$ را در نظر می‌گیریم. تمام اعضای A اعدادی صحیح و مثبت بین ۱ تا ۳۹ هستند. چون ۴۰ عضو در این مجموعه است، بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از اعداد دو بار در مجموعهٔ A ظاهر می‌شود. چون این تیم در هر بازی حداقل یک گل می‌زند، لذا برای هر $i \ne j$، $S_i \ne S_j$ و در نتیجه برای هر $i \ne j$، $S_i + ۹ \ne S_j + ۹$؛ بنابراین باید i و j وجود داشته باشد که $S_i + ۹ = S_j$ و $i < j$. بنابراین تعداد گل‌ها در بازی‌های $i+۱$ ام تا jام برابر است با: $S_j - S_i = ۹$

تمرین ۱. ثابت کنید در هر گردایه از ۳۱ عدد صحیح متمایز بین ۱ تا ۶۰، دو عدد وجود دارد که یکی دیگری را عاد می‌کند.

تمرین ۲. ثابت کنید اگر ۷ عدد متمایز از مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, \dots, ۱۱\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه مجموع دو تای آن‌ها ۱۲ است.

تمرین ۳. در یک جعبه، مدادهایی به شرح زیر وجود دارند: ۱۰ قرمز، ۸ آبی، ۸ سبز و ۴ زرد. با چشم بسته یکی یکی از این جعبه مداد خارج می‌کنیم. حداقل تعداد مدادهایی که باید برداریم تا مطمئن شویم حداقل ۴ مداد یک رنگ داریم، چند تا است؟

راهنمایی: برای هر رنگ یک لانه بگیرید.

تمرین ۴. ۱۱ عدد از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل دو تا از این اعداد انتخابی نسبت به هم اول‌اند.

راهنمایی: هر دو عدد متوالی را در یک لانه قرار دهید.

تمرین ۵. تعداد $n^۲ + ۱$ نقطه درون مربعی به ضلع واحد انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید دو تا از این نقاط وجود دارند که فاصلهٔ آن‌ها کم‌تر از $\frac{\sqrt{۲}}{n}$ است.

زیرنویس ....

۱. The Pigeon hole Principle

۴

اعداد فیبوناتچی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره:

در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، همچنین رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی کردیم، در ادامه مطلب باز هم دربارهٔ رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

اکنون دنبالهٔ vای را اختیار می‌کنیم که جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) است. این دنباله، آن‌چنان که قبلاً در بخش ۲ مقدمه خاطرنشان کرده‌ایم، به گونه‌ای یکتا توسط دو جملهٔ اول v_1 و v_2 اش تعریف شده است.

سپس دو ثابت c_1 و c_2 ای را چنان جست‌وجو می‌کنیم که:

$$c_1v'_1 + c_2v''_1 = v_1$$
$$c_1v'_2 + c_2v''_2 = v_2 \qquad (۱ . ۱۷)$$

به مجرد معین شدن c_1 و c_2 با استفاده از لم‌های ۱ و ۲، نتیجه می‌گیریم که $c_1v' + c_2v''$ برابر دنبالهٔ مفروض v است.

دستگاه معادلات (۱ . ۱۷) را، نظر به شرط (۱ . ۱۵) برای c_1 و c_2 و بدون توجه به مقدار اعداد v_1 و v_2، همواره می‌توان حل کرد؛ به‌خصوص به‌دست می‌آوریم.

$$c_1 = \frac{v_1v''_2 - v_2v''_1}{v'_1v''_2 - v''_1v'_1}, \quad c_2 = \frac{v'_1v_2 - v'_2v_1}{v'_1v''_2 - v''_2v'_2}$$

شرط (۱ . ۱۵) اطمینان می‌دهد که مخرج‌های دو کسر فوق مخالف صفرند. با قرار دادن مقادیر محاسبه‌شدهٔ c_1 و c_2 در (۱ . ۱۴) نمایش مطلوب دنبالهٔ v را به دست می‌آوریم.

به طور خلاصه، استدلال پیشین خاطرنشان می‌کند که برای تعیین جمیع جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) کافی است که تنها دو جواب از آن را بیابیم که متناسب نیستند.

دو جواب چنین را در میان تصاعدهای هندسی جست‌وجو می‌کنیم و بنا به لم ۱، می‌توانیم جست‌وجویمان را به تصاعدهایی محدود کنیم که جملهٔ اولشان برابر ۱ است؛ بنابراین تصاعد هندسی:

$$1,\ q,\ q^2,\ \cdots$$

را در نظر می‌گیریم. این تصاعد به عنوان جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) در نظر گرفته می‌شود؛ اگر و تنها اگر:

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

به ازای هر n برقرار باشد، یا با تقسیم معادلهٔ فوق بر q^{n-2}، اگر و تنها اگر:

$$1 + q = q^2 \qquad (۱ . ۱۸)$$

ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم، یعنی $(1+\sqrt{5})/2$ و $(1-\sqrt{5})/2$ قدر نسبت‌های تصاعدهای هندسی مورد جست‌وجو هستند. آن‌ها را به‌ترتیب با α و β نمایش می‌دهیم. باید تأکید کنیم که α و β، به‌عنوان ریشه‌های معادلهٔ (۱ . ۱۸)، در شرط‌های $1+\alpha = \alpha^2$، $1+\beta = \beta^2$ و $\alpha\beta = -1$ صدق می‌کنند.

به این طریق دو تصاعد هندسی به دست آورده‌ایم که

جواب‌های معادله‌های (۱ . ۱۳) اند؛ بنابراین تمام دنباله‌ها به صورت:

(۱۹ . ۱)

$$c_1+c_2,\ c_1\alpha+c_2\beta,\ c_1\alpha^2+c_2\beta^2,\ \cdots$$

نیز جواب‌های همین معادله‌اند.

از آن‌جا که دو تصاعدی که یافته‌ایم، قدر نسبت‌های متفاوت دارند، متناسب نیستند؛ درنتیجه فرمول (۱ . ۱۹)، با ثابت‌های دلخواه c_1 و c_2، جمیع جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) را به دست می‌دهد..

در حالت خاص، فرمول (۱ . ۱۹)، به ازای مقادیر مشخصی از c_1 و c_2 باید دنبالهٔ فیبوناتچی را به دست دهد. برای این کار، همان‌گونه که در بالا بیان کردیم، باید c_1 و c_2 را به عنوان جواب‌های یکتای معادله‌های:

$c_1+c_2=u_1$ و $c_1\alpha+c_2\beta=u_2$

یعنی جواب‌های دستگاه معادلات

$$c_1+c_2=1$$

$$c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

تعریف کنیم.

با حل این دستگاه برای c_1 و c_2، حاصل می‌کنیم:

$$c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\quad c_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

و از آن:

$$u_n=c_1\alpha^{n-1}+c_2\beta^{n-1}$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

یعنی:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (۱. ۲۰)$$

فرمول (۱. ۲۰) به نام یکی از ریاضیدانان که آن را کشف کرد، به فرمول بینه «Binet's formula» موسوم است.

واضح است که می‌توان فرمول‌هایی مشابه برای بعضی از جواب‌های (۱ . ۱۳) استخراج کرد. از خواننده می‌خواهیم این کار را در مورد هریک از دنباله‌های معرفی‌شده در بخش ۲ مقدمه انجام دهد.

۱۷ . ملاحظه کردیم که:

$$\alpha^2=\alpha+1$$

بنابراین آشکارا نتیجه می‌شود که هر توان دیگر α با نمای صحیح و مثبت را می‌توان به صورت $a\alpha+b$، با ضرایب صحیح a و bای، بیان کرد. به این ترتیب:

$$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha=\alpha+1+\alpha=2\alpha+1$$
$$\alpha^4=\alpha\alpha^3=2\alpha^2+\alpha=2\alpha+2+\alpha=3\alpha+2$$

و غیره.

اکنون با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که:

$$\alpha^n=u_n\alpha+u_{n-1}$$

قبلاً این گزاره را به ازای $n=2$ و $n=3$ محقق کرده‌ایم. در این صورت، فرض می‌کنیم:

$$\alpha^k=u_k\alpha+u_{k-1}$$
$$\alpha^{k+1}=u_{k+1}\alpha+u_k$$

با جمع دو معادلهٔ اخیر، به دست می‌آوریم:

$$\alpha^k+\alpha^{k+1}=(u_k+u_{k+1})\alpha+(u_{k-1}+u_k)$$

یا:

$$\alpha^{k+2}=u_{k+2}\alpha+u_{k+1}$$

و بنابراین مرحلهٔ استقرایی نیز برقرار می‌شود و اثبات کامل است.

به گونه‌ای مشابه، از $\beta^2=\beta+1$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\beta^n=u_n\beta+u_{n-1}$$

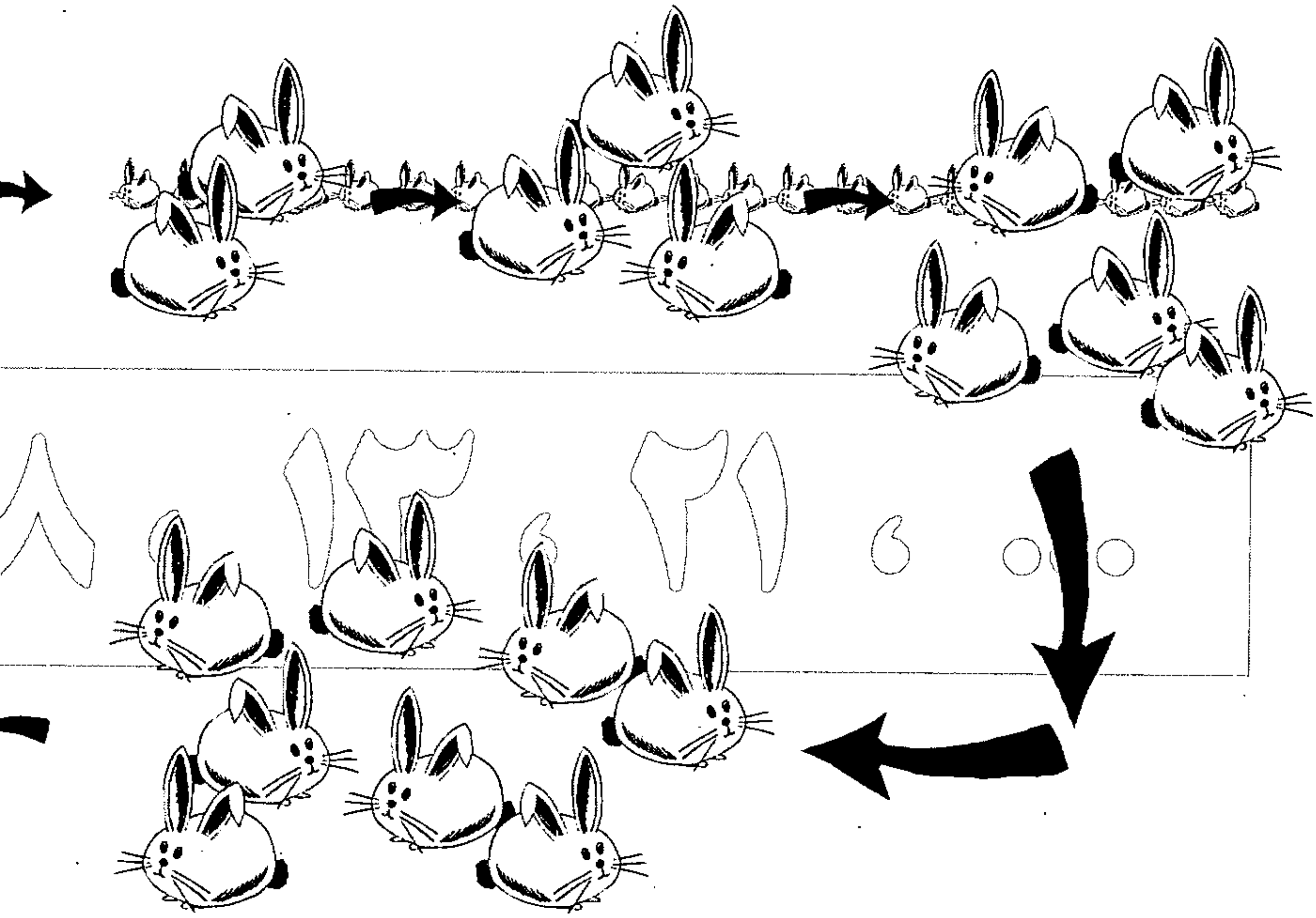
۱۸ . به کمک فرمول بینه، می‌توانیم مجموعه‌های گوناگونی را محاسبه کنیم که با اعداد فیبوناتچی مرتبط‌اند. به عنوان مثال، به محاسبهٔ مجموع زیر می‌پردازیم:

$$u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n}$$

داریم:

$$u_3+u_6+\cdots+u_{3n}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^6-\beta^6}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^3+\alpha^6+\cdots+\alpha^{3n}-\beta^3-\beta^6-\beta^{3n}\right)$$

یا، پس از محاسبهٔ مجموع‌های دو تصاعد هندسی



مشمول در معادلهٔ پیشین:

$$u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1}\right)$$

اما:

$$\alpha^3 - 1 = \alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha + \alpha + 1 - 1 = 2\alpha$$

و، مشابهاً:

$$\beta^3 - 1 = 2\beta$$

بنابراین:

$$u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\beta}\right)$$

یا، بعد از مقداری حذف:

$$u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \alpha^2 - \beta^{3n+2} + \beta^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{3n+2} - u_2\right) = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}$$

۱۹. اکنون به عنوان مثال دیگری از کاربرد فرمول بینه، به محاسبهٔ مجموع مکعبات n عدد اولیهٔ فیبوناتچی می‌پردازیم.

ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$u^3_k = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1}{5}\,\frac{\alpha^{3k} - 3\alpha^{2k}\beta^k + 3\alpha^k\beta^{2k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k\,\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5}\left(u_{3k} - (-1)^k 3u_k\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(u_{3k} + (-1)^{k+1} 3u_k\right)$$

بنابراین:

$$u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 = \frac{1}{5}((u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n}) +$$

$$+3(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1}u_n))$$

یا با استفاده از فرمول (۱ . ۶) و نتیجهٔ بخش پیشین:

$$u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 = \frac{1}{5}\left(\frac{u_{3n+2} - 1}{2} + (-1)^{n+1} 3u_{n-1} + 3\right)$$

$$= \frac{u_{3n+2} + (-1)^{n+1} 6u_{n-1} + 5}{10}$$

۲۰. اکنون موقع مناسب طرح این پرسش است که: سرعت رشد اعداد فیبوناتچی با افزایش اندیس‌های آن‌ها چیست؟

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ...

فرمول بینه به قدر کافی پاسخ کاملی به این پرسش می‌دهد. در این مورد می‌توان قضیهٔ زیر را به سادگی به اثبات رساند.

قضیه. n امین عدد فیبوناتچی، یعنی u_n، نزدیک‌ترین عدد صحیح به $\alpha^n / \sqrt{5}$، یعنی a_n، جملهٔ nام تصاعد هندسی‌ای است که جملهٔ اول آن $\alpha / \sqrt{5}$ و قدر نسبت آن برابر الف است.

اثبات. واضح است که در این مورد باید محقق کنیم که قدر مطلق تفاوت بین u_n و a_n، به ازای هر n، کم‌تر از ۱/۲ است. برای این مقصود، ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

گذشته از این، به خاطر می‌آوریم که $\beta = -0.618000\cdots$؛ بنابراین $|\beta| < 1$، در این صورت، به ازای هر n.

$$|\beta|^n < 1$$

و از آن‌جا که $\sqrt{5} > 2$.

$$|\beta|^n / \sqrt{5} < 1/2$$

به این ترتیب، قضیه به اثبات می‌رسد.

خوانندهٔ آشنا با نظریهٔ حدود، می‌تواند با دستکاری مختصری در اثبات این قضیه، ثابت کند که:

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - a_n| = 0$$

در این صورت، با استفاده از قضیهٔ هم‌اکنون به اثبات رسیده، محاسبهٔ اعداد فیبوناتچی با کمک ماشین حساب امکان‌پذیر است.

به عنوان نمونه، u_{14}، پاسخ مسألهٔ خرگوش‌های فیبوناتچی را محاسبه می‌کنیم. برای این کار، توجه می‌کنیم که:

$$\sqrt{5} = 2.2361, \quad \log\sqrt{5} = 0.34949$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180, \quad \log\alpha = 0.20898$$

$$\log\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \times 0.20898 - 0.34949 = 2.5762$$

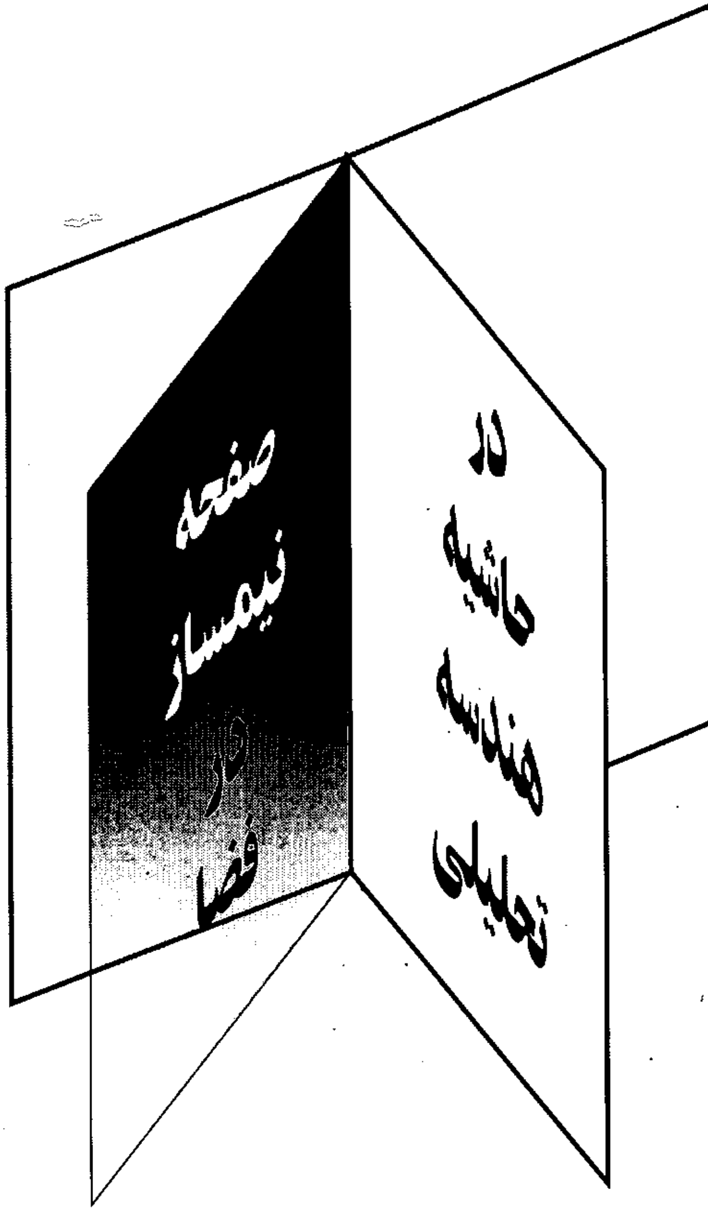
$$\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376.9$$

نزدیک‌ترین عدد صحیح به ۳۷۶.۹ عدد ۳۷۷ است؛

بنابراین $u_{14} = 377$.

روش مطرح شده در بالا، به زودی در مورد عددهای فیبوناتچی با اندیس‌های بزرگ، از کارایی می‌افتد؛ یعنی، دیگر نمی‌توانیم جمیع ارقام چنین عددی را با تکیه بر ماشین حساب محاسبه کنیم و تمام کاری که در این مورد می‌توانیم انجام دهیم، تعیین چند رقم اولیه است. بنابراین آشکار می‌شود که چنین محاسباتی تقریبی‌اند.

به عنوان تمرین، شما می‌توانید ثابت کنید که در دستگاه دهدهی، u_n، یعنی nامین عدد فیبوناتچی، به ازای $n \geq 17$، بیش‌تر از $n/4$ و کم‌تر از $n/5$ رقم ندارد. با این همه، پرسشی دیگر: u_{1000} دارای چند رقم است؟



برای دانش‌آموزان رشته ریاضی پیش‌دانشگاهی

میرشهرام صدر

هندسه تحلیلی، اجتماع هندسه و جبر است، در این بخش از ریاضی، مفاهیم هندسی را به صورت جبری یعنی با یک معادله تجزیه و تحلیل می‌کنیم. همچنین معادله‌های مشخص جبری را به صورت هندسی تعبیر می‌کنیم. برای مثال؛ مکان هندسی نقاطی را که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند، یک صفحه در فضا تعبیر می‌کنیم که از نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بر بردار $\vec{N} = (a, b, c)$ عمود است.

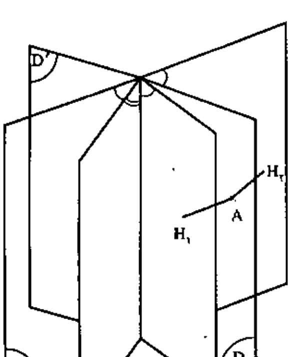
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

رسم نمودار معادله‌های جبری و یافتن معادله‌هایی برای شکل‌های هندسی مشخص، دو موضوع مهمی است که در هندسه تحلیلی دربارهٔ آن‌ها بحث می‌شوند.

در این مقاله به موضوع صفحه نیمساز در فضا و یافتن معادلهٔ جبری آن می‌پردازیم و بحث خود را به این سه بخش تقسیم می‌کنیم.

۱. صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه

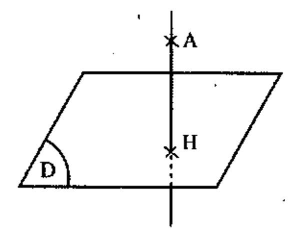
هرگاه $D: ax + by + cz + d = 0$ و $D': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادله‌های دو صفحه متقاطع باشند، مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه D و D' به یک فاصله باشند، دو صفحه متمایز است که صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه می‌باشند. برای یافتن معادله‌های صفحه‌های نیمساز، ابتدا فرض کنیم $A(x, y, z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی باشد که فاصلهٔ A تا دو صفحه D و D' برابر است؛ یعنی $AH = AH'$.



(شکل ۱)

در هندسه تحلیلی پیش‌دانشگاهی به‌عنوان یک تمرین ثابت کرده‌اید که فاصله نقطهٔ $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ تا صفحهٔ D به معادلهٔ $ax + by + cz + d = ۰$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + cz_۰ + d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} \qquad (۱)$$



(شکل ۲)

اکنون به کمک رابطه (۱) و این که $AH = AH'$ خواهیم داشت:

$$AH = AH' \Rightarrow \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{|a'x + b'y + c'z + d|}{\sqrt{a'^۲ + b'^۲ + c'^۲}}$$

که از این جا معادله‌های دو صفحه $D_۱$ و $D_۲$ (شکل۱) یعنی صفحه‌های نیمساز به دست می‌آید.

مثال ۱. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که از دو صفحه به معادله‌های زیر به یک فاصله باشند.

$D: ۴x - z + ۱ = ۰$

$D': ۲x - ۳y + ۲z - ۳ = ۰$

حل. دو صفحه D و D' متقاطع هستند و مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله باشند، همان صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه است.

$$\frac{|۴x - z + ۱|}{\sqrt{۱۷}} = \frac{|۲x - ۳y + ۲z - ۳|}{\sqrt{۱۷}}$$

$$\Rightarrow ۴x - z + ۱ = \pm(۲x - ۳y + ۲z - ۳)$$

معادله‌های صفحه‌های نیمساز عبارتند از:

$$\begin{cases} D_۱: ۲x + ۳y - ۳z + ۴ = ۰ \\ D_۲: ۶x - ۳y + z - ۲ = ۰ \end{cases}$$

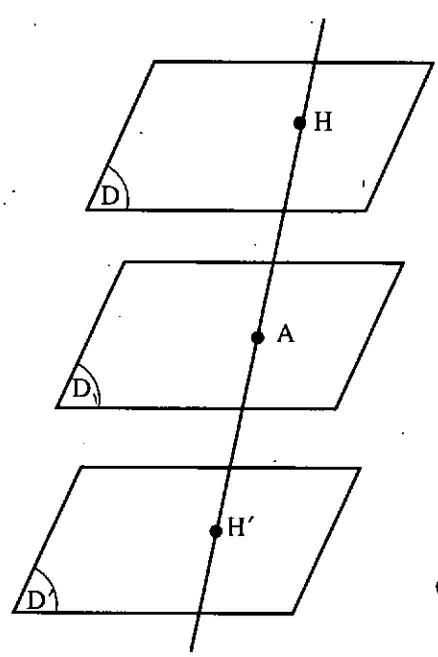
فعالیت ۱

در مثال قبل نقطهٔ دلخواه A را روی صفحه $D_۱$ و نقطهٔ دلخواه B را روی صفحه $D_۲$ در نظر بگیرید، سپس فاصلهٔ هریک آن از نقاط را تا دو صفحهٔ D و D' به دست آورید. نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه‌های $D_۱$ و $D_۲$ در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن‌ها را تا دو صفحهٔ D و D' محاسبه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۲. صفحه نیمساز دو صفحه موازی

دو صفحه موازی به معادله‌های $D: ax + by + cz + d = ۰$ و $D': ax + by + cz + d' = ۰$ را در نظر بگیرد. مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو صفحه به یک فاصله هستند، صفحه‌ای موازی با این دو صفحه است که درست در وسط دو صفحه موازی قرار دارد که آن را صفحه نیمساز دو صفحه موازی در نظر می‌گیریم. در این حالت معادلهٔ صفحه نیمساز برابر است با:

$$D_۱: ax + by + cz + \frac{۱}{۲}(d + d') = ۰ \qquad (۲)$$



(شکل ۳)

فعالیت ۲

دو صفحه موازی به معادله‌های $D: ax + by + cz + d = ۰$ و $D': ax + by + cz + d' = ۰$ را در نظر بگیرید و به کمک رابطه (۱)، درستی رابطهٔ (۲) را تحقیق کنید.

مثال۲. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که از دو صفحه بر معادله های زیر به یک فاصله باشد.

$D: 3x - y + 2z - 1 = 0$

$D': -6x + 2y - 4z - 10 = 0$

حل. دو صفحه با هم موازیند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{N} = (3,-1,2)\\ \vec{N'} = (-6,2,-4)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{N'} = -2\vec{N}$$

مکان هندسی فوق، صفحه‌ای است موازی با D و ′D به طوری که در وسط آن‌ها قرار دارد. برای یافتن معادلهٔ صفحهٔ نیمساز ابتدا بردارهای نرمال دو صفحه D و ′D را به یک صورت تبدیل کرده، سپس از رابطهٔ (۲) استفاده می کنیم.

دو طرف معادلهٔ خط ′D را بر ۲- تقسیم می کنیم،

$D': 3x - y + 2z + 5 = 0$

با مقایسه معادله های دو خط D و ′D و رابطه (۲) ملاحظه می‌کنیم که:

$a = 3$ و $b = -1$ و $c = 2, d = -1$ و $d' = 5$

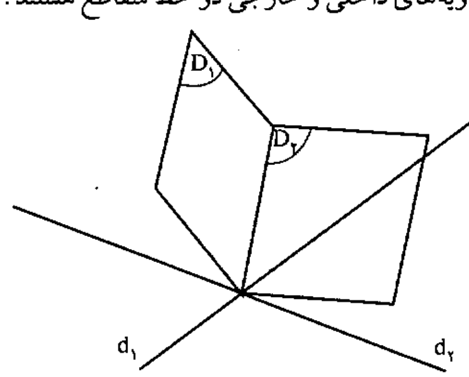
در نتیجه معادلهٔ صفحه نیمساز به صورت زیر است:

$$D_1: 3x - y + 2z + \frac{1}{2}(-1+5) = 0$$

$$\Rightarrow D_1: 3x - y + 2z + 2 = 0$$

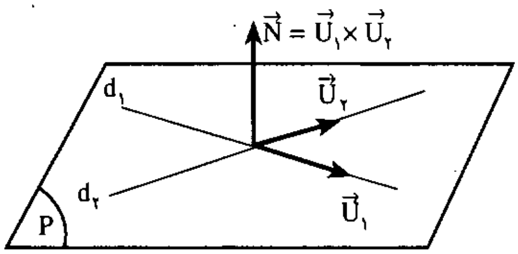
۳. صفحه نیمساز دو خط متقاطع در فضا

هرگاه d_1 و d_2 دو خط متقاطع در فضا باشند، مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو خط به یک فاصله باشند، دو صفحهٔ متمایز D_1 و D_2 است (شکل ۴) که صفحه‌های نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی دو خط متقاطع هستند.



(شکل ۴)

برای یافتن معادله های صفحه های نیمساز D_1 و D_2، ابتدا معادلهٔ صفحهٔ P را که شامل دو خط متقاطع است، پیدا می کنیم.

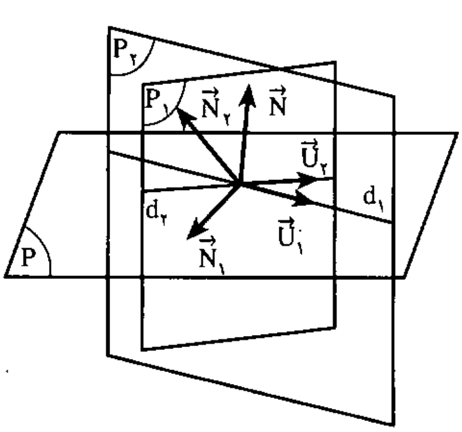


(شکل۵)

سپس معادله های دو صفحه P_1 و P_2 را که به ترتیب شامل خط های d_1 و d_2 و بر صفحهٔ p عمود هستند، محاسبه می‌کنیم. واضح است که d_1 و d_2 به ترتیب فصل مشترک دو صفحه P_1 و P_2 با صفحه p هستند. اگر $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ بردارهای نرمال دو صفحه P_1 و P_2 باشند و $\vec{N}$ بردار نرمال صفحه p و $\vec{U}_1$ و $\vec{U}_2$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 باشند، داریم:

$$\begin{cases}\vec{N}_1 \perp \vec{N}\\ \vec{N}_1 \perp \vec{U}_1\end{cases} \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{N} \times \vec{U}_1$$

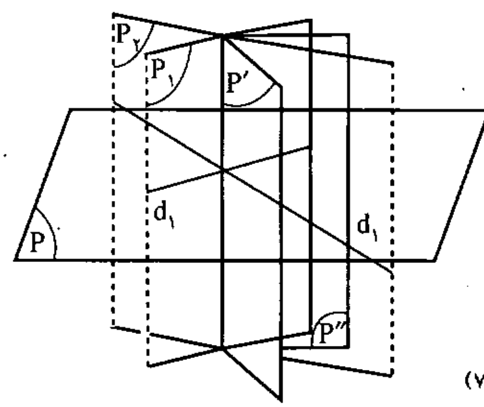
$$\begin{cases}\vec{N}_2 \perp \vec{N}\\ \vec{N}_2 \perp \vec{U}_2\end{cases} \Rightarrow \vec{N}_2 = \vec{N} \times \vec{U}_2$$



(شکل۶)

اکنون صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه P_1 و P_2 همان صفحه‌های نیمساز دو خط متقاطع d_1 و d_2 است.

در شکل (۷) دو صفحه P' و P'' صفحه‌های نیمساز دو خط d_1 و d_2 هستند



(شکل۷)

مثال: مکان هندسی نقاطی را از فضای R^3 بیابید که از دو خط به معادله‌های زیر به یک فاصله باشند؟

$$d_۱: \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z-۲}{-۱}$$

$$d_۲: \frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{-۲} = \frac{z}{۲}$$

ابتدا معادلهٔ صفحه p را به‌دست می‌آوریم که شامل دو خط متقاطع d_1 و d_2 است، برای این منظور بردار نرمال صفحه p را محاسبه می‌کنیم اگر $\vec{U}_۱$ و $\vec{U}_۲$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 و $\vec{N}$ بردار نرمال صفحه p باشند، داریم:

$$\begin{cases} \vec{N} \perp \vec{U}_۱ \\ \vec{N} \perp \vec{U}_۲ \end{cases} \Rightarrow \vec{N} = \vec{U}_۱ \times \vec{U}_۲$$

$$\Rightarrow \vec{N} = (2,1,-1) \times (1,-2,2)$$

$$\Rightarrow \vec{N} = (۰,-۵,-۵) \| (۰,۱,۱)$$

اکنون با در نظر گرفتن نقطهٔ دلخواه $A(1,0,0)$ روی خط d_2 و بردار نرمال $\vec{N}$، معادلهٔ صفحه p را می‌نویسیم:

$$P: 0(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow P: y+z=0$$

در این مرحله باید معادله‌های دو صفحه P_1 و P_2 را پیدا کنیم که شامل دو خط d_1 و d_2 هستند و بر صفحه p عمود می‌باشند، برای این منظور اگر $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ بردارهای نرمال دو صفحه به ترتیب P_1 و P_2 باشند، داریم:

$$\begin{cases} \vec{N}_1 \perp \vec{U}_1 \\ \vec{N}_1 \perp \vec{N} \end{cases} \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{N} \times \vec{U}_1$$

$$\Rightarrow \vec{N}_1 = (0,1,1) \times (2,1,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_1 = (-2,2,-2) \| (-1,1,-1)$$

$$\begin{cases} \vec{N}_2 \perp \vec{U}_2 \\ \vec{N}_2 \perp \vec{N} \end{cases} \Rightarrow \vec{N}_2 = \vec{N} \times \vec{U}_2$$

$$\Rightarrow \vec{N}_2 = (0,1,1) \times (1,-2,2)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_2 = (4,1,-1)$$

در این مرحله با نقطه دلخواه $B(2,-2,2)$ روی خط d_1 و بردار نرمال $\vec{N}_1$، معادلهٔ صفحهٔ P_1 و با نقطهٔ دلخواه $A(1,0,0)$ روی خط d_2 و بردار نرمال $\vec{N}_2$، معادلهٔ صفحهٔ P_2 را می‌نویسیم:

$$p_1: -x+y-z=-6$$

$$p_2: 4x+y-z=4$$

هم اکنون با داشتن معادلهٔ دو صفحه P_1 و P_2، معادله‌های صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین این دو صفحه را می‌نویسیم که این صفحه‌ها یعنی P' و P''، همان صفحه‌های نیمساز دو خط d_1 و d_2 هستند.

$$\frac{|-x+y-z+۶|}{\sqrt{۳}} = \frac{|۴x+y-z-۴|}{\sqrt{۱۸}}$$

$$P': \sqrt{6}(-x+y-z+6) = 4x+y-z-4$$

$$\Rightarrow P': (-۴-\sqrt{۶})x + (\sqrt{۶}-۱)y + (۱-\sqrt{۶})z + ۱۰ = ۰$$

$$P'': \sqrt{6}(-x+y-z+6) = -(4x+y-z-4)$$

$$\Rightarrow P'': (۴-\sqrt{۶})x + (۱+\sqrt{۶})y - (\sqrt{۶}+۱)z + ۲ = ۰$$

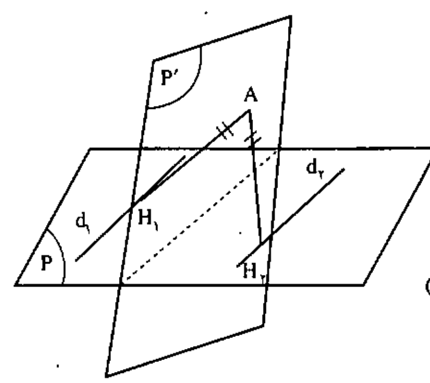
فعالیت ۳

در مثال قبل نقطهٔ دلخواه A_1 را روی صفحه P' و نقطهٔ دلخواه A_2 را روی صفحه P'' در نظر بگیرید، سپس فاصلهٔ

هریک از نقاط را تا دو خط d_1 و d_2 به‌دست آورید. نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه‌های P' و P'' در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن‌ها را تا دو خط d_2 و d_1 محاسبه کنید، به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۴. صفحه نیمساز دو خط موازی

دو خط موازی d_1 و d_2 را در نظر بگیرید، مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو خط به یک فاصله باشند، صفحه‌ای است عمود بر صفحه P (صفحهٔ شامل دو خط d_1 و d_2) و درست در وسط دو خط و موازی آن‌ها قرار دارد که به آن صفحه نیمساز دو خط موازی می‌گوییم. در شکل (۸) صفحه نیمساز دو خط موازی d_1 و d_2 یعنی صفحه P'، رسم شده است.



(شکل۸)

مثال. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که فاصلهٔ آن تا دو خط به معادله‌های زیر برابر باشند؟

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

$$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

حل. یادآوری: در هندسه تحلیلی پیش‌دانشگاهی آموخته‌ایم که برای محاسبه فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d، ابتدا نقطهٔ دلخواه A_0 را روی خط d در نظر می‌گیریم، سپس با فرض این‌که $\bar{U}$ بردار هادی خط d باشد، رابطهٔ زیر فاصله نقطهٔ A را از خط d مشخص می‌کند:

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{AA_0} \times \bar{U}\right|}{|\bar{U}|} \qquad (۳)$$

اکنون فرض کنیم $A(x,y,z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی نقاطی باشند که فاصله آن‌ها از دو خط موازی d_1 و d_2 برابر باشند، بنابراین طبق شکل (۸) داریم:

$$AH_1 = AH_2$$

اکنون برای محاسبه AH_1 یعنی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ از خط d_1، ابتدا نقطهٔ دلخواه $A_0(1,-2,0)$ را روی d_1 در نظر می‌گیریم، سپس به کمک رابطهٔ (۳) داریم:

$$\overrightarrow{AA_0} = (x-1, y+2, z) \ , \ \bar{u} = (1,-2,-1)$$

$$AH_1 = \frac{\left|\overrightarrow{AA_0} \times \bar{U}\right|}{|\bar{U}|}$$

$$= \frac{\left|(-y+2z-2, z+x-1, -2x-y)\right|}{\sqrt{6}}$$

همچنین برای محاسبه AH_2، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ از خط d_2، نقطهٔ دلخواه $A_1(0,1,-1)$ را روی d_2 در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{AA_1} = (x, y-1, z+1) \ , \ \bar{u} = (1,-2,-1)$$

$$AH_2 = \frac{\left|\overrightarrow{AA_1} \times \bar{U}\right|}{|\bar{U}|}$$

$$= \frac{\left|(-y+2z+3, z+x+1, -2x-y+1)\right|}{\sqrt{6}}$$

از آن‌جا که $AH_1 = AH_2$ و انجام عملیات جبری، معادلهٔ صفحه نیمساز دو خط موازی d_1 و d_2 به دست می‌آید:

$$P': 2y - 4z = 1$$

فعالیت ۴.

نقطه‌ای دلخواه روی صفحه P' در **مثال** قبل در نظر بگیرید و فاصلهٔ این نقطه را با استفاده از رابطهٔ (۳) تا دو خط d_1 و d_2 به‌دست آورید، سپس نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه P' اختیار کنید و فاصله‌های آن‌ها را تا دو خط d_1 و d_2 محاسبه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟



ماتریس وقوع گراف جهت دار

احسان یارمحمدی

هنگامی که درمورد نظریه گراف[1] گفت‌وگویی صورت می‌گیرد، بدون شک اوّلین مطلبی که به ذهن مخاطبان می‌رسد، این است که گراف‌ها اغلب به صورت یک مدل ریاضی هستند که در قالب یک **نمودار**[2] یا طرح هندسی به نمایش درمی‌آیند، ولی در عمل برای نمایش تصویری یک گراف بر روی کاغذ با مرتبه و اندازهٔ بزرگ که شامل نقاط و خطوط بسیار متعددی است، دچار مشکل می شویم. استفاده از ماتریس‌ها این مشکل را از بین می‌برد و کمک ارزنده‌ای را در درک بهتر گراف و مفاهیم در رابطه با آن‌ها به خوانده عرضه می‌کند.

از **جیمز ژوزف سیلوستر**[3] (۱۸۱۴-۱۸۹۷) ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی تبار، که نخستین مجلهٔ امریکایی مختص تحقیقات ریاضی را با نام American Journal of Mathematics بنیان نهاد و در پیشبرد نظریهٔ ماتریس‌ها[4] کارهای مهم و اساسی را انجام داد، می‌توان نام برد.

از اوایل سال‌های دههٔ سوم قرن بیستم میلادی، نگرشی جدید در سایهٔ یک نظم ریاضی که کاربرد فراوانی در زندگی روزمرهٔ دنیای مدرن داشت، بر نظریهٔ گراف ایجاد شد، که پیدایش و پیشرفت **رایانه**[5] و علوم مربوط به آن، زمینه را برای نمایان‌تر شدن کاربرد نظریهٔ گراف در عالم هستی فراهم کرد.

به هر گراف جهت دار $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p و اندازهٔ q می‌توان ماتریس‌های گوناگونی را که با نمودار گراف G در تناظر است، نسبت داد. یکی از این ماتریس‌ها، **ماتریس وقوع گراف جهت‌دار**[6] G بوده که موضوع این مقاله است؛ اما پیش از این که به این نوع از ماتریس‌ها و ویژگی‌های آن‌ها بپردازیم، لازم است که به برچسب گذاری در گراف‌ها اشاره داشته باشیم.

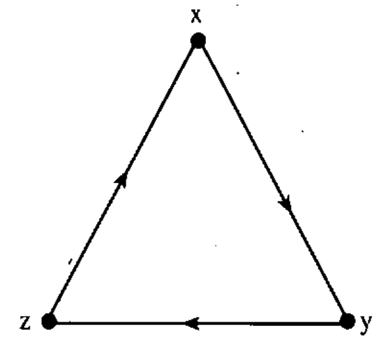
برای هر گراف $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p و اندازهٔ q که دارای مجموعه رأس‌های $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$ است، نموداری متناظر با ویژگی‌های گراف G می‌توان رسم کرد که در آن نمودار هر رأس از مجموعهٔ رأس‌های $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ و هر یال از مجموعه یال‌های $E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\}$ انتخاب شده است. این عمل را در اصطلاح، برچسب گذاری رأس‌ها و یال‌های گراف G می‌نامیم.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف جهت‌دار از مرتبهٔ p و اندازهٔ q باشد، ماتریس وقوع گراف جهت دار G را که با $M(G)$ نمایش می دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M(G)=[mij]_{p\times q} \text{ و } mij=\begin{cases} -1 & \text{اگر یال جهت دار } e_j \text{ از رأس } v_i \text{ خارج شود} \\ 1 & \text{اگر یال جهت‌دار } e_j \text{ بر رأس } v_i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر یال جهت دار } e_j \text{ بر رأس } v_i \text{ واقع نباشد} \end{cases}$$

تذکر: این تعریف به صورت دیگری هم مطرح می‌شود، به گونه‌ای که جای ۱ و ۱- در **بالا** عوض شود.

مثال. نمودار گراف جهت‌دار G=(V,E) شکل زیر است.

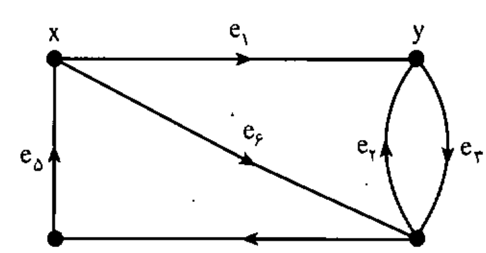


بنابراین ماتریس وقوع این گراف جهت‌دار به صورت

$$M(G)=\begin{array}{c} x\\ y\\ z\end{array}\begin{bmatrix} \overset{(x,y)}{-1} & \overset{(y,z)}{0} & \overset{(z,x)}{1}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

است.

مثال. نمودار گراف جهت‌دار G=(V,E) شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف جهت‌دار به صورت زیر است:

$$M(G)=\begin{array}{c} x\\ y\\ z\\ w\end{array}\begin{bmatrix} \overset{e_1}{-1} & \overset{e_2}{0} & \overset{e_3}{0} & \overset{e_4}{0} & \overset{e_5}{1} & \overset{e_6}{-1}\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ماتریس وقوع گراف جهت دار G=(V,E)

۱. ممکن است تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر باشد (مثال۱)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی باشد یا تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر نباشد (مثال۲)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مستطیلی باشد.

۲. چون در بررسی ماتریس وقوع گراف جهت‌دار موضوع بحث، از برچسب گذاری برای رأس‌ها و یال‌های گراف استفاده می‌کنیم، بنابراین درایه‌های ماتریس وقوع این گراف همواره ۰، ۱ و ۱- هستند.

اکنون که به ماتریس وقوع گراف جهت‌دار G و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف و ماتریس وقوع مربوط به آن، چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ ۱

گراف جهت‌دار G=(V,E) با درجهٔ ورودی $\text{In deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع M(G) است؛ به طوری که مجموع درایه‌های ۱ در سطر iام ماتریس M(G)، برابر با درجهٔ ورودی رأس v_i است.

برهان

هر عدد ۱ که در سطر iام وجود دارد، نشان می‌دهد که بر رأس v_i یک یال وارد شده است. بنابراین تعداد یک‌های سطر iام، برابر تعداد یال‌هایی است که بر رأس v_i وارد شده‌اند. در نتیجه، مجموع این یک‌ها، درجهٔ ورودی رأس v_i را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲

گراف جهت‌دار G=(V,E) با درجهٔ خروجی $\text{Out deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع M(G) است؛ به‌طوری که مجموع درایه‌های ۱- در سطر iام ماتریس M(G)، برابر با درجهٔ خروجی رأس v_i است.

برهان

هر عدد ۱- که در سطر iام وجود دارد، نشان می‌دهد که از رأس v_i یک یال خارج شده است. بنابراین تعداد منفی یک‌های سطر iام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس v_i خارج شده‌اند. در نتیجه، مجموع این منفی یک‌ها، درجهٔ خروجی رأس v_i را نشان می‌دهد

قضیهٔ۳

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p، دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه‌های یک سطرهای ماتریس $M(G)$ برابر $\sum_{i=1}^{p} \text{In deg}(v_i)$ است.

برهان

مجموع درایه‌های یک سطر iام ماتریس $M(G)$ برابر با درجهٔ ورودی رأس v_i است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های یک سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر با $\sum_{i=1}^{p} \text{In deg}(v_i)$ است.

قضیهٔ۴

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه‌های منفی یک سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر $\sum_{i=1}^{p} \text{Out deg}(v_i)$ است.

برهان

مجموع درایه‌های منفی یک سطر iام ماتریس $M(G)$، برابر با درجهٔ خروجی از رأس v_i است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های منفی یک سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر با $\sum_{i=1}^{p} \text{Out deg}(v_i)$ است.

قضیهٔ۵

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه‌های ستون jام ماتریس $M(G)$، برابر با صفر است.

برهان

هر عدد یک یا منفی یک که در ستون jام وجود دارد، نشان می دهد که به رأس v_i یک یال وارد یا از رأس v_i یک یال خارج شده است. بنابراین تعداد یک‌های ستون jام، برابر تعداد یال‌هایی است که به رأس v_i وارد شده‌اند و تعداد منفی یک‌های ستون jام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس v_i خارج شده‌اند. چون هر یال فقط به یک رأس وارد یا فقط از یک رأس خارج می‌شود، در نتیجه مجموع این یک‌ها و منفی یک‌ها برابر با صفر است.

آزمون۱. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است:

$$M(G)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array}\begin{bmatrix} (x,y) & (z,y) & (w,y) & (z,w) \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

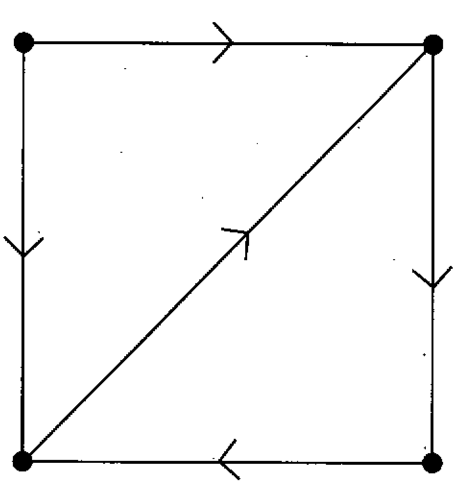
ماکزیمم درجهٔ ورودی رأس گراف G، کدام گزینه است؟

الف) x ب) y

ج) z د) w

جواب: گزینهٔ (ب) صحیح است؛ بنابر قضیهٔ ۱.

آزمون۲. تعداد درایه‌های یک ماتریس وقوع گراف جهت‌دار شکل زیر، کدام گزینه است؟



الف) ۱۰ ب) ۹

ج) ۵ د) ۴

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴.

آزمون۳. کدام‌یک از ماتریس‌های زیر، نشان‌دهندهٔ ماتریس وقوع گراف جهت‌دار است؟

الف) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

جواب: گزینهٔ (الف) صحیح است، بنابر قضیهٔ۵.

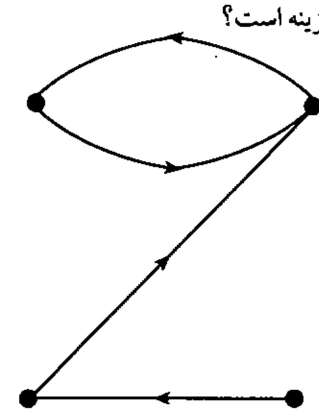
آزمون۴. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت: $M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ است. مجموع درجه‌های ورودی رئوس گراف G کدام گزینه است؟

الف) ۱۶ ب) ۱۲

ج) ۸ د) ۴

جواب: گزینهٔ (د) صحیح است؛ بنابر قضیهٔ۳.

آزمون۵. تعداد درایه‌های منفی یک ماتریس وقوع گراف شکل زیر، کدام گزینه است؟



الف) ۱۶ ب) ۱۷

ج) ۴ د) ۳

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است، بنابر قضیهٔ ۳.

آزمون۶. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است:

$$M(G)=\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array}\begin{bmatrix} \overset{(x,y)}{-1} & \overset{(y,w)}{0} & \overset{(x,w)}{-1} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

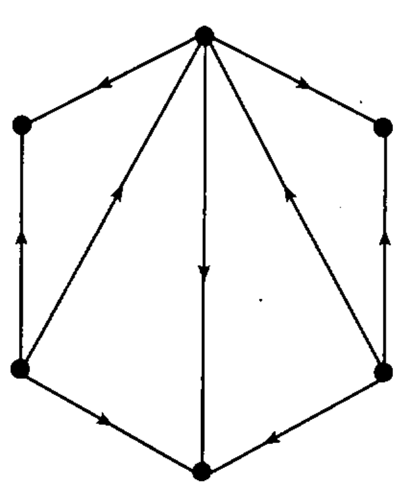
ماکزیمم درجهٔ خروجی رأس گراف G، کدام گزینه است.

الف) x ب) y

ج) z د) w

جواب: گزینهٔ (الف) صحیح است؛ بنابراین قضیهٔ ۲.

آزمون ۷. تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع گراف شکل زیر، کدام گزینه است؟



الف) ۴۵ ب) ۴۲

ج) ۴۸ د) ۳۶

جواب: گزینهٔ (د) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴.

آزمون۸ . ماتریس مجاورت[7] متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است :

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع گراف G، کدام گزینه است؟

الف) ۸ ب) ۱۲

ج) ۱۶ د) ۲۰

جواب : گزینهٔ (الف) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴ .

آزمون۹ . ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار Gبه صورت زیر است :

$$M(G)=\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\begin{bmatrix} \overset{(x,z)}{-1} & \overset{(z,x)}{1} \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

کدام گزینه بیانگر رأس ایزوله در گراف Gاست .

الف) w ب) z

ج) y د) x

جواب : گزینهٔ (ب) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۱ و ۲ .

آزمون ۱۰ . ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است :

$$M(G)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اندازهٔ گراف G ، کدام گزینه است؟

الف) ۱۰ ب) ۹

ج) ۵ د) ۴

جواب : گزینهٔ (ج) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴ .

تمرین

۱ . قضیه گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ با درجهٔ ورودی $In\ deg(v_i)$ و درجهٔ خروجی $Out\ deg(v_i)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به‌طوری که مجموع درایه‌های سطر iام ماتریس $M(G)$، برابر با $In\ deg(v_i) - Out\ deg(v_i)$ است .

۲ . آیا ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار شامل طوقه، G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q وجود دارد؟ استدلال خود را به تفصیل بیان کنید .

منابع

[۱] نظریهٔ گراف کلاسیک و مدرن، احسان یارمحمدی، انتشارات .

[۲] درآمدی بر نظریه گراف، رابین . ج . ویلسون، ترجمه : جعفر بی‌آزار، انتشارات دانشگاه گیلان .

[3] O.Ore, and R.J.wilson, Graphs and their uses, The Mathematical Association of America, 1990.

[4] R..p.Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, Addison-Wesley 1989.

زیرنویس

1.Graph Theory

2. Diagram

3. James Joseph silvester

4. Matrices Theory

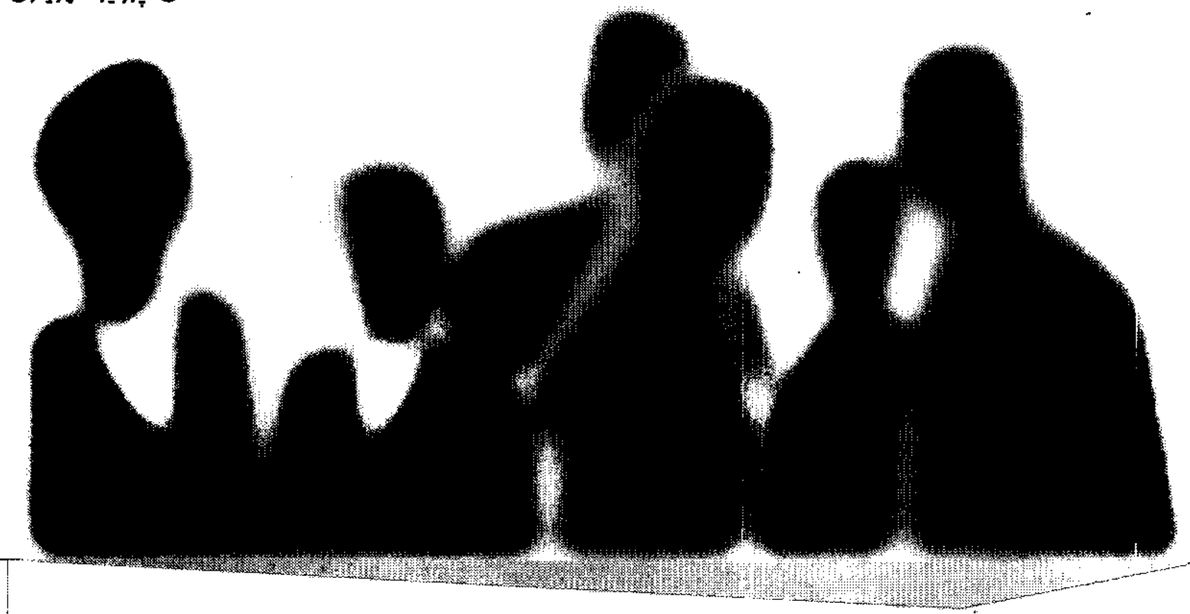
5. Computer

6. Incidence Matrix of a Directed Graph

7. Adjacency Matrix

۴

پرویز شهریاری

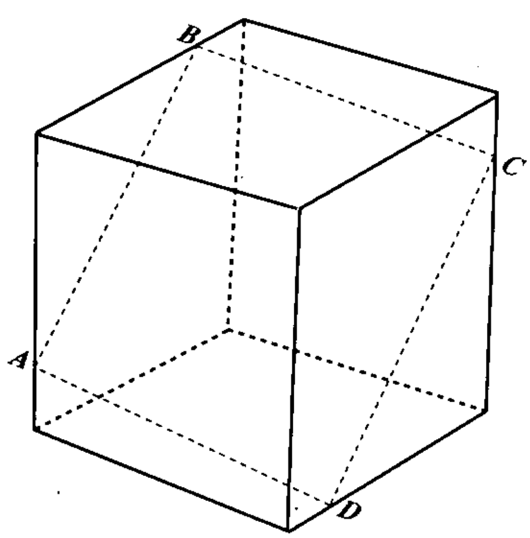


اتحادها و معادله ها

پیش از آن که به حل معادله و نامعادله بپردازیم، مسأله هایی را می‌آوریم و آن‌ها را حل می کنیم. برای حل این مسأله ها، هم از معادله یا دستگاه معادله ها استفاده کرده‌ایم و هم از نامعادله. درواقع، این مسأله ها باید با دقت در صورت آن ها و پیدا کردن رابطه‌ای که بین بخش‌های مختلف مسأله وجود دارد، حل می‌شود.

در آغاز به مسأله‌ای که به ظاهر عجیب است، توجه کنید: در زمان «آخرین برشویک سرباز» نوشتهٔ کارل چاپک، نویسندهٔ طنزپرداز چک، دیوانه‌ای وجود دارد که مدعی است در درون کرهٔ زمین، کرهٔ دیگری وجود دارد که به مراتب از کرهٔ زمین بزرگ‌تر است.

ما در این‌جا ادعای دیگری می کنیم که به ظاهر با ادعای «کارل چاپک» چندان تفاوتی ندارد و با وجود این، ادعای درستی است: در مکعب می‌توان تونلی ایجاد کرد که بتوان مکعب بزرگ‌تری را به آن وارد کرد.



چهارضلعی ABCD مربع است؛ زیرا دارای قطرها و ضلع هایی برابر است. نقطه های A، B، C و D، یال‌های مکعب اصلی را به نسبت ۳ : ۱ تقسیم می‌کنند. اگر ضلع

مکعب اصلی را واحد بگیریم، ضلع این مربع برابر می‌شود با:

$$\frac{۳}{۴}\sqrt{۲} \approx ۱/۰۶$$

در داخل این مربع می‌توان مربع دیگری ساخت که طول ضلع آن کوچک‌تر از AB و بزرگ‌تر از واحد، یعنی طول ضلع مکعب اصلی، باشد. همین مربع جدید را می‌توان مقطع تونل مورد نظر انتخاب کرد.

اکنون به سراغ مسأله‌هایی می‌رویم که برای حل آن‌ها، هم به معادله نیاز داریم و هم به نامعادله.

مسألهٔ ۱. کسری به صورت نسبت دو عدد طبیعی داریم که مخرج آن یک واحد از مجذور صورت آن کم‌تر است. اگر ۲ واحد به صورت و ۲ واحد به مخرج اضافه کنیم، کسری که به دست می‌آید، از $\frac{۱}{۳}$ بزرگ‌تر است. اگر هم از صورت و هم از مخرج ۳ واحد کم کنیم، کسر از $\frac{۱}{۱۰}$ کوچک‌تر می‌شود؛ ولی همچنان کسری مثبت باقی می‌ماند؛ این کسر را پیدا کنید.

حل: با فرض مثبت بودن m، کسر را برابر $\frac{m}{m^۲-۱}$ می‌گیریم. اگر به طور همزمان ۲ واحد به صورت مخرج اضافه کنیم، کسر حاصل از $\frac{۱}{۳}$ بزرگ‌تر می‌شود؛ یعنی:

$$\frac{m+۲}{m^۲+۱} > \frac{۱}{۳} \Rightarrow m^۲ - ۳m - ۵ < ۰$$

که پاسخ آن برای m عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ است. اگر از صورت و مخرج کسر اصلی ۳ واحد کم کنیم، کسری مثبت و کوچک‌تر از $\frac{۱}{۱۰}$ به‌دست می‌آید:

$$۰ < \frac{m-۳}{m^۲-۴} < \frac{۱}{۱۰}$$

که تنها m = ۴ (از جواب‌های پیش) در آن صدق می‌کند. بنابراین کسر مطلوب برابر $\frac{۴}{۱۵}$ است.

مسألهٔ ۲. سربازان را می‌توان به ترتیبی منظم کرد که در هر ردیف ۲۴ سرباز جا داده شود ولی معلوم شد همهٔ سربازان حاضر نیستند. بنابراین تجدید سازمان کردند؛ به‌نحوی که تعداد ردیف‌ها ۲ واحد کم‌تر و تعداد سربازان هر ردیف ۲۶ نفر بیش‌تر از تعداد جدید ردیف‌ها بود. مطلوب است تعداد سربازان؛ به‌شرطی که اگر همهٔ سربازان گروهان را جمع کنیم، بتوانیم آنان را طوری مرتب کنیم که تعداد سربازان هر ردیف با تعداد ردیف‌ها برابر باشد.

حل: اگر تعداد ردیف‌ها را در تنظیم اول N بگیریم، تعداد سربازان ۲۴N می‌شود. در تجدید سازمان، ردیف‌ها برابر N − ۲ است. چون در هر ردیف ۲۶ نفر بیش از تعداد ردیف‌ها، سرباز وجود دارد، تعداد سربازان هر ردیف N + ۲۴ می‌شود. معادله را چه‌طور باید تشکیل داد؟ آیا مسأله تنها یک جواب دارد؟

از جای روشنی آغاز می‌کنیم. در حالت دوم، یعنی ضمن تجدید سازمان، تعداد سربازان کم‌تر است؛ یعنی:

$$۲۴N > (N-۲)(N+۲۴)$$

نامعادله را ساده و منظم می‌کنیم:

$$N^۲ - ۲N - ۴۸ < ۰$$

جواب‌های این نامعادله $۸ > N > -۶$ است. خوب، بعد چی؟ به فرض مسأله توجه می‌کنیم. هنوز از تمامی فرض استفاده نکرده‌ایم. معلوم است که تعداد ردیف‌های N، باید درست و مثبت باشد؛ یعنی جواب N در محدودهٔ تنگ‌تری قرار می‌گیرد: $۸ > N > ۰$

پس N می‌تواند یکی از هفت عدد ۱ تا ۷ باشد.

اکنون اگر شرط آخر را دربارهٔ تعداد سربازان گروهان در نظر بگیریم (تعداد سربازان هر ردیف برابر است با تعداد ردیف‌ها)، به این نتیجه می‌رسیم که تعداد کل سربازان، یعنی ۲۴N باید مجذور کامل باشد.

اگر N را به ترتیب برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ بگیریم، روشن می‌شود که شرط اخیر تنها برای N = ۶ برقرار است که در این صورت، تعداد سربازان ۱۴۴ می‌شود.

به این ترتیب، بدون این که معادله‌ای تشکیل داده باشیم، توانستیم تنها جواب آن را پیدا کنیم.

مسألهٔ ۳. برای جابه‌جایی اسب‌ها از چند واگن استفاده کرده‌ایم و در هر واگن ۱۲ اسب جا دادیم. ولی وقتی معلوم شد باید تعداد کم‌تری اسب جابه‌جا شود، ۲ واگن را کنار گذاشتیم و در بقیهٔ واگن‌ها آن‌ها را جا دادیم. تعداد اسب‌ها در هر واگن عددی اول و به اندازهٔ ۱۴ عدد بیش‌تر از تعداد واگن‌ها در حالت جدید شد. تعداد اسب‌ها و واگن‌ها را در حالت اول پیدا کنید.

حل: از آن‌جا که در بار دوم ۲ واگن را کنار گذاشتیم، پس باید تعداد واگن‌های بار اول از ۲ بیش‌تر باشد. تعداد واگن‌ها را در بار اول، برابر N می‌گیریم: $N > 2$. بنابراین تعداد اسب‌ها در بار اول باید برابر ۱۲N باشد. بار دوم ۲ واگن کم کرده‌ایم و در هر واگن ۱۴ اسب بیش‌تر از تعداد واگن‌ها در حالت جدید قرار دادیم؛ زیرا روشن است بار اول بیش‌تر از بار دوم اسب داشته‌ایم؛ پس:

$$12N > (W-2)[(N-2)+14]$$

که پس از ساده کردن به صورت نامعادلهٔ:

$$N^2 - 2N - 24 < 0$$

درمی‌آید که جواب‌های آن $-2 < N < 6$ است و با توجه به شرط $N > 2$ باید داشته باشیم:

$$2 < N < 6$$

یعنی N می‌تواند یکی از عددهای ۳، ۴ و ۵ باشد، که تنها به ازای N = ۵ عدد N + ۱۲، عددی اول است.

پاسخ. در حالت اول ۵ واگن انتخاب کردیم؛ چون گمان می‌کردیم ۶۰ اسب داریم.

مسألهٔ ۴. چند گروه کارگر، لباس‌های کار خود را از انبار گرفتند؛ هر نفر دو دست. هر گروه روی هم ۲۰ دست لباس، بیش‌تر از تعداد گروه‌ها گرفت. اگر تعداد گروه‌ها ۴ واحد بیش‌تر بود و هر گروه ۱۲ دست لباس می‌گرفت، به همه لباس نمی‌رسید. چند دست لباس در انبار وجود دارد؟

حل: تعداد گروه‌ها را x و تعداد کارگران هر گروه را N می‌گیریم. چون هر گروه، ۲۰ دست لباس بیش‌تر از تعداد گروه‌ها لباس گرفته است و به هر کارگر هم ۲ دست لباس رسیده است، پس: $2N = x + 20$

اگر تعداد گروه‌ها ۴ واحد بیش‌تر، یعنی x + ۴ بود و هر گروه هم ۱۲ دست لباس می‌گرفت، روی هم:

$$12(x+4)$$

تعداد دست لباس می‌شد که مسأله گفته است به همه نمی‌رسید؛ یعنی از ۲Nx بیش‌تر می‌شد؛ بنابراین:

$$12(x+4) > 2Nx$$

به جای ۲N مقدارش x + ۲۰ را می‌گذاریم، به دست می‌آید:

$$12(x+4) > (x+20)x$$

که از مرتّب کردن آن به این نامعادله می‌رسیم:

$$x^2 + 8x - 48 < 0$$

سمت چپ این نامعادله تجزیه می‌شود و بنابراین جواب نامعادله به دست می‌آید:

$$(x+12)(x-4) < 0$$

که با توجه به مثبت بودن مقدار x به این جواب می‌رسیم:

$$0 < x < 4$$

یعنی x می‌تواند یکی از عددهای ۱ ، ۲ و ۳ باشد. ولی پیش از این داشتیم:

$2N = x + 20 \Rightarrow x = 2N - 20$

x عددی زوج است: $x = 2(N - 10)$ ، یعنی $x = 2$. تعداد گروه‌ها ۲ بوده است، از آن‌جا:

$2N = x + 20 = 22 \Rightarrow N = 11$

و تعداد دست لباس‌ها برابر $2Nx$ ، یعنی ۴۴ می‌شود.

مسألهٔ ۵. ۹۵ تومان سکه‌های ۵ و ۱۰ تومانی داریم که تعداد آن‌ها از ۱۴ تجاوز نمی‌کند. اگر به جای سکه‌های ۵ تومانی، سکه‌های ۱۰ تومانی و به جای ۱۰ تومانی، سکه‌های ۵ تومانی در اختیار داشتیم، مبلغ مجموع سکه‌ها از $\frac{2}{3}$ مبلغ اصلی بیش‌تر می‌شد. تعداد هر کدام از سکه‌های ۵ تومانی و ۱۰ تومانی را پیدا کنید.

حل: تعداد سکه‌های ۵ تومانی را n و ۱۰ تومانی را m می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 5n + 10m = 95 \\ m + n \le 14 \\ \frac{3}{2}(10n + 5m) \le 95 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول به دست می‌آید:

$n = 19 - 2m$

از نامعادلهٔ دوم، با در نظر گرفتن مقدار n به نتیجهٔ $m \ge 5$ می‌رسیم و از نامعادلهٔ سوم، با همان شرط برای n، به‌دست می‌آید: $m \ge \frac{76}{9}$. درضمن m نمی‌تواند از ۹ بیش‌تر باشد؛ چرا که در این صورت مبلغ کل از ۹۵ تومان بیش‌تر می‌شود.

پاسخ: $m = 9$ و $n = 1$ (۹ سکهٔ ۱۰ تومانی و یک سکهٔ ۵ تومانی).

مسألهٔ ۶. کاری را به یک تراشکار سفارش دادند. قرار شد ۹۰ قطعه از آن را استاد و ۳۵ قطعه را شاگرد انجام دهد. استاد ۳۰ قطعهٔ اول را با سرعتی دو برابر شاگرد خود انجام داد؛ ولی برای تهیهٔ ۶۰ قطعهٔ باقی‌مانده، سرعت کار خود را افزایش داد و هر ساعت دو قطعه بیش‌تر تهیه کرد و کار را دست‌کم یک ساعت بعد از شاگرد تمام کرد. ولی اگر ۳۰ قطعهٔ اول را با همان سرعت ۶۰ قطعه تهیه می‌کرد، کارش دست کم نیم ساعت بعد از شاگردش تمام می‌شد. شاگرد در هر ساعت چند قطعه تهیه می‌کند؟

حل: $x > 0$ را تعداد قطعه‌هایی می‌گیریم که شاگرد در هر ساعت آماده می‌کند. استاد ۳۰ قطعهٔ اول را با سرعتی ده برابر شاگرد خود کار می‌کند؛ یعنی آن‌ها را در $\frac{30}{2x}$ ساعت تمام می‌کند. او برای ۶۰ قطعهٔ دیگر، هر ساعت ۲ قطعه بیش‌تر کار می‌کند؛ یعنی ۶۰ قطعه را در $\frac{60}{x+2}$ ساعت تمام می‌کند. چون کار را دست‌کم یک ساعت بعد از شاگردش تمام می‌کند، این نابرابری را داریم:

$$\frac{30}{2x} + \frac{60}{2x+2} \ge \frac{35}{x} + 1 \qquad (1)$$

ولی اگر تمام قطعه‌ها را با همان سرعت آخر تهیه می‌کرد، دست‌کم نیم ساعت بعد از شاگردش از کار فراغت می‌یافت:

$$\frac{90}{2x+2} \ge \frac{35}{x} + \frac{1}{2} \qquad (2)$$

نامعادلهٔ (۱) به این صورت درمی‌آید (به یاد داشته باشیم که مخرج مشترک، یعنی $x(x+2)$ مقداری مثبت است):

$x^2 - 9x + 20 \le 0$

که جواب آن در این نابرابری صدق می‌کند:

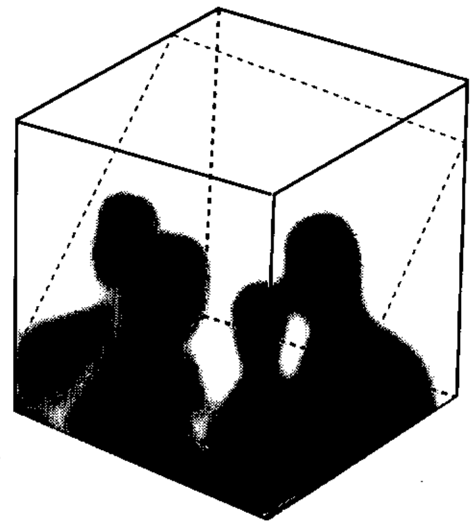
$4 \le x \le 5$

نامعادلهٔ (۲) به این صورت درمی‌آید:

$x^2 - 19x + 70 \le 0$

که جواب آن چنین است:

$5 \le x \le 14$



جواب مشترک این دو نامعادله $x = 5$ است.

پاسخ: شاگرد ساعتی ۵ قطعه می‌سازد.

مسألهٔ ۷ ـ الف. روی تخته سیاه این معادله نوشته شده است:

$$ax^2 - bx + c = 0$$

دو نفر با هم بازی می‌کنند. اولی ۳ عدد نام می‌برد دومی به دلخواه خود، این عددها را به جای a، b و c می‌گذارد. آیا اولی می‌تواند ۳ عدد نام ببرد که وقتی دومی آن‌ها را به جای a، b و c گذاشت (این که چه عددی را به جای a، چه عددی را به جای b و چه عددی را به جای c قرار دهد، به‌عهدهٔ دومی است؛ ولی باید از بین همان سه عددی باشد که اولی نام برده است)، معادله دارای ۲ ریشهٔ گویا شود یا دومی می‌تواند در کار او اخلال ایجاد کند؟

ب. روی تخته سیاه، این معادله نوشته شده است:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

بازیکن اول یک عدد نام می‌برد و بازیکن دوم آن را هرجا که مایل باشد، به جای یکی از ضریب‌های مجهول قرار می‌دهد. اولی عدد دیگری نام می‌برد و دومی آن را به جای یکی از دو حرف باقی مانده می‌گذارد. سرانجام اولی عددی به جای حرف سوم قرار می‌دهد. آیا اولی می‌تواند عددها را طوری انتخاب کند که معادله دارای ۳ ریشهٔ درست باشد؟

حل: الف. می‌تواند. بازیکن اول وقتی برنده می‌شود که برای a، b و c سه عدد متفاوت نام ببرد که مجموع آن‌ها برابر صفر باشد (مانند ۱، ۳- و ۲). در این صورت، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x_1 = 1$ و دیگری $x_2 = \frac{c}{a}$ خواهد بود.

ب) می‌تواند در این جا یکی از راه‌هایی را که بازیکن اول می‌تواند انتخاب کند، می‌آوریم. در آغاز عدد صفر را نام می‌برد. اگر دومی، عدد صفر را به جای c بگذارد، آن‌وقت معادله به صورت:

$$x^3 + ax^2 + bx = 0$$

درمی‌آید. سپس اولی عدد ۲ را نام می‌برد و هر جا که دومی این عدد را بگذارد، اولی در جای باقی‌مانده، عدد ۳- را پیشنهاد می‌کند. معادله به یکی از این دو صورت درمی‌آید:

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$x(x-1)(x+3) = 0$$

اگر دومی، صفر را به جای a قرار دهد، معادله چنین می‌شود:

$$x^3 + bx + c = 0$$

در این صورت اولی عدد $-(3\times4\times5)^2$ را نام می‌برد. اگر دومی آن را به جای b بگذارد، اولی برای c، عدد صفر را انتخاب می‌کند و اگر عددی را که اولی نام برده است، به جای c قرار دهد، اولی b را این مقدار انتخاب می‌کند:

$$b = 3^2\times4^2 - 3^2\times5^2 - 4^2\times5^2$$

در این صورت، معادلهٔ مفروض به یکی از این حالت‌ها بدل می‌شود:

$$x(x+3\times4\times5)(x-3\times4\times5) = 0$$

$$(x+3^2)\ (x+4^2)\ (x-5^2) = 0$$

سرانجام، اگر دومی صفر را به جای b قرار دهد، معادله چنین می‌شود:

$$x^3 + ax^2 + c = 0$$

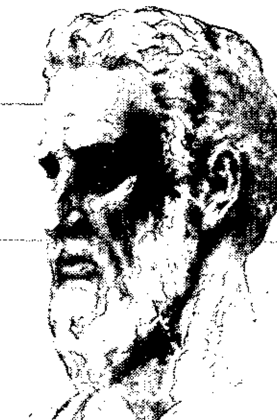
آن وقت، اولی عدد $6^2\times7^3$ را نام می‌برد و سپس برای a، عدد 7^2 یا برای c، عدد $6^8\times7^3$ را. در این صورت، معادله به یکی از این حالت‌ها تبدیل می‌شود:

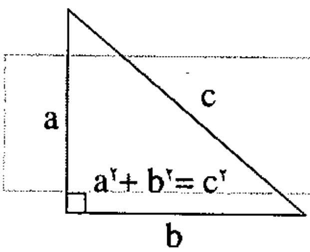
$$(x+2\times7)\ (x-3\times7)\ (x-6\times7) = 0$$

$$(x-3\times6^2\times7^2)\ (x+3\times6^2\times7^2)\ (x+6^3\times7^2) = 0$$

امیرسامان ساوه‌درودی

اثبات قضیهٔ فیثاغورس





مقدمه

در هندسهٔ اقلیدسی، قضیهٔ فیثاغورس اهمیت بسیار زیادی دارد؛ زیرا اساس تعریف فاصلهٔ بین دو نقطه است. این مسأله به قدری حائز اهمیت و شایان توجه است که هر فردی که درس هندسه را در مقطع دبیرستان به پایان می‌رساند، برخلاف سایر مفاهیم هندسی، این مفهوم را هیچ‌گاه فراموش نمی‌کند. در مقالهٔ حاضر، اثبات قضیهٔ فیثاغورس ارائه شده است. پیش از آن‌که به اثبات قضیه بپردازیم، نظر خوانندگان محترم را به نکاتی چند پیرامون قضیهٔ فیثاغورس جلب می‌کنیم:

الف. قضیهٔ فیثاغورس روی لوحی از شهر قدیم بابل مربوط به سال‌های ۱۶۰۰ تا ۱۹۰۰ پیش از میلاد کشف شد. نمی‌توان به‌طور دقیق ادعا کرد که آیا این فیثاغورس (۵۶۰-۴۸۰ پیش از میلاد) بود که قضیهٔ مزبور را ثابت کرد یا فرد دیگری از ریاضیدانان معاصر وی. عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است؛ به این مضمون: مثلثی که رابطهٔ $a^2 + b^2 = c^2$ میان ضلع‌های آن برقرار باشد، قائم‌الزاویه است.

ب. در کتابی تحت عنوان «جهان ریاضی»، ۳۶۷ راه‌حل برای اثبات رابطهٔ فیثاغورس ارائه شده است. این کتاب در سال ۱۹۶۸ تجدید چاپ گردید.

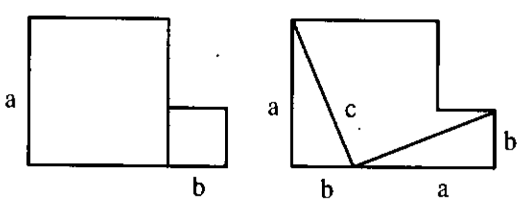
ج. قضیهٔ فیثاغورس را می‌توان به فضاهایی با ابعاد بسیار بسیار گسترده‌تر تعمیم داد. بعضی از صورت‌های تعمیمی آن در تصور نمی‌گنجد.

د. قضیهٔ فیثاغورس در مبحث مربوط به فاصلهٔ اقلیدسی و فضاهای هیلبرت و اقلیدسی، نقش مهمی در ریاضی ایفا می‌کند. بسیاری از مسائل و نکات ریاضی، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس قابل اثبات هستند.

ح. اگر طول سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اعداد صحیح باشند، رابطهٔ سه‌گانهٔ فیثاغورس در مورد طول اضلاع مصداق دارد.

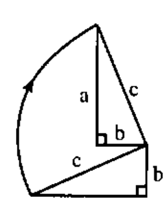
اثبات قضیهٔ فیثاغورس

ابتدا دو مربع به اضلاع a و b را در نظر بگیرید که در کنار یکدیگر قرار دارند. مساحت این دو مربع برابر است با $a^2 + b^2$ (شکل‌های ۲ و ۳). در شکل اولیه مثلثی نبود؛ ولی اکنون در این شکل دو مثلث رسم می‌کنیم. هر دوی آن‌ها دارای ضلع‌های a و b و وتری به نام c هستند. خط مشترک بین دو مربع حذف شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در این شکل که قدری عجیب به نظر می‌رسد، دو مثلث داریم:

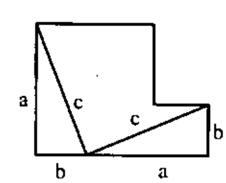


اکنون مثلث‌ها را به صورتی که شکل نشان می‌دهد، به اندازهٔ °۹۰ درجه می‌چرخانیم. مثلث سمت راست را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و مثلث سمت چپ را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم. همان‌گونه که نشان داده شده، شکل به‌دست آمده، مربعی است با ضلع‌های مجاور c و مساحت c^2.

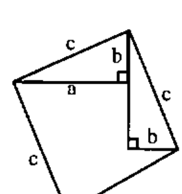
(۲)



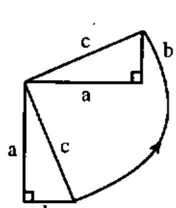
(۱)



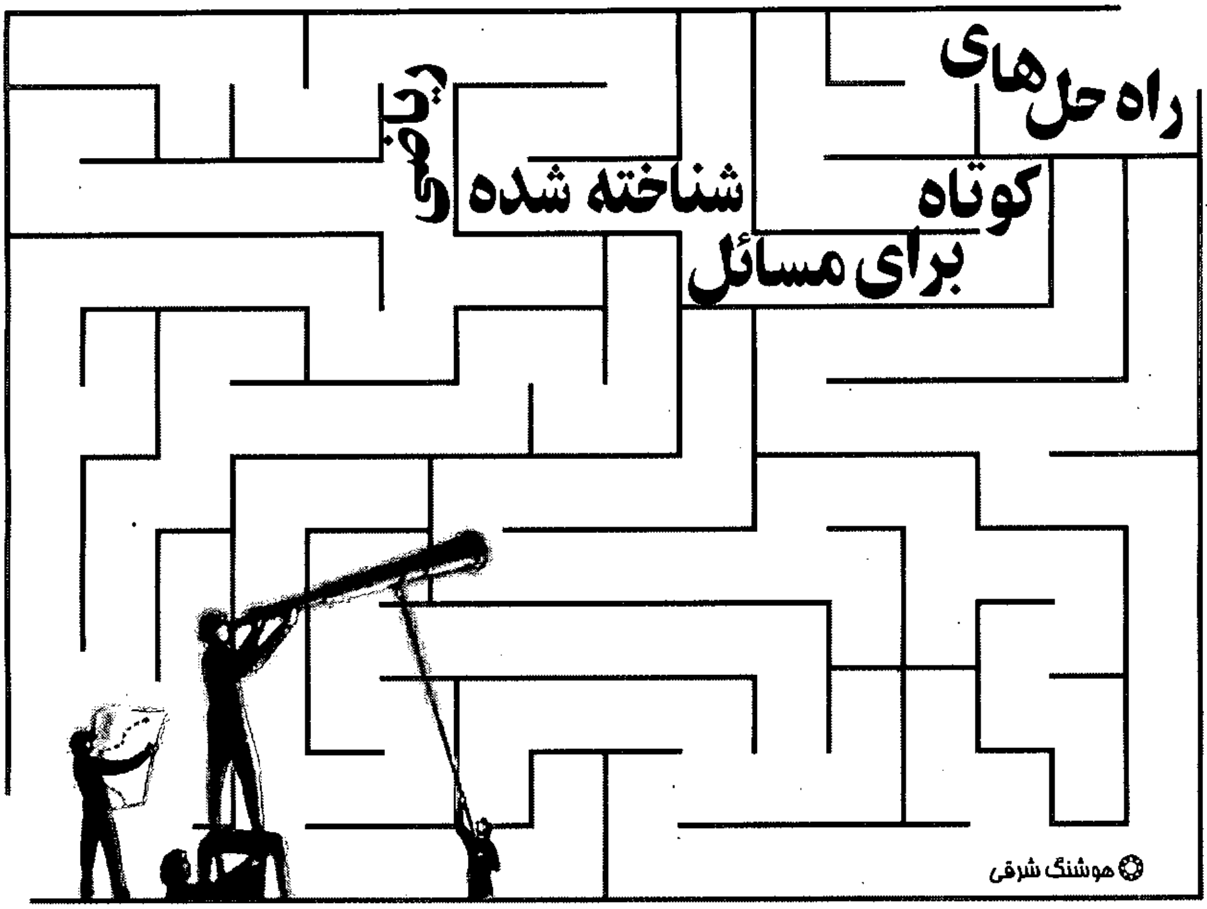
(۴)



(۳)



راه حل‌های کوتاه برای مسائل شناخته شده ریاضی

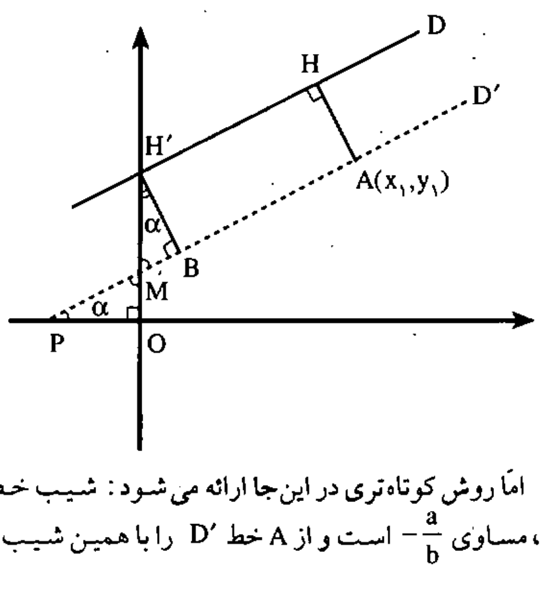


هوشنگ شرقی

بسیاری از مسأله‌های ریاضی را می‌توان با روش‌هایی ابتکاری و از راه‌هایی کوتاه‌تر از روش‌های معمولی حل کرد. توجه به این روش‌ها و اصولاً تلاش برای حل یک مسأله از چند راه مختلف می‌تواند باعث پرورش قوهٔ خلاقیت دانش‌آموز شود و از این حیث اهمیت خاصی دارد. در این‌جا سعی کرده‌ایم به نمونه‌هایی از این مسائل اشاره کنیم:

مثال ۱. (محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از یک خط در دستگاه مختصات دو بعدی)

دستور تعیین فاصلهٔ نقطهٔ معلوم $A(x_1, y_1)$ از خط به معادلهٔ $D: ax + by + c = 0$ را تقریباً همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی می‌دانند، امّا چگونگی به‌دست آوردن این دستور در بیش‌تر کتاب‌های درسی و کمک‌درسی به شیوه‌ای دشوار بیان شده است. ابتدا معادلهٔ خط راستی که از A عمود بر D رسم می‌شود را نوشته و سپس مختصات نقطهٔ برخورد این خط و D (نقطهٔ H) را یافته و از آن‌جا طول AH را به کمک دستور تعیین طول پاره‌خط، به‌دست می‌آوریم. این روش معمولاً با محاسبات زیاد و دشوار همراه است.



امّا روش کوتاه‌تری در این‌جا ارائه می‌شود: شیب خط D، مساوی $-\frac{a}{b}$ است و از A خط ′D را با همین شیب،

موازی D رسم می‌کنیم.

اگر نقطهٔ برخورد D و D' را با محور yها H' و M بنامیم و از H' عمود $H'B$ را بر D' (و بر D) رسم کنیم، بدیهی است که: $H'B = AH = h$ همچنین زاویه‌ای که خط D' با محور xها می‌سازد با زاویه‌ای که خط $H'B$ با محور yها می‌سازد برابر است:

$< P = \; < H' = \alpha$ (چرا؟)

حال برای یافتن OH' و OM کافی است که در معادله‌های D و D'، x را مساوی صفر قرار دهیم:

$$ax + by + c = ۰ \;,\; x = ۰ \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \Rightarrow OH' = -\frac{c}{b}$$

$$D' \text{معادله} : y - y_۱ = -\frac{a}{b}(x - x_۱) \;,\; x = ۰ \Rightarrow y = y_۱ + \frac{a}{b}x_۱ \Rightarrow$$

$$OM = y_۱ + \frac{a}{b}x_۱ \Rightarrow MH' = |OH' - OM|$$

$$= \left|-\frac{c}{b} - y_۱ - \frac{ax_۱}{b}\right| = \left|\frac{ax_۱ + by_۱ + c}{b}\right|$$

همچنین با توجه به شیب خط D واضح است که: $tg\alpha = -\frac{a}{b}$ و از آن‌جا داریم:

$$\cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱ + tg^۲\alpha}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \frac{a^۲}{b^۲}}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$\Delta MH'B:\; BH' = MH'.\cos\alpha$$

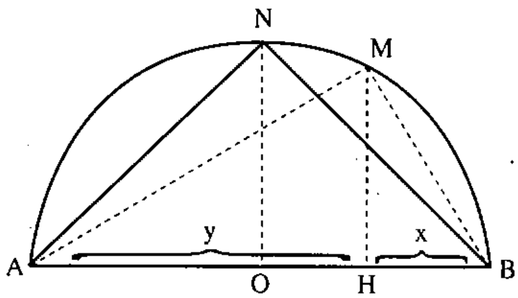
$$BH' = \left|\frac{ax_۱ + by_۱ + c}{b}\right| \times \frac{|b|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}}$$

مثال ۲. (اثبات نامساوی واسطه‌های حسابی ـ هندسی)

یکی از معروف‌ترین روابط نابرابری، نامساوی واسطه‌های حسابی ـ هندسی می‌باشد: برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، داریم $\frac{x + y}{۲} \geq \sqrt{xy}$.

اثبات این نابرابری به طریقهٔ جبری در کتاب‌های مختلفی ذکر شده است. در این‌جا یک راه‌حل سادهٔ هندسی برای آن ارائه می‌دهیم.



پاره‌خط AB را به طول x+y در نظر گرفته و نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم. بدیهی است که برای هر نقطهٔ دلخواه M روی محیط نیم‌دایره مثلث MAB در رأس M قائم‌الزاویه است (چرا؟) لذا اگر عمود MH را بر AB رسم کنیم، خواهیم داشت: $MH^۲ = AH.BH$ و یا $MH = \sqrt{AH.BH}$، بنابراین MH همواره واسطهٔ هندسی بین AH و BH است. حال اگر O وسط AB باشد، بدیهی است که: $ON = OA = OB = \frac{AB}{۲} = \frac{x + y}{۲}$

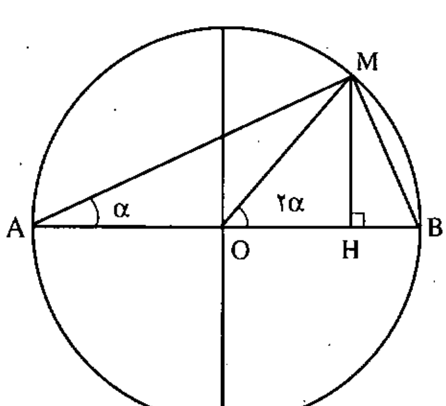
و در نتیجه ON نیز واسطه حسابی AH و BH است و بدیهی است که $ON \geq MH$ بنابراین: $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$

(سؤال: تساوی چه موقع اتفاق می‌افتد؟)

مثال ۳. درستی اتحاد مثلثاتی $tg\alpha = \frac{\sin ۲\alpha}{۱ + \cos ۲\alpha}$ را نشان دهید.

حل: باز هم از روش هندسی کمک می‌گیریم. در دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر می‌توان نوشت:

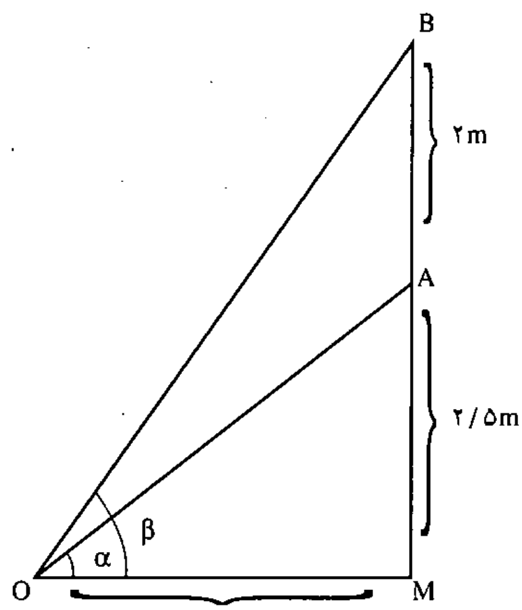
$$tg\alpha = \frac{MH}{AH} = \frac{MH}{OA + OH} = \frac{\sin ۲\alpha}{۱ + \cos ۲\alpha} \qquad \text{(چرا؟)}$$



تمرین: درستی اتحاد فوق را به روش مثلثاتی ثابت کنید. سپس درستی اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ را به روش هندسی نشان دهید.

مثال ۴. (اثبات قضیهٔ فیثاغورس)

برای قضیهٔ فیثاغورس اثبات‌های بسیاری ارائه شده است، امّا شاید از این اثبات کوتاه‌تر وجود نداشته باشد!



در شکل بالا مربع ABCD به ضلع a و مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ همنهشت AMB، BNC، CPD وAQD به اضلاع زاویهٔ قائمهٔ b و c رسم شده‌اند. شش‌ضلعی MBCPDQ را با مربع ABCD مقایسه کنید. این دو شکل در بخشی ABCPD مشترکند و قسمت‌های دیگر آنها نیز دو مثلث قائم‌الزاویهٔ هم‌مساحت هستند. بنابراین مساحت‌های آنها با هم برابر است. امّا شش‌ضلعی فوق از دو مربع به اضلاع b وc تشکیل شده است، بنابراین: $a^2 = b^2 + c^2$! این روش بسیار زیبا منسوب به فضل‌حاتم نیریزی ریاضی‌دان ایرانی قرن سوّم هجری می‌باشد.

مثال ۵. (اثبات دو رابطهٔ معروف در آنالیز ترکیبی)

رابطه‌های الف) $c(n,r)=c(n,n-r)$ و ب) $c(n,r-1)+c(n,r)=c(n+1,r)$ که دومی موسوم به اتحاد پاسکال می‌باشد، از مسائل کتاب ریاضیات سال دوّم رشته ریاضی می‌باشند. معمولاً برای اثبات آنها روش مستقیم به‌کار می‌رود که به‌خصوص در مورد دومی طولانی می‌باشد. امّا در این‌جا با استفاده از یک روش ساده موسوم به دوگانه شماری مسأله را به سادگی حل می‌کنیم. برای اثبات (الف) می‌گوئیم: مجموعه‌ای از n شئ مختلف را در نظر بگیرید. با انتخاب هر زیرمجموعهٔ r عضوی از این n شئ خودبخود یک زیرمجموعهٔ n-r عضوی در سوی دیگر تشکیل می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب r شئ از این n شئ معادل است با تعداد راه‌های انتخاب n-r شئ از n شئ یعنی: $c(n,r) = c(n,n-r)$ برای اثبات (ب) فرض کنید n+۱ شئ متمایز داشته و بخواهیم زیرمجموعه‌هایی r عضوی از آن انتخاب کنیم. بدیهی است که تعداد انتخاب‌های ما برابر است با: $c(n+1,r)$ امّا به طریقی دیگر می‌توانیم یکی از اشیاء (از n+۱ شئ) را جدا کنیم. در این صورت زیرمجموعه‌های r عضوی دو دسته هستند: دسته‌ای که شامل این شئ جدا شده نیستند و تعداد آنها برابر است با:

$c(n,r)$ (چرا؟) و دسته‌ای که شامل این شئ هستند و تعداد آن‌ها برابر است با: $c(n,r-1)$ (چرا؟) بنابراین داریم:

$$c(n,r)+c(n,r-1)=c(n+1,r)$$

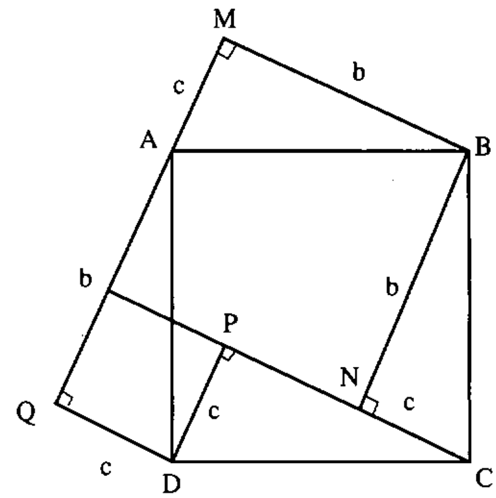
تمرین: اکنون دو شئ a وb را از n+۱ شئ جدا کنید و از آن‌جا ثابت کنید:

$$c(n+1,r)=c(n-1,r)+2c(n,r-1)+c(n-1,r-2)$$

آیا می‌توانید دستور بالا را به کمک اتحاد پاسکال ثابت کنید؟

مثال ۶. (حل یک مسأله بهینه‌سازی از حسابان)

یکی از مسائل معروف در کتاب حسابان سال سوم ریاضی (تمرین صفحهٔ ۱۵۹) چنین است: تابلویی که ۲ متر بلندی دارد بر دیواری نصب شده است. پایین تابلو ۲/۵ متر بالاتر از سطح تراز چشم یک ناظر است. ناظر در چه فاصله‌ای از دیوار بایستد تا زاویه‌ای که درچشم ناظر توسط تابلو تشکیل می‌شود، حداکثر باشد؟



راه‌حل معمول، استفاده از تابع هدف و بهینه‌سازی آن به کمک مشتق می‌باشد. اگر چشم ناظر را نقطهٔ o در نظر بگیریم، تابع هدف زاویهٔ $B\hat{O}A$ است. برای محاسبهٔ این زاویه بر حسب متغیر x (فاصلهٔ ناظر تا دیوار) می‌نویسیم:

$$\angle BOA = \angle BOM = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$$

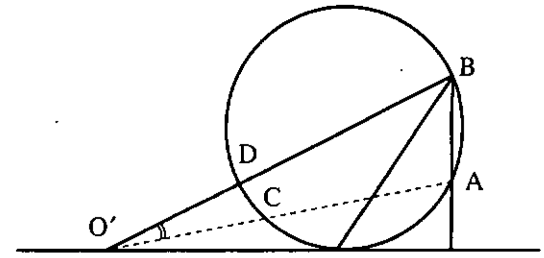
$$tg\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{۲/۵}{x} \ , \ tg\beta = \frac{MB}{OM} = \frac{۴/۵}{x}$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{Arctg}\frac{۲/۵}{x} \ , \ \beta = \text{Arctg}\frac{۴/۵}{x}$$

$$\Rightarrow \angle BOA = t = \text{Arctg}\frac{۴/۵}{x} - \text{Arctg}\frac{۲/۵}{x}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{-\frac{۴/۵}{x^۲}}{۱+\left(\frac{۴/۵}{x}\right)^۲} - \frac{-\frac{۲/۵}{x^۲}}{۱+\left(\frac{۲/۵}{x}\right)^۲} = ۰$$

و از حل معادلهٔ اخیر که محاسبات نسبتاً زیادی دارد نتیجه می‌شود: $x = \sqrt{۱۱/۲۵}$ امّا در کنار این راه حل، بد نیست که به راه‌حل هندسی زیبا و کوتاه این مسأله نیز اشاره شود.



مطابق شکل از نقاط A و B دایره‌ای می‌گذاریم که در نقطهٔ O بر سطح تراز مماس باشد. (چرا چنین دایره‌ای همواره قابل رسم است و طریقهٔ ترسیم آن چگونه است؟) حال اگر چشم ناظر در هر نقطه روی سطح تراز مانند O′ باشد، نتیجه می‌شود:

$$\angle O' = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

بنابراین برای آن‌که این زاویه ماکزیمم شود باید CD مساوی صفر باشد (زیرا کمان AB ثابت است) یعنی باید O′ بر O منطبق شود. از آنجا خواهیم داشت:

$$OM^۲ = MA.MB$$

$$\Rightarrow OM^۲ = ۲/۵ \times ۴/۵ = ۱۱/۲۵ \Rightarrow OM = \sqrt{۱۱/۲۵}$$

مثال ۷. (یک مسأله مشهور از تئوری اعداد)

«حاصل ضرب هر n عدد طبیعی متوالی همواره بر !n بخش‌پذیر است.»

برای اثبات این مسأله روش‌های مختلف وجود دارد که اغلب طولانی و دشوار هستند. امّا یک راه کوتاه برای اثبات این مسأله در زیر ارائه می‌شود: عددهای متوالی $a+1, a+2, \ldots, a+n$ را در نظر می‌گیریم، به سادگی می‌توان نوشت:

$$x = (a+۱)(a+۲)\ldots(a+n)$$

$$= \frac{۱\times۲\times۳\times\ldots\times a(a+۱)(a+۲)\ldots(a+n)}{۱\times۲\times۳\times\ldots\times a}$$

$$= \frac{(a+n)!}{a!} = \frac{n!(a+n)!}{n!a!} = n!\binom{a+n}{a} \Rightarrow n!|x$$

مثال ۸. (یک مسأله دیگر از تئوری اعداد)

یکی از قضایای مشهور در تئوری اعداد این است: $(a,b)=1 \Rightarrow (a^n,b^n)=1$ برای اثبات این قضیه از روش‌های گوناگون و از جمله قضیهٔ استقرای ریاضی استفاده شده است. امّا یک استدلال ساده چنین است:

اگر $(a,b)=1$ باشد، یعنی a و b نسبت به هم اول باشند، کسر $\frac{a}{b}$ تحویل‌ناپذیر است. بنابراین $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ نیز تحویل ناپذیر است، لذا $\frac{a^n}{b^n}$ تحویل‌ناپذیر است و در نتیجه: $(a^n,b^n)=1$.



اشاره

در شمارهٔ قبل ثابت کریم که مقطع مخروطی در حالت کلی دارای معادلهٔ $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ است، سپس دربارهٔ نوع مقطع مخروطی با توجه به ضرایب معادله بالا بحث کردیم، اینک در ادامه داریم:

مقطع مخروطی به معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

اکنون دستگاه محورهای مختصات را به اندازهٔ α دوران می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha\\ y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha\end{cases}$$

$$A(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)^2+2B(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)\times$$
$$(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+C(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2+$$
$$2D(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)+2E(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+F=0$$

اگر معادلهٔ مقطع مخروطی را در دستگاه جدید به صورت زیر فرض کنیم:

$$A_1X^2+2B_1XY+C_1Y^2+2D_1X+2E_1Y+F=0$$

و معادله‌ای که پس از دوران به دست آمده است، ساده کنیم و با معادلهٔ بالا مقایسه کنیم و متحد قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}A_1=A\cos^2\alpha+B\sin2\alpha+c\sin^2\alpha\\ C_1=A\sin^2\alpha-B\sin2\alpha+c\cos^2\alpha\end{cases}$$

اگر طرفین دو رابطهٔ بالا را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$A_1+C_1=A+C$$

یعنی با وجود آن که ضرایب X^2 و Y^2 و XY و X و Y در مقطع مخروطی تغییر کرده‌اند، مجموع $A+C$ در حالت تغییریافته نیز با A_1+C_1 برابر است. همچنین اگر مقدار Δ را در این حالت نیز حساب کنیم، با Δ در حالت اول برابر است. و خلاصه اگر مقدار $\delta=B^2-AC$ را و همچنین اگر

$$J=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}C & E\\ E & F\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A & D\\ D & F\end{vmatrix}$$

را در این حالت حساب کنیم، دوباره مقدارش با حالت اول برابر است. از این رو چهار مقدار ($I=A+C$ و $\delta=B^2-Ac$ و Δ و J)، «اینوار یا نتها یا تغییرناپذیرهای مقاطع مخروطی» نامیده می‌شوند که نقش مهمی در تعیین نوع مقطع مخروطی دارند. در معادلهٔ مقطع مخروطی که پس از

دوران به دست آورده‌ایم، اگر ضریب xy را صفر کنیم، یعنی: $(C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0$ ، خواهیم داشت:

$$2B\cos 2\alpha = (A-C)\sin 2\alpha \Rightarrow tg2\alpha = \frac{2B}{A-c}$$

اگر از فرمول بالا مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin 2\alpha = \pm\frac{2B}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}} \quad \cos 2\alpha = \pm\frac{A-C}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}$$

با توجه به مقادیر A_1 و c_1 که پس از دوران دستگاه پیدا کرده‌ایم و با توجه به مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ که در بالا محاسبه کردیم، خواهیم داشت:

$$A_1 - C_1 = \pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}$$

از طرف دیگر $A_1 - C_1 = A + C$ ، بنابراین داریم:

$$(A_1+C_1)^2 - (A_1-C_1)^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow (A+C)^2 - 4B^2 - (A-C)^2 = 4A_1C_1$$
$$(A+C)^2 - (A-C)^2 = 4B^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow 4AC - 4B^2 = 4A_1C_1$$
$$\Rightarrow A_1C_1 = AC - B^2 \quad , \quad A_1 + C_1 = A + C$$

ریشه‌های این معادله A_1 و C_1 هستند:

$$Z^2 - (A+C)Z + (AC - B^2) = 0$$

اکنون مثالی می‌زنیم تا کاربرد معادلهٔ بالا را مشاهده کنیم:

مثال: نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین و سپس آن را رسم کنید:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0$$

حل: اول باید ببینیم که مرکزدار است یا خیر:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 11 \\ 3 & 5 & -3 \\ 11 & -3 & 21 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = -704$$

چون $\Delta \neq 0$ است، پس مقطع مخروطی مرکزدار است. حال مختصات مرکز آن را پیدا می‌کنیم:

مرکز مقطع:

$$\omega \begin{vmatrix} f'_x = 0 \Rightarrow \\ f'_y = 0 \Rightarrow \end{vmatrix} \begin{cases} 10x + 6y + 22 = 0 \\ 6x + 10y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \end{vmatrix}$$

پس از آن که $x \to (x-4)$ و $y \to y+3$ تبدیل کنیم، معادلهٔ مقطع مخروطی به صورت‌های زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} 5x^2 + 6xy + 5y^2 + \frac{\Delta}{Ac - B^2} = 0 & (1) \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 + f(-4,3) = 0 & (2) \end{cases}$$

زیرا هر دو معادله یک حاصل را پدید می‌آورند:

$$f(-4,3) = -32$$

$$5x^2 + 6xy + 5y + \frac{-704}{25-9} = 0$$
$$\Rightarrow 5x^2 + 6xy + y^2 - 32 = 0$$

حال $\delta = B^2 - Ac$ را پیدا می‌کنیم:

$$\delta = B^2 - Ac = 9 - 25 \Rightarrow \delta = -16 < 0$$

چون $\Delta \neq 0$ است، پس مقطع مرکزدار و تجزیه‌نشده است و چون $\delta < 0$ است، مقطع از نوع بیضی است، حال برای پیدا کردن معادلهٔ بیضی در دستگاه قائم می‌توان به دو راه عمل کرد:

۱-

$$z^2 - (A+C)z + AC - B^2 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 16 = 0$$

$$(z-8)(z-2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z = 8 \\ z = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 = 8 \\ C_1 = 2 \end{vmatrix}$$

معادله در دستگاه قائم به صورت زیر است:

$$A_1x^2 + C_1y^2 - 32 = 0$$

$$8x^2 + 2y^2 - 32 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلهٔ بیضی در دستگاه قائم

همان‌طوری که مشاهده می‌شود، مقطع مخروطی بیضی قائم، است که به صورت زیر رسم می‌شود:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow o \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \; ; \; c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$A\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + a \end{vmatrix} \quad A'\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - a \end{vmatrix} \quad F\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + c \end{vmatrix} \quad F'\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - c \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} \alpha + b \\ \beta \end{vmatrix} \quad B'\begin{vmatrix} \alpha - b \\ \beta \end{vmatrix}$$

$$A\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix} \quad A'\begin{vmatrix} 0 \\ -4 \end{vmatrix} \quad F\begin{vmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \end{vmatrix} \quad F'\begin{vmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B'\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

راه دوم: اگر دستگاه مختصات را با توجه به $tg2\alpha = \frac{2B}{A-c}$ که از آن‌جا مقدار α به صورت زیر به دست

می‌آید، دوران دهیم، خواهیم داشت:

$$tg2\alpha = \frac{6}{5-5} = \frac{6}{0} \quad \text{تعریف نشده} \quad \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$$

یعنی به جای Y و X مقادیر جدیدی در معادلهٔ مقطع قرار می‌دهیم. داریم:

$$5\times\frac{2}{4}(X-Y)^2 + 6\times\frac{2}{4}(X^2-Y^2) + 5\times\frac{2}{4}(X+Y) - 32 = 0$$

$$5(X-Y)^2 + 6(X^2-Y^2) + 5(X+Y)^2 - 64 = 0$$

$$\Rightarrow 10(X^2+Y^2) + 6(X^2-Y^2) = 64$$

$$5X^2 + 5Y^2 + 3X^2 - 3Y^2 = 32 \Rightarrow 8X^2 + 2Y^2 = 32$$

$$\Rightarrow \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

یعنی همان معادلهٔ بیضی قائمی که در بالا به دست آوردیم و رسم کردیم. گفتیم معادلهٔ کلی مقاطع مخروطی به صورت ضمنی به شکل زیر است:

$$Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey = F = 0$$

حال اگر این معادله را بر حسب y مرتب و حل کنیم، معادلهٔ صریح مقطع مخروطی به دست می‌آید. یعنی:

$$Cy^2 + 2(Bx+E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0$$

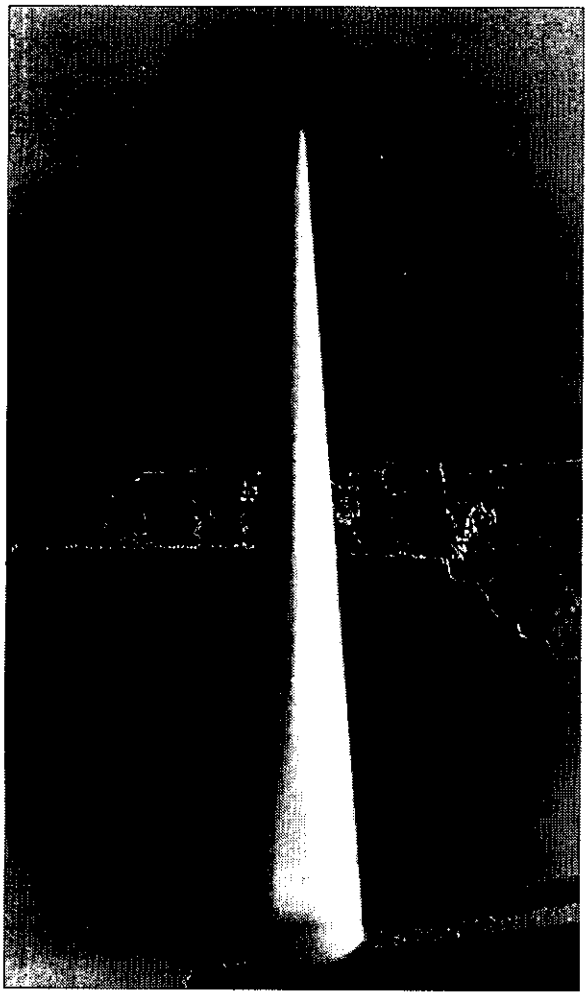
$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(Bx+E)^2 - c(Ax^2+2Dx+E)}}{C}$$

چون زیر رادیکال را مرتب کنیم، داریم:

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(B^2-AC)x^2 + 2(BE-DC)x + E^2 - CE}}{C}$$

باز می‌توان بحث گذشته را روی مقطع صریح بالا پیاده کرد. این مقطع مخروطی وقتی می‌تواند یکی از مقاطع مخروطی چهارگانهٔ حقیقی باشد که، زیر رادیکال مجذور کامل نباشد و در ضمن دلتای زیر رادیکال بزرگ‌تر از صفر باشد. یعنی $(BE-DC)^2 - (B^2-Ac)(E^2-CE) > 0$ باشد.

و اگر زیر رادیکال مجذور کامل باشد، معادلهٔ دو خط را



داریم و اگر زیر رادیکال منفی باشد، یا دلتای زیر رادیکال منفی باشد، مقاطع مخروطی موهومی خواهیم داشت. حال اگر فرمول بالا را به صورت ساده‌تر بنویسیم، داریم:

$$y = -\underbrace{\frac{B}{C}}_{a}x - \underbrace{\frac{E}{C}}_{b} \pm \sqrt{\underbrace{(\frac{B^2-Ac}{C^2})}_{a'}x^2 + \underbrace{\frac{2(BE-DC)}{C^2}}_{b'}x + \underbrace{\frac{E^2-CE}{C^2}}_{c'}}$$

درنتیجه داریم: $y = ax + b \pm \sqrt{a'x^2 + b'x + c'}$ (به فرض این که زیر رادیکال مثبت باشد.)

۱. اگر $a' > 0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی هذلولی است.

۲. اگر $a' < 0$ و $a' \neq -1$ آن‌گاه، مقطع بیضی است.

۳. اگر $a' = -1$ و $a = 0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی دایره است.

۴. اگر $a' = 0$ آن‌گاه، مقطع مخروطی سهمی است.

۵. اگر زیر رادیکال مجذور کامل باشد آن‌گاه مقطع مخروطی به یک جفت خط تبدیل می‌شود.



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
بانک اطلاعات کتاب های آموزشی
طرح سامان بخشی کتاب های آموزشی با هدف به روز رسانی اطلاعات، از طریق منابع اطلاع رسانی به معرفی کتاب های آموزشی مناسب ویژهٔ دانش آموزان و معلمان می پردازد.
پایگاه اطلاع رسانی سامان کتاب
www.samanketab.com
کتابنامه رشد:
معرفی کتاب های آموزشی مناسب در پایان کتاب های درسی.
ریاضی
آموزش حرفه وفن
سال سوم
فارسی
دوم دبستان
تعلیمات اجتماعی
تهران: خیابان کریم خان زند
خیابان ایرانشهر شمالی
ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش
دفتر انتشارات کمک آموزشی
دبیرخانه طرح سامان بخشی کتاب های آموزشی
تلفن: ۸۳۰۶۰۷۱

تشریح آرم
هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

۱. هفتمین کنفرانس ریاضی

۲. کرد

۳. نماد رادیکال

۴. نماد خارج قسمت صحیح

۵. نماد تقسیم

۶. دلتا

۷. مساحت لوزی - چهار برابر مساحت هر یک از مثلث ها است.

۸. نماد قلم

۹. نماد بزرگتر مساوی

۱۰. نماد کوچکتر مساوی

۱۱. نماد ترکیب فصلی و عدد هفت

آرم هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی توسط آقای مظفر غربی از فرهنگیان و فرهیختگان شهر سنندج طراحی شده که ایشان در طراحی آن، از مضامین ریاضی و فرهنگی بهره برده‌اند.

دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی ۲
زمستان ۱۳۸۳، بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۴۴

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

www.roshdmag.org



- با چشم بسته وارد دنیای ریاضی نشوید!
- اعداد فیبوناتچی
- عبارت های جبری گویا و اعمال بر روی آن ها
- اثبات دو قضیه از تقارن به کمک نگاشت ها
- نقش ریاضیات در علوم انسانی و تجربی
- اتحادها و معادله ها
- مثلثات

ابن هیثم



شهرت ابن هیثم در ریاضیات بر مسأله‌ای که از قرن هفدهم تاکنون به «مسألهٔ ابن هیثم» معروف شده استوار است. این مسأله را، به صورتی که ابن هیثم در نظر داشته، چنین می‌توان بیان کرد: به‌ازای هر دو نقطه‌ای که در خارج از سطح بازتابنده‌ای- که ممکن است تخت، کروی، استوانه‌ای، یا مخروطی، محدب یا مقعر باشد- قرار داشته باشند نقطه‌ای (یا نقاطی) روی سطح پیدا کنید که نور از یکی از آن دو نقطه پس از بازتاب در این نقطه (یا نقاط) به نقطهٔ دیگر بگذرد. بطلمیوس در المناظر ثابت کرده بود که در آینه‌های محدب کروی فقط یک نقطهٔ بازتاب وجود دارد. وی چند حالت را هم که به آینه‌های مقعر کروی مربوط می‌شوند در نظر گرفته بود، از جمله حالتی که در آن دو نقطهٔ مفروض بر مرکز کره منطبق باشند؛ حالتی که دو نقطه بر قطری واقع باشند و فاصلهٔ شان از مرکز کره مساوی یا نامساوی باشد؛ و حالتی که دو نقطه بر وتری از کره و به یک فاصله از مرکز آن باشند. آنگاه چند حالت را که بازتاب ممکن نیست ذکر کرده بود.[1]

ابن هیثم در مقالهٔ پنجم المناظر می‌کوشد این مسأله را برای همهٔ حالات سطوح کروی، استوانه‌ای و مخروطی- چه محدب و چه مقعر- حل کند؛ وگرچه در همه حال موفق نیست، اما نحوهٔ عمل او، که احاطه‌اش را بر ریاضیات عالی یونانی نشان می‌دهد، بحق تحسین ریاضیدانان و مورخان بعدی را برانگیخته است. پژوهندگانی که به بررسی این مسأله پرداخته‌اند، در کار ابن هیثم با مشکلاتی مواجه شده‌اند. متن مقالهٔ پنجم المناظر، در نسخهٔ خطی فاتح و نسخه ایاصوفیه، که از روی آن استنساخ شده است، اغلاط فراوانی دارد که نتیجهٔ کار نسخه‌بردار است و در هیچ‌یک از این دو نسخه براهین مفصل با شکلی که مطلب را توضیح دهد همراه نیست.[2] در شرح کمال‌الدین فارسی و در متنی که ریسنر از ترجمهٔ لاتینی قرون وسطایی منتشر کرده چنین شکل‌هائی وجود دارد، اما این متون هم خالی از اشتباه نیستند. از این‌رو باید مراتب امتنان خود را از مصطفی نظیف اظهار داریم که این مسأله را به صورت کامل و روشن تحلیل کرده و چهار فصل از کتاب خود را، که استادانه نوشته شده، بدان اختصاص داده است.

ابن هیثم حل این مسأله را در حالت کلی بر شش قضیهٔ فرعی (لِم= مقدمه)، که جداگانه ثابت می‌کند، استوار می‌سازد:

(۱) رسم خطی از نقطهٔ مفروض A واقع بر دایرهٔ ABG، به‌طوری که محیط دایره را در H و قطر BG را در D قطع کند و فاصلهٔ DH مساوی طول معلومی باشد؛ (۲) رسم خطی از نقطهٔ مفروض A به‌طوری که قطر BG را در E و محیط را در D قطع کند و ED مساوی طول معلومی باشد؛ (۳) رسم خط DTK از نقطهٔ D واقع بر ضلع BG از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویهٔ Bاش قائمه است، به طوری که AG را در T و (امتداد) BA را در K قطع کند و نسبت $\frac{KT}{TG}$ مساوی نسبت معلومی باشد؛ (۴) از دو نقطهٔ E و D واقع در خارج دایره‌ای به قطر AB، رسم دو خط EA و DA، که در آن A نقطه‌ای روی محیط دایره است، به طوری که مماس در A زاویهٔ EAD را نصف کند؛ (۵) رسم خطی از نقطهٔ E واقع در خارج دایره‌ای که قطرش AB و مرکز G است، به طوری که محیط را در D و قطر را در Z

ادامه در صفحه ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه

دورهٔ چهاردهم، شماره ۲
زمستان ۱۳۸۳
بها: ۲۵۰۰ ریال
تیراژ: ۱۵۰۰۰ نسخه
برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه و پیش دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۱۱۱۰



یادداشت سردبیر

از کلاس ریاضی چه خبر؟ در کلاس ریاضی شما چه جوّی حاکم است؟ آیا دبیر ریاضی شما تا به حال مسأله‌ای را به اشتباه حل کرده است؟ عکس‌العمل شما و سایر دانش‌آموزان چه بوده است؟ برخورد دبیر با شما چه بوده است؟ درست است، به روحیّات معلم بستگی دارد! شیرین‌ترین خاطره شما از درس ریاضی یا کلاس ریاضی چیست؟ تلخ‌ترین خاطره شما چیست؟ قول بدهید از خاطرات تلخ و شیرین خود در کلاس ریاضی برای ما بنویسید تا برای دوستان شما در «برهان» نقل کنیم. در عوض من هم خاطره‌ای از زمان دانش‌آموزی خود برایتان نقل می‌کنم. بسیار خوب. منتظر نامه‌هایتان هستیم.

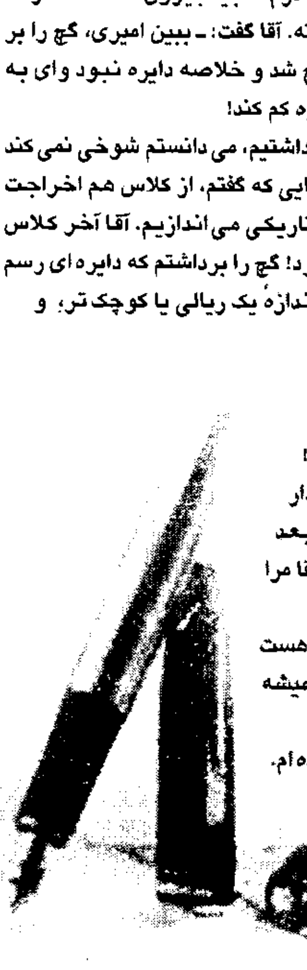
سال اول دبیرستان بودم، در نظام قدیم؛ در آن سال کتاب هندسه‌ای تدریس می‌شد که واقعاً برای بچه‌های کلاس اول سخت بود (در حدّ هندسهٔ ۱ و ۲ نظام فعلی) ما دبیری داشتیم بسیار با سابقه که خیلی هندسه را خوب درس می‌داد، او ویژگی‌های جالبی داشت. مثلاً اصلاً در کلاس با بچه‌ها شوخی نمی‌کرد، از همه درس می‌پرسید، بسیار خوش خط می‌نوشت و از همه جالب‌تر چنان دایره‌هایی با گچ می‌کشید که همهٔ ما متعجب و متحیر می‌شدیم؛ بدون نگاه کردن به تخته می‌گفت: خُب بچه‌ها! دایره‌ای رسم می‌کنیم ... و در حالی که به کلاس نگاه می‌کرد، با دست راست دایره را روی تخته می‌کشید. دایره‌اش واقعاً دایره بود؛ ذره‌ای کج و معوج نبود. از قضا روزی، نمی‌دانم پای دبیر سُر خورد یا گچ ایراد داشت یا ... که دایره‌اش کمی از یک طرف برآمده شد! من با تعجب، خدا وکیلی بدونِ قصد دیگری، به دوستم ناصر، که هر دو در ردیف جلو نشسته بودیم، گفتم: ناصر نگاه کن! این دفعه دایره یه خورده بیضی از آب درآمد! از شانس بَدم، آقا حرفم را شنید و فکر کرد خدای نکرده دارم او را مسخره می‌کنم. گفت: بله، دایرهٔ مرا مسخره می‌کنی؟! بیا بیرون! ای دادِ بیداد چه شد؟! آقا به خدا قسم ما قصدی نداشتیم، چیزی نگفتیم. آقا غلط کردیم ببخشید! آقا گفت! نه خیر فکر کردی به همین راحتی می‌گذرم؟! بیا بیرون! خلاصه؛ از ما عذرخواهی و پشیمانی و از آقا داد و بیداد و تهدید! بالاخره آمدم بیرون و طبق دستور آقا رفتم پای تخته. آقا گفت: ـ ببین امیری، گچ را بر می‌داری و یک دایره می‌کشی، اگر دایره، دایره از آب درآمد که هیچ! کاری با تو ندارم ولی اگر دایره، کج شد و خلاصه دایره نبود وای به حالت، از نمرهٔ ثلث دوم ۵ نمره کم می‌کنم و به آقای معاون هم سفارش می‌کنم از نمره انضباطت ۵ نمره کم کند!

« ـ آقا ترا به خدا من اصلاً تا به حال دایره پای تخته نکشیده‌ام (با توجه به شناختی که از دبیرمان داشتیم، می‌دانستم شوخی نمی‌کند و همه‌ی کارهایی که گفته انجام می‌دهد). آقا گفت اگر تا دو دقیقه دیگر دایره رسم نکنی علاوه بر کارهایی که گفتم، از کلاس هم اخراجت می‌کنم! دیدم چاره‌ای ندارم در ضمن به قول معروف «سنگ مُفت گنجشک مفت» بالاخره یه تیری در تاریکی می‌اندازیم. آقا آخر کلاس ایستاده بود و به تخته چشم دوخته بود. بچه‌ها هم نُطُق نمی‌کشیدند و نفس هایشان در سینه حبس بود! گچ را برداشتم که دایره‌ای رسم کنم یک دفعه راهی به ذهنم رسید! رفتم پای تخته و خیلی آرام دایرهٔ بسیار بسیار کوچکی، شاید به اندازهٔ یک ریالی یا کوچک‌تر؛ و خیلی با دقت، رسم کردم و آمدم کنار. گفتم: آقا بفرمایید! آقا گفت: رسم کن، چرا معطلی؟ گفتم: آقا رسم کردم. اینهاش!

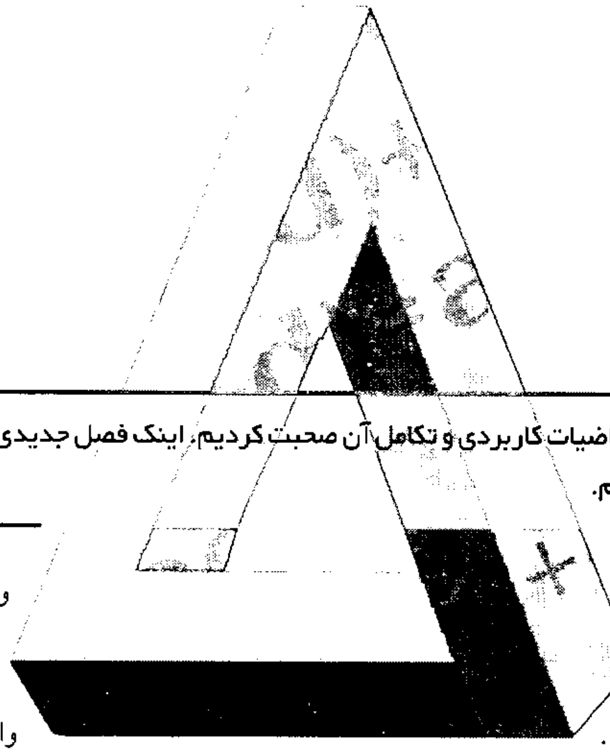
آقا کمی آمد جلو، باز هم جلوتر و جلوتر تا نزدیک ردیف اول و دایره را دید و به من خیره شد. قبل از این که حرفی بزند گفتم: آقا شما گفتید دایره بکش نگفتید با چه شعاعی، من هم دایره کشیدم، بفرمایید! یکی دو تا از بچه‌ها ناخداگاه خندیدند. آقا کمی جلوتر آمد یک بار دیگر به دایره نگاه کرد و کشیده‌ای آبدار به صورتم نواخت و گفت: برو بشین! البته نمره از من کم نکرد و به معاون هم معرفی نشدم. سال‌ها بعد وقتی در یک مدرسه تدریس می‌کردم همان دبیرم را در دفتر معلمین دیدم. رفتم جلو سلام کردم و گفتم آقا مرا می‌شناسید؟ گفت: نخیر آقا نمی‌شناسم، گفتم: آقا شما یک بار یک سیلی به من زده‌اید.

خندید و گفت شوخی می‌کنید من تا به حال کسی را کتک نزده‌ام، گفتم ولی آقا یادتان رفته، یادتان هست سال ۵۶ ... گفت: تو همان دانش‌آموزی!؟ امیری هستی!؟ گفتم: بله آقا من امیری هستم شاگرد شما و همیشه دعاگوی شما.

بلند شد و صورت مرا بوسید و گفت: من تا به حال در چندین جلسه کلاس خاطرهٔ آن روز را نقل کرده‌ام. حالت چطوره؟ گفتم خوبم آقا، به لطف شما، هنوز هم آقا به همان خوبی دایره می‌کشید؟ گفت: اِی ...



پرویز شهریاری



اشاره

در شماره‌های قبل دربارهٔ ریاضیات کاربردی و تکامل آن صحبت کردیم. اینک فصل جدیدی را با عنوان ریاضیات نظری و تکامل آن آغاز می‌کنیم.

از تاریخ بیاموزیم

ریاضیات نظری

روش عملی ـ کاربردی سازماندهی ریاضیات، با تأثیری که عمل بر تکامل ریاضیات می‌گذارد، معین می‌شود. در ضمن، قانونمندی‌های مربوط به روش عملی سازماندهی هم وارد کار می شود. برای روش نظری سازماندهی، که اساس آن بر استدلال و اثبات است، مهم تر از هرچیز، بر استقلال دانش ریاضی تکیه دارد که با قانونمندی‌های درونی، تکامل آن مشخص می‌شود. این دو نوع قانون‌مندی‌های دانش ریاضی، در زمان‌های مختلف و با میزان‌های مختلف ساختاری، به‌تناوب ظاهر می‌شوند و در دگرگونی سازماندهی، منطق تاریخی خود را دارند.

۱. مرحلهٔ آغازین یگانگی نظری دانش ریاضی

شکل گرفتن سازوکار تکامل ریاضیات نظری

پیش از هرچیز، ببینیم چه چیزی یگانگی دانش ریاضیات نظری را تأمین می‌کند!

درک تکامل دانش بر تجزیه و تحلیل برخی از واحدهای آن، که اساسی به شمار می آیند، تکیه دارد. بنابر رایج‌ترین عقیده‌ای که وجود دارد، واحد ساختمانی دانش را «نظریه» می‌گیرند و پیشرفت و دگرگونی دانش، به عنوان پیشرفت و دگرگونی نظریه (تئوری) فهمیده می‌شود. ای. لاکاتوس این دیدگاه را اندکی تغییر شکل داده و به عنوان اساس تکامل دانش، پیشرفت و دگرگونی برنامه‌های پژوهشی ـ علمی را در نظر می گیرد؛ توالی نظریه‌هایی که دارای برخی ویژگی‌های کلی باشند. نظرهای دیگری هم وجود دارد؛ اساس را بر واحدهای ساختاری «کوچک‌تر» (حالت‌ها، گزاره‌های نظری) یا برعکس، بر چنان خصلت‌های عمده‌ای که برای یک رشتهٔ تکامل از دانش عام باشد ـ مانند شیوهٔ تفکر علمی ـ قرار می دهند. همهٔ این دیدگاه‌ها، با آگاهی‌های علمی، در سطح‌های مختلف موقعیت آن، سروکار دارند. از این گذشته، این دیدگاه‌ها، هدف‌های مختلفی را دنبال می‌کنند. مطالعهٔ شیوهٔ تفکر علمی، به قصد روشن کردن مقام و موقعیت آگاهی‌های علمی در دستگاه فرهنگ و یافتن بستگی‌ها و شرط‌های متقابل علم و فرهنگ، انجام می‌گیرد. همچنین هدف پرسش‌های مربوط به مسأله‌های علمی، روشن کردن میزان فعالیت‌های علمی و به دست آوردن «توصیه‌های آموزشی» در جهت فعال کردن یا محتاط بودن، در این یا آن موقعیت خاص است.[1]

طبیعی است که بررسی دانش

ریاضی به عنوان یک مجموعهٔ کامل یکپارچه و به عنوان یک سیستم، باید از روشی پیروی کند و در ضمن، برای «محاسبهٔ» خود، واحد خاصی داشته باشد. این واحد را باید، با تکیه بر روش سازماندهی دانش جست‌وجو کرد. در حالت دانش نظری ریاضیات، اثبات و استدلال است که موجب به هم پیوستگی و تمامیت آن می‌شود؛ ریاضیات نظری از آن جهت یکپارچه و به هم پیوسته است که به وسیلهٔ استنتاج‌های اثباتی و استدلالی، می‌توان گزاره‌هایی را از گزاره‌های دیگر نتیجه گرفت.

مرحلهٔ آغازین سازمان یافتن ریاضیات نظری از راه نتیجه‌های اثباتی، در این است که واحد ساختمانی اصلی، عبارت است از مفهوم بستگی‌های نظری ـ ریاضی [که بعدها به مفهوم رابطه‌های منطقی تغییر نام دارند] که اثبات‌ها ـ و از راه آن‌ها، تمامی دانش ریاضی نظری ـ به آن‌ها تکیه دارند. در مرحلهٔ اوّل سازمان یافتن دانش نظری ریاضی، مفهوم بستگی‌های ریاضی، مرکزی را تشکیل می‌دهد که گسترش اثبات‌ها و سازماندهی حکم‌ها و گزاره‌های ریاضی، از آن جا آغاز می‌شود. هربار با پدید آمدن بستگی‌های منطقی تازه و با تکیه بر آن‌ها، اثبات‌های تازه، منجر به بازسازی و غنای تمامی حجم نتیجه گیری‌های ریاضی می‌شود، رشد توفانی دانش ریاضی آغاز می شود، کمبودها روشن و کشف می‌شود، مسأله‌های تازه‌ای پدید می‌آید، نتیجه‌های نامنتظری در موقعیت‌های علمی و کاربردی به دست می‌آید و تکامل ریاضیات نظری آغاز می‌شود.

سپس وقتی که ساختارهای ریاضیات نظری، با استفاده از بستگی‌های منطقی، صورت روشنی پیدا کردند، دوران بحران سازماندهی «در بین» مفهوم‌های بستگی‌های منطقی فرا رسید؛ بستگی‌های نظری، آغاز به منظم شدن کردند تا با ساختارهایی که در آن‌ها پدید آمده بود، تطبیق داده شوند.

از این زمان، واحد ساختمانی که تأمین کنندهٔ یکپارچگی ریاضیات نظری است، دیگر نه مفهوم، نه نظام جداگانهٔ ریاضیات یا اختلاطی از نظام‌ها، نه موقعیت ریاضیات مقدماتی، نه مسأله یا اثباتی که به بخش‌های خود تقسیم شده است، بلکه تمامی ریاضیات نظری تعیین کنندهٔ بخش‌های کلیت خود، قدم به صحنه گذاشت. این واحد، موجودیت ریاضیات نظری را حفظ می‌کند.

الف) وحدت از درون

گسترش سریع حلقه‌های نظری زنجیرهٔ دگرگونی ریاضیات، یعنی سازماندهی عمومی و کلی، با استفاده از مفهوم‌های نظری ـ ریاضی، دو بار در تاریخ ریاضیات دیده می‌شود؛ اوّل در سدهٔ ششم پیش از میلاد، وقتی که اصل اثبات وارد در ریاضیات شد. بنا بر گواهی پروکلس «تالس» بود که بعد از مسافرت به مصر، برای نخستین‌بار، این نوع آموزش را در یونان رواج داد. او نه تنها خودش بررسی‌های زیادی در این زمینه کرد، بلکه زمینهٔ کار را برای بسیاری از کشف‌های دیگر که به وسیلهٔ آیندگان انجام گرفت، فراهم کرد... پس از او، ماهرک که برادرش «سته سی خور» شاعر بود، مطالعهٔ هندسه را جلو برد. هیپس می‌نویسد که او در این عرصه، به موفقیت‌هایی دست یافت. سپس فیثاغورس مطالعهٔ هندسه را از سر گرفت، به آن نظامی مستقل داد و نخستین اصل‌ها را به صورت نهایی خود آورد و قضایای آن را به صورتی انتزاعی و با روشی روشنفکرانه مورد مطالعه قرار داد. در این جا اساس اثبات‌ها، بستگی‌های منطقی است: «اگر... آن گاه»، «بنابراین»، «از آن جا»، «به این مناسبت»، «به این معناست»، «فرض کنید» و غیره. این‌جا، بستگی‌های نظری (رابطه‌های منطقی)، این امکان را به وجود آورد که با موضوع‌های ریاضی مشابه کار کنند، برابری یا تشابه آن‌ها را ثابت کنند و در واقع، عمل‌های مربوط به برابری و اتحاد کمیت‌ها و شکل‌ها را گردآورند. در واقع، در این عمل‌ها، کمیّت‌ها و شکل‌ها به خودشان تبدیل می‌شوند. از این به بعد عمل‌ها را، رابطه‌های منطقی «ایستارستاتیک» می‌نامیم.

«انفجار نظری» بعدی در ریاضیات، در دوران جدید پیش آمد. از نیوتن و لایب نیتس تا روزهای ما، رشد پرشتاب بلوک ساختمان‌های نظری ـ ریاضی دنبال می‌شود، نظریه‌های ریاضی شاخه شاخه می‌شوند، شاخه‌های تازه‌ای به آن‌ها اضافه می‌شود، با هم یکی می‌شوند و به وسیلهٔ یک شاخهٔ کلی‌تر، جذب و بلعیده می‌شوند. «در دورهٔ تاریخی کوتاهی در سه سده و ربع سدهٔ بیستم، دست کم ۹۹ درصد همهٔ کشف‌های ریاضی انجام گرفته است. در همین دوره، به تقریب همهٔ نظام‌های

موجود شکل گرفته است» [ب. و. گنه‌دنکو، ک. آ. ریبنی کوف، ن. ای. سیمونوف؛ «مسأله‌های تاریخی ریاضیات عصر جدید» نشریهٔ «بررسی‌های تاریخی ریاضیات»، جلد ۱۵، ۱۹۶۳]. و این، در نتیجهٔ آن است که به دلیل برقراری محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی، امکان تکامل نظری کمیت‌های متغیر به‌وجود آمد. مفهوم‌های دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری، مفهوم‌های بستگی‌های منطقی پویا هستند. ورود بستگی‌های تازهٔ نظری، چنان به غنای ریاضیات افزوده است که می‌توان این دیدگاه را ارائه داد که ریاضیات به عنوان یک دانش نظری، تنها در عصر جدید پدیده آمده است!

ما ضمن تجزیه و تحلیل و تکامل ریاضیات نظری، در اساس خود، از مواد تاریخی ریاضیات نظری عصر جدید استفاده می‌کنیم و این، به دلیل آن است که کارهای ریاضی‌دانان کلاسیک یونانی خیلی کم به ما رسیده است: «... آن‌چه را که به طور معمول، ریاضیات یونانی می‌نامند، شامل قطعه‌هایی از نوشته‌های ده یا بیست نفر است که در یک دورهٔ ششصدساله پراکنده‌اند» [اُ. نیگه‌باور در «دانش‌های دقیق در دوران باستان»]. طرح منطقی تکامل ریاضیات عصر جدید، می‌تواند «کلیدی» برای «کالبد شکافی» ریاضیات نظری کلاسیک به کمک روابط منطقی باشد.

نخستین گام در برپایی وحدت نظری، بازبینی نتیجه‌هایی بود که از قدیم معلوم بودند و تنظیم تازهٔ تصورهای قبلی. تالس وقتی نخستین قضیه‌ها را ثابت می‌کرد و از جمله این که قطر دایره آن را نصف می‌کند، به هیچ وجه از محدودهٔ آگاهی‌های موجود خارج نمی‌شود. پیش از تالس هم از این ویژگی آگاه بودند، ولی موفقیت تالس در این است که آن را به صورت نظری درک کرد. به همین ترتیب، یکی از موفقیت‌های فیثاغوریان متقدّم، طول وتر مثلث قائم‌الزاویه است که قبلاً در عمل و بدون این‌که ثابت شده باشد، به وسیلهٔ بابلی‌ها شناخته شده بود. همچنین مسأله‌های نخستین ریاضیات نظری عصر جدید، که به طور کامل به سدهٔ هفدهم مربوط می‌شود، روی بازسازی موفقیت‌های آپولونیوس (از طریق روش مختصاتی) و ارشمیدس متمرکز شده بود. منحنی‌های درجه سوم و بالاتر مورد مطالعه قرار می‌گیرد که منجر به بررسی منحنی‌های فضایی می‌شود؛ و همهٔ این‌ها به یاری محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی انجام می‌گیرد. طول قطعهٔ منحنی‌ها، مساحت شکل‌ها و حجم جسم‌ها محاسبه می‌شود که پیش از آن به وسیلهٔ ارشمیدس بررسی شده بود. بستگی‌های نظری تازه که درنوبت اوّل روی موضوع شخصی تأیید می‌شوند، تنها بعد می‌توانند به حوزهٔ گستردهٔ موضوع‌هایی که «به چشم» نمی‌آیند، وارد شوند.

موفقیت بزرگ این بستگی‌های منطقی تازهٔ سازماندهی نخستین نظری، عبارت است از ساده کردن نتیجه‌گیری‌های بغرنج از موضع بستگی‌های نظری تازه، جالب است، روش‌هایی به دست آوردن نتیجه‌گیری‌ها، که باید آن‌ها را «اوج» موفقیت‌های علمی زمان‌های قبلی دانست، خیلی نزدیک به الگوریتم‌های ساده و بنیانی هستند که با بستگی‌های نظری تثبیت شده‌اند برای مثال، ساختمان بغرنجی که ارشمیدس طرح ریخته بود، به محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی بسیاز نزدیک است. روش‌های آپولونیوس به غایت بغرنج بود و به دشواری به زبان جبر هندسی بیان می‌شد و به سختی خود را به سمت اندیشه‌های مربوط به روش مختصاتی می‌کشاند (آپولونیوس از نکته‌هایی استفاده می‌کرد که به صورت مبهم و ناقص، شبیه دستگاه مختصاتی بود). بستگی‌های نظری تازه، راه رسیدن به این نتیجه‌ها را بسیارساده کرد و آن‌ها را در ردیف دستاوردهایی قرار داد که امکان می‌داد موقعیت‌های بغرنج گذشته را در سطح موضوع‌های عادی درآورد.

سازماندهی نخستین در ریاضیات نظری یونان، دیدگاه تازه‌ای به ریاضیات کاربردی پیش از خود داد؛ همان‌طور که سازماندهی نخستین در ریاضیات نظری عصر جدید، نتیجه‌هایی را که بر مبنای جبر هندسی در ریاضیات نظری یونان به دست آمده بود، به صورت دیگری درآورد و نتیجه‌ها را با استفاده از مفهوم‌های تازه‌ای که به دست آمده بود، ساده کرد. مسأله‌هایی که به غایت دشوار بودند، در حوزهٔ ریاضیات عادی و متوسط قرار گرفتند و روش‌های تازه، تغییرات ریشه‌ای در علاقهٔ دانشمندان به‌وجود آورد. تحوّلی که در نتیجه‌گیری‌های نظری، ضمن استفاده از بستگی‌های تابعی و محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی به وجود آمد، تمام چهرهٔ دانش ریاضی و تصور مربوط به جایگاه و درجهٔ اهمیت آن را دگرگون کرد. اگر تا پیش از سدهٔ هفدهم و خود

سدهٔ هفدهم، ضمن جست‌وجوهای نظری، تنها به رگه‌هایی می‌پرداختند که به مسأله‌های ریاضی باستان مربوط می‌شد، در سدهٔ هجدهم وضع به کلی تغییر کرد. حتی هندسهٔ مقدماتی و بررسی‌های مربوط به آن در درجهٔ دوم قرار گرفت و به عقب رانده شد؛ شکاف‌هایی که در مسأله‌های مربوط به دینامیک پدید آمده بود، علاقه‌های ریاضی را به قلمرویی دیگر جلب کرد. فرهنگستانی که ایجاد شده بود (فرهنگستان علوم پاریس، جامعهٔ سلطنتی لندن، فرهنگستان علوم نیویورک، فرهنگستان علوم برلن و...)، به‌طور مرتب دربارهٔ زمینه‌های مبرم مسابقه می‌گذاشتند. و این مسابقه‌ها، بیش‌تر در زمینهٔ مسأله‌های دینامیک بود. نتیجهٔ این مسابقه‌ها با چاپ مقاله‌ها در مجله‌های علمی منعکس می‌شد و در آن‌ها حق تقدّم با مقاله‌هایی بود که دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی (روی صفحه و در فضا)، هندسهٔ دیفرانسیلی، آنالیز ریاضی و دیگر نظریه‌هایی بود که بر اساس رابطه‌های منطقی «پویا» نوشته شده بود، و این وضع، یعنی تکیه بر موارد «دینامیکی» ریاضیات، سرانجام به کتاب‌های درسی راه یافت. از جمله در کتاب‌های ریاضیدانانی چون بزو (دورهٔ ریاضیات، ۶جلد ۱۷۶۴-۱۷۶۹)، لژاندر (مقدمات هندسه ۱۷۹۴)، لاکروا (مقدمات هندسه ۱۸۰۳)، به خوبی ماهیت این تغییری را که پیش می‌آمد، روشن می‌کند که تا پایان سدهٔ نوزدهم ادامه داشت. برای مثال، کتاب درسی لاکروا، ۲۵ بار چاپ شد و آخرین بار در سال ۱۸۹۷ بود.

به بستگی ریاضیات نظری که پدید می‌آمد، بامبانی و اصول قبلی دانش ریاضی هم، باید توجه کرد. در این جا وضع چنین بود؛ ضمن رشد ساختارهای نظری که در آغاز به صورت «خطی» بود؛ دربارهٔ پایه‌ها و مبانی ریاضیات، موفقیت‌های جدی به دست آمد؛ به ویژه اگر ریاضیات نظری عصر جدید را تجزیه و تحلیل کنیم، این مسألهٔ روشن‌تر می‌شود؛ زیرا در این جا مبانی ریاضیات نظری باستان و دورهٔ هلنی را کنار گذاشتند، چرا که غنای نظری آن اندک بود، آن را در معرض تردید گذاشتند و به روش قیاسی با دیدی عمیق‌تر نگریستند؛ چرا که در آن کوشش می‌شد یک حکم را با بستگی‌های منطقی ایستا (استاتیک) از حکم‌های دیگر نتیجه بگیرند. ریاضیات جدید، مبانی ریاضیات نظری قبلی را که بر مبنای روش قیاسی بود، گسترش داد. برای برطرف کردن جنبه‌های منطقی حکم‌های نظری نخستین، تلاش آغاز شد؛ زیرا این حکم‌ها بر ساختارهای نظری قبلی، معنای خود را از دست داده بود. مهم نبود که دربارهٔ کدام روش قیاسی صحبت می‌شود، روش اصل موضوعی با روش تصور ترکیبی (که در «مقدمات» اقلیدس به هم پیوند خورده بودند)، کنار گذاشته شد. از یک طرف «مقدمات» اقلیدس به عنوان نمونه و سرمشق مقلدان باقی مانده بود و از طرف دیگر، احترام بی‌چون و چرا، جای خود را به مقاومت شکاکیون می‌داد. به ویژه این مسأله دربارهٔ مفهوم‌های اساسی ـ آکیوم‌ها و پوستولات‌ها ـ که در مرکز توجه قرار گرفته بود و بررسی انتقادی آن‌ها، از دیدگاه روابط منطقی «پویا» بارورتر به نظر می‌رسید. مرحله‌هایی پیش آمد که نفی هرگونه استدلال قیاسی مربوط به ریاضیات سنّتی، به عنوان یکی از راه‌های برطرف کردن پیچیدگی‌های ساختهٔ ریاضیات نظری باستان، در نظر گرفته شد. «در سده‌های هفدهم و هجدهم، آرمان یونانی اصل موضوعی کردن ریاضیات و استفاده از استدلال قیاسی خالص، اثر خود را از دست داد؛ اگرچه هندسهٔ قدیم به پیشرفت و شکوفایی خود ادامه می‌داد» [ر. کورانت، در ریاضیات چیست؟].

نخستین تلاش‌های ناموفق، برای «اصلاح» و تحلیل دستگاه آکیوم‌ها و پوستولات‌های اقلیدس، کمبودهای «مقدمات» را روشن کرد. فقدان مفهوم‌های پیوستگی و بستگی‌های تابعی اقلیدس، هرجا که به پیوستگی و برابری شکل‌های هندسی برمی‌خورد، به شهود رو می‌آورد. ریاضیات جدید می‌کوشد تا این کمبود جدی را از بین ببرد. می‌خواستند پایه‌های ریاضی را چنان تغییر دهند و ساختمان مبانی را به صورتی در آورند، که در آن، روابط منطقی «پویا» منعکس شده باشد؛ از جمله دکارت و لایب‌نیتس کوشیدند، در ساختمان هندسهٔ مقدماتی اقلیدس، اصلاح‌هایی به عمل آورند. این اصلاح‌ها، بیش‌تر در جاهایی بود که روشی غیر دینامیکی (ایستا) به چشم می‌خورد. بذر شکی که آن‌ها کاشتند، خیلی زود به ثمر نشست. تردید نسبت به روش اقلیدسی «قیاس کامل» رشد کرد و حتی در کتاب‌های علمی و آموزشی هم رسوخ کرد.

سفارش برنامه‌ای دالامبر، در این باره، اثر زیادی داشت. او پیشنهاد کرد، از اصل موضوعی کردن به شیوهٔ

قدیم صرف نظر شود؛ چرا که به اندازهٔ کافی روشن نیست و نمی‌تواند مسأله‌های ساختمان ریاضیات نظری تازه را منعکس کند. دالامبر (درانسیکلوپدی و در مقالهٔ «پیدایش و تکامل دانش» نوشت: من... به هیچ وجه قصد ندارم استفاده از اصل موضوع‌ها را بی‌هیچ شرطی محکوم کنم؛ تنها می‌خواهم نشان دهم این اصل موضوع‌ها به کجا منجر می‌شوند؛ به ویژه که برای ما عادی شده‌اند، در آن‌ها مهارت پیدا کرده‌ایم و برای حالت‌های مختلف قابل دسترسی‌اند». ولی اصل موضوع‌های اقلیدس، تصوری دربارهٔ «اندیشهٔ ساده» پویا و دینامیک نمی‌دهند؛ اندیشه‌هایی که به فراوانی در ریاضیات جدید وجود دارند. بنابراین «روش اصل موضوعی را باید در جهتی تغییر داد که گزاره‌های کم‌تر روشن، روشن‌تر شوند؛ بدون این‌که از قبل سیاهه‌ای برای آکیوم‌ها و پوستولاها بدهیم و در ضمن، امکان استفاده از حرکت و آموزش مربوط به بی‌نهایت کوچک‌ها را داشته باشیم.» [پی. آ. به لی؛ آموزش لئوناراویلر دربارهٔ هندسهٔ مقدماتی، بررسی‌های تاریخی-ریاضی، جلد ۱۴ سال ۱۹۶۱]؛ یعنی از امکان‌های دینامیکی ریاضیات استفاده کنیم. کتاب‌های درسی بزو، لژاندرو لاکروا، در عمل، سفارش دالامبر را به کار بستند. برای مثال، لاکروا، در بسط و گسترش «مقدمات هندسه» (۱۸۰۳)، از ذکر مبانی اولّیه، در آغاز کتاب خودداری می‌کند. او می‌گوید: «چه فایده دارد که انبوهی از اصل موضوع‌ها را در آغاز کتاب بیاوریم؛ در حالی که ضمن استدلال‌های خود از آن‌ها استفاده نمی‌کنیم.» برخورد منفی با روش قیاسی ایستا، وارد کتاب‌های آموزشی انگلستان، آلمان و روسیه شد و به تدریج از اعتبار سازماندهی ایستایی ریاضیات بر مبنای «مقدمات» کاسته شد.

با وجود این، تلاش‌هایی که در جهت جانشین کردن روش قیاسی دینامیک، به جای روش قیاسی ایستا انجام گرفت، نمی‌توانست با بحران روبه‌رو نشود و چیزی را جانشین وضع موجود کند. خودساختار نظری ریاضیات، از نوع دینامیکی آن، به ویژه نظریه‌های هندسی، از نظر روابط منطقی جدید، در مرحلهٔ اولیهٔ گسترش بودند و هنوز از نمونه‌های مشخصی که سرمشق کار بودند، جدا نشده بودند. الگوریتم‌ها یک جا در مسأله‌های کاربردی جمع بودند، نظریه هنوز از تصورهای «مزاحم» جدا نشده بود و برای هندسه هنوز زبان روش‌های قیاسی جدید فرا نرسیده بود. در زمان دالامبر، کوشش برای ساختن هندسه‌هایی به زبان اصل موضوعی و به هدف بیان علمی موضوع آن، هنوز خصلت گذشته را داشت. در واقع، دقت منطقی که در این امر لازم بود، در تحلیل نهایی منجر به خیال خام می‌شد و نمی‌توانست انتقاد را تحمل کند، [و. ف. کاگان، دربارهٔ هندسهٔ مقدماتی در انتهای سدهٔ هجدهم و آغاز سدهٔ نوزدهم، سال ۱۹۴۹].

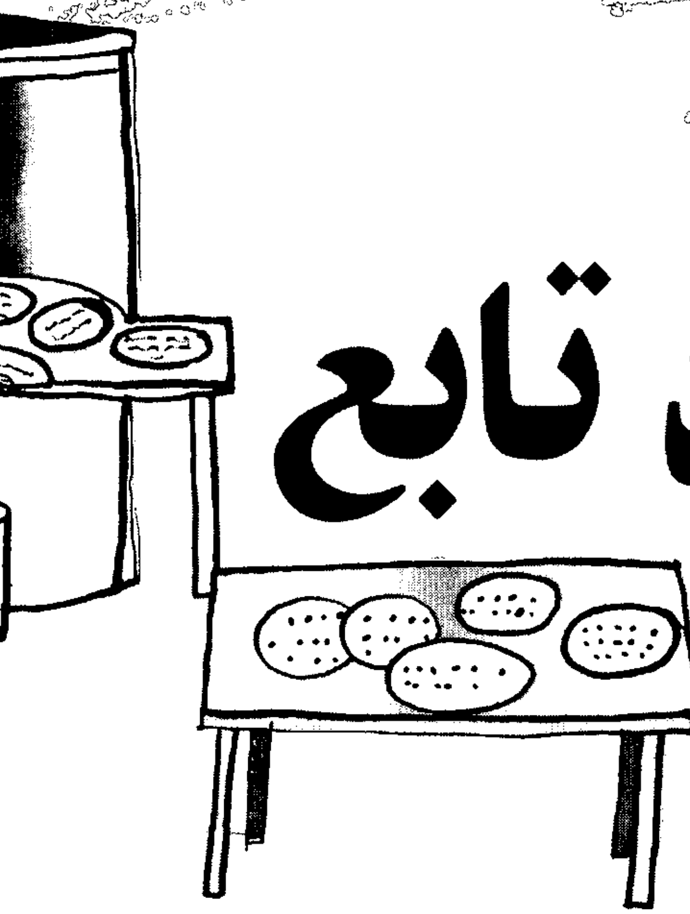
به این ترتیب، سازماندهی به یاری مفهوم‌های نظری، روندی است که در آغاز تکامل ریاضیات نظری، در هر دو سطح دیده می‌شود. برای ریاضیات عصر جدید، این سازماندهی تا درون بغرنج‌ترین موفقیت‌های ریاضیات نظری نفوذ می‌کند و تا عمق مبانی آن گسترش می‌یابد، در همهٔ نوشته‌های ریاضی اشاعه می‌یابد، علاقهٔ پژوهشگران را به خود جلب می‌کند. همین سازماندهی این امکان را دارد که رابطه‌های منطقی را هم به‌وجود آورد. خود سازماندهی «کلیدی» برای گشایش این رابطه‌هاست؛ برای ریاضیات نظری سنّتی، یعنی رابطه‌های نظری ایستا (شباهت، برابری و تشابه و برای ریاضیات نظری عصر جدید، یعنی ریاضیات در سطح دوم - ریاضیات نظری پویا (عمل‌های دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری، استفاده از مفهوم رابطهٔ تابعی) - ساختارهای ریاضی، روابط منطقی را در خود جمع می‌کنند و تحت تأثیر آن‌ها، حوزهٔ عینی - عملی خود را آماده می‌کنند؛ به ویژه برای ریاضیات نظری عصر جدید، در تمامی سدهٔ هجدهم - بدون تغییر جدی - چهرهٔ تکامل دوران فرما، دکارت، نیوتن و لایب‌نیتس ادامه می‌یابد. ولی در جریانی چنین آرام برای تکامل ساختارهای نظری، همیشه از جانب خطری طبیعی و غیر قابل دفاع تهدید می‌شود؛ بحران ناشی از درک ساده‌لوحانهٔ روابط نظری.

(ادامه دارد)

زیرنویس ....

۱. درک روش شناختی دانش را نمی‌توان بامعیار فعالیت پژوهشی به دست آورد و به دانشمند برای رسیدن به هدف، وسیله و امکان واحدی را تحمیل کرد. از جمله لورنتس (Lorengen) معتقد است که دراین باره، تنها می‌توان گفت و گو کرد و بین دانشمندان روش شناس باید بحث را به‌وجود آورد. کروکر (Kruger) هم همین نظر را دارد و یادآوری می‌کند که برای روش شناسی، از توضیح و پیشرفت‌های بررسی‌های علمی کاری ساخته نیست و تنها می‌توان دربارهٔ آن گفت‌وگو کرد.

۲. از جمله م. شال، هندسه‌دان مشهور و مورخ ریاضیات پایان سدهٔ نوزدهم، همین عقیده را داشت.



برد تابع

برای دانش‌آموزان سال سوم

احمد قندهاری

در تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ ، مجموعهٔ مقادیر y را که در اثر تأثیر تابع f روی xهای مجموعهٔ دامنهٔ تابع حاصل می‌شود، بُرد تابع می‌گویند. برای تعیین برد تابع تا آن‌جا که مقدور باشد، از روش‌های زیر می‌توان بهره گرفت.

۱. تشکیل جدول تغییرات تابع

جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم، سطر سوم جدول تغییرات هر تابع، تغییرات برد تابع را نشان می‌دهد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^۲ - ۵x - ۷$ را بیابید.

حل: $y'_x = ۲x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲}$

x	$-\infty$		$\frac{۵}{۲}$		$+\infty$
y'_x		$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$		$-\frac{۵۳}{۴}$		$+\infty$

برد تابع $R_f = \left[-\frac{۵۳}{۴}, +\infty\right)$

۲. محاسبهٔ x از معادلهٔ تابع

از معادلهٔ تابع، x را محاسبه می‌کنیم. سپس محدودهٔ y را چنان تعیین می‌کنیم تا x وجود داشته باشد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۲x+۱}{x^۲+۲x+۳}$ را بیابید.

حل: $y = \frac{۲x+۱}{x^۲+۲x+۳} \Rightarrow yx^۲ + ۲yx + ۳y = ۲x + ۱$

$$\Rightarrow yx^۲ + ۲(y-۱)x + (۳y-۱) = ۰$$

$$a = y \ , \ b' = y - ۱ \ , \ c = ۳y - ۱$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} = \frac{۱ - y \pm \sqrt{(y-۱)^۲ - y(۳y-۱)}}{y}$$

$$= \frac{۱ - y \pm \sqrt{-۲y^۲ - y + ۱}}{y}$$

برای این که x وجود داشته باشد، باید:

$$-۲y^۲ - y + ۱ \geq ۰$$

$$-۲y^۲ - y + ۱ = ۰ \Rightarrow y = -۱ , \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -۱ \leq y \leq \frac{۱}{۲} \ , \ y \neq ۰$$

برد تابع $R_f = \left[-۱ , \frac{۱}{۲}\right] - \{۰\}$

۳. استفاده از اتحاد $x^{۲n} \pm kx^n = (x^n \pm \frac{k}{۲})^۲ - \frac{k^۲}{۴}$

به کمک اتحاد بالا، می‌توان بُرد بسیاری از تابع‌ها را به‌دست آورد.



مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^6 - 5x^3 + 3$ را بیابید.

حل:

$$y = x^6 - 5x^3 - 3 = (x^3 - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 3$$

$$y = (x^3 - \frac{5}{2})^2 - \frac{13}{4}$$

کم‌ترین مقدار $(x^3 - \frac{5}{2})^2$، صفر و بیش‌ترین مقدار آن به سمت $+\infty$ میل می‌کند؛ پس برد تابع $y \geq -\frac{13}{4}$ بنابراین:

$$R_f = \left[-\frac{13}{4}, +\infty\right)$$

۴. استفاده از صورت ظاهری تابع

در بعضی از تابع‌ها، با استفاده از صورت ظاهری تابع، می‌توان برد تابع را محاسبه کرد.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} + 3$ را بیابید.

حل: حاصل هر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت یا صفر است. اگر کمی دقت کنیم، به ازای $x = 1$ هر دو رادیکال صفر می‌شود و $y = 3$ و وقتی $x \to \pm\infty$، آن‌گاه $y \to +\infty$؛ پس برد تابع $y \geq 3$ یا $[3, +\infty)$ است.

۵. استفاده از مشتق و دامنهٔ تابع

در بعضی از تابع‌ها، به کمک مشتق و دامنهٔ تابع، برد تابع به دست می‌آید.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x + \sqrt{4x - 1}}$ را بیابید.

حل: تابع صعودی اکید است $\Leftarrow$ $y'_x = \dfrac{1 + \dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{4x - 1}}} > 0$

حال دامنهٔ تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$4x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow D_f = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}, \quad x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

برد تابع $R_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

۶. تغییر متغیر مثلثاتی

به کمک تغییر متغیر مثلثاتی، برد بعضی از تابع‌ها به‌دست می‌آید.

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = 2x\sqrt{1 - x^2} + 7$ را بیابید.

حل: $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

حق داریم در این مثال، با توجه به تغییرات x، x را مساوی sint فرض کنیم.

$$x = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + 7 \Rightarrow y = 2\sin t\sqrt{\cos^2 t} + 7,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2\sin t\cos t + 7 \Rightarrow y = \sin 2t + 7$$

برد تابع:

$$\text{Max}(\sin 2t) = 1, \quad \text{Min}(\sin 2t) = -1 \Rightarrow 6 \leq y \leq 8$$

۷. تعیین برد تابع به کمک ماکزیمم و می‌نیمم عبارت‌های مثلثاتی

الف. برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم تابع‌های با ضابطه‌های $y_1 = a\sin^2 x + b\sin x + c$ و

$y_2 = a\cos^2 x + b\cos x + c$ باید به جای sinx و cosx، اعداد ۱ و ۱- و $(-\frac{b}{2a})$ را قرار دهیم؛ به شرطی که $-1 \le -\frac{b}{2a} \le 1$

ب. $\frac{1}{2^{n-1}} \le \sin x^{2n} + \cos x^{2n} \le 1$ ، $n \in N$

ج. $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\ \cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$

د. $\tan x + \cot x \le -2$ یا $\tan x + \cot x \ge 2$

مثال. برد تابع با ضابطهٔ $y = 3\sin^2 x - 4\sin x + 2$ را بیابید.

حل.

$\sin x = 1 \Rightarrow y = 3 - 4 + 2 = 1$

$\sin x = -1 \Rightarrow y = 3 + 4 + 2 = 9$

$$\sin x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 3(\frac{4}{9}) - 4(\frac{2}{3}) + 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

پس برد تابع: $\frac{2}{3} \le y \le 9$

توجه: باز هم موارد دیگری برای تعیین برد تابع وجود دارد که در این مقاله، مجال پرداختن به آن‌ها نیست.

آزمون۱. برد تابع با ضابطهٔ $y = x - \sqrt{x-2} - 1$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $y \ge 3$ ۴) $y \ge \frac{3}{4}$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$y = (x-2) - \sqrt{x-2} + 1 = (\sqrt{x+2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} Min(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow Min(y) = \frac{3}{4} \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow y \ge \frac{3}{4}$$

آزمون۲. برد تابع با ضابطهٔ $y = x^3 + x$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $\mathbb{R} - \{0\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $y \le 0$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$y' = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ تابع صعودی اکید است

$D_f = (-\infty\ ,\ +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{برد تابع } R_f = \mathbb{R}$$

آزمون۳. برد تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x^2+1}{x}$ کدام است؟

۱) $-1 \le y \le 1$ ۲) $y \le -2$ یا $y \ge 2$

۳) $-2 \le y \le 2$ ۴) $R - \{0\}$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$y = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2} \quad ; \quad y^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow y^2 \ge 4 \Rightarrow \begin{cases} y \ge 2 \\ y \le -2 \end{cases}$$

آزمون ۴. برد تابع با ضابطهٔ $y = (x^2 - 8x + 7)^{20} + 2$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $y \ge 3$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = 1\ ,\ 7$

$x = 1$ یا $x = 7 \Rightarrow Min(x^2 - 8x + 7)^{20} = 0 \Rightarrow Min(y) = 2$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty\ ;\ y \ge 2$

آزمون ۵. برد تابع با ضابطهٔ $y = (x^2 - 6x + 10)^{74} + 5$ کدام است؟

۱) $y \ge 5$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $y \ge 6$ ۴) $y \ge 10$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$y_1 = x^2 - 6x + 10 \Rightarrow y_1' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = 3 \Rightarrow y_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} Min(x^2 - 6x + 10)^{74} = 1 \Rightarrow Min\ y = 6 \\ x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow y \ge 6$$

آزمون ۶. برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{4x - 7 + \sqrt{x-4}}$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 1$ ۳) $y \ge 2$ ۴) $y \ge 3$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$D_f = [4, +\infty) \text{ و } y'_x = \frac{4 + \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2\sqrt{4x - 7 + \sqrt{x-4}}} > 0 \text{ و } x > 4$$

$x = 4 \Rightarrow y = \sqrt{16-7} = 3$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \Rightarrow$ برد تابع : $y \geq 3$

آزمون ۷ . برد تابع با ضابطهٔ $y = 1 + \sqrt{-x^2 + 2x}$ کدام است؟

۱) $1 \leq y \leq 2$ ‏ ۲) $0 \leq y < 2$

۳) $y \geq 2$ یا $y \leq 1$ ‏ ۴) $y \geq 2$ یا $y \leq 0$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

$y - 1 = \sqrt{-x^2 + 2x}$, $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$ شرط اولیه

$(y-1)^2 = (\sqrt{-x^2 + 2x})^2 \Rightarrow (y-1)^2 = -x^2 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x + (y-1)^2 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1-(y-1)^2}$, $1-(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (y-1)^2 \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq y-1 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq y \leq 2$$

آزمون ۸ . برد تابع با ضابطهٔ $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ کدام است؟

۱) $-2 \leq y \leq 2$ ‏ ۲) $-2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}$

۳) $-2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$ ‏ ۴) $-2\sqrt{2} \leq y \leq 2$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$y - x = \sqrt{4-x^2}, y - x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \geq x \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow y \geq -2 \text{ شرط اولیه}$$

$(y-x)^2 = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 - 2yx = 4 - x^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 2yx + (y^2 - 4) = 0$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 2y^2 + 8}}{2} , -y^2 + 8 \geq 0 \quad y^2 \leq 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2} \\ y \geq -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$$

آزمون ۹ . برد تابع با ضابطهٔ $y = \lfloor \tan x + \cot x \rfloor$ کدام است؟

۱) z ‏ ۲) $z - \{\pm 2\}$ ‏ ۳) $z - \{\pm 1, 0\}$ ‏ ۴) $z - \{0\}$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

الف) $\tan x + \cot x \geq 2 \Rightarrow y = 2, 3, 4, \ldots$

ب) $\tan x + \cot x \leq -2 \Rightarrow y = -2, -3, -4, \ldots$

برد تابع $R_f = z - \{\pm 1, 0\}$

آزمون ۱۰ . برد تابع با ضابطهٔ $y = 2x\sqrt{9 - x^2} + 4$ کدام است؟

۱) $-5 \leq y \leq 9$ ‏ ۲) $-5 \leq y \leq 5$

۳) $-6 \leq y \leq 6$ ‏ ۴) $-5 \leq y \leq 13$

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$x = 3\sin t \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$y = 6\sin t\sqrt{9 - 9\sin^2 t} + 4 = 6\sin t\sqrt{9\cos^2 t} + 4$

$= 18\sin t\cos t + 4$

$y = 9\sin 2t + 4$ و $-1 \leq \sin 2t \leq 1 \Rightarrow -5 \leq y \leq 13$

آزمون ۱۱ . برد تابع با ضابطهٔ زیر کدام است؟

$$y = (x-2)\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

۱) $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ ‏ ۲) $-1 \leq y \leq 1$

۳) $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ ‏ ۴) $-2 \leq y \leq 2$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

$y = (x-2)\sqrt{1 - x^2 + 4x - 4} = (x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}$

$1-(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq (x-2)^2 \leq 1$

$x - 2 = \sin t \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \sin t\sqrt{\cos^2 t} = \sin t\cos t$

$= \frac{1}{2}\sin 2t$

$$\begin{cases} \text{Max} \sin 2t = 1 \\ \text{Min} \sin 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$$

آزمون ۱۲ . برد تابع با ضابطهٔ زیر کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor 2x \rfloor - 2x & x \notin z \\ -1 & x \in z \end{cases}$$

۱) $[-۱\ ,\ ۱)$ ۲) $[-۱\ ,\ ۰]$

۳) $[-۱\ ,\ ۰)$ ۴) $[-۱\ ,\ ۱]$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

داریم؛ $۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱ \Rightarrow -۱ < \lfloor x \rfloor - x \le ۰$

$\Rightarrow -۱ < \lfloor ۲x \rfloor - ۲x \le ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \notin z & -۱ < y \le ۰ \\ x \in z & y = -۱ \end{cases} \Rightarrow -۱ \le y \le ۰$$

آزمون ۱۳. برد تابع با ضابطهٔ $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ ، $y = \sin x + \cos x$ کدام است؟

۱) $-۱ \le y \le \sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲} \le y \le \sqrt{۲}$

۳) $۱ < y \le \sqrt{۲}$ ۴) $-۱ \le y \le ۱$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

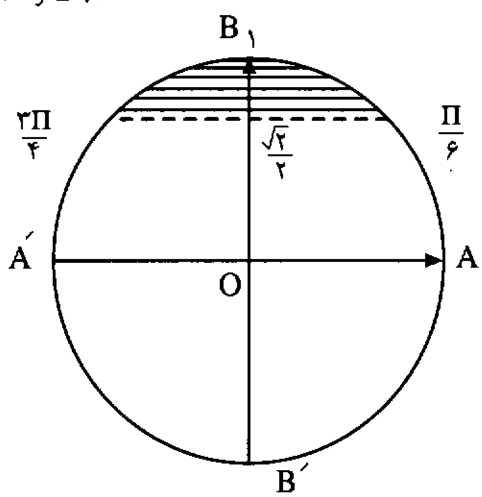
$$y = \sqrt{۲}\ \sin(x + \frac{\pi}{۴})$$

$$۰ < x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{۴} < x + \frac{\pi}{۴} < \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} < \sin(x + \frac{\pi}{۴}) \le ۱$$

$$\Rightarrow ۱ < \sqrt{۲}\ \sin(x + \frac{\pi}{۴}) \le \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow ۱ < y \le \sqrt{۲}$$



معماهای فـ  ـکری و منطقی

B ، C ، J و S چهار شهروند ثروتمندند که به عنوان معمار، بانکدار، دکتر و وکیل، گرچه نه لزوماً به همین ترتیب، به جامعه خدمت می‌کنند.

B، که محافظه‌کارتر از J، اما لیبرال‌تر از S است، نسبت به افرادی که جوان‌تر از او هستند، گلف‌باز بهتری است و نسبت به افرادی که مسن‌تر از C‌اند، درآمد بیش‌تری دارد. بانکدار، که بیش از معمار درآمد دارد، نه جوان‌ترین و نه مسن‌ترین افراد جمع است.

معمار از دکتر، که نسبت به وکیل، گلف‌باز ضعیف‌تری است، محافظه‌کارتر است.

همان‌گونه که انتظار می‌رود، مسن‌ترین این افراد، محافظه‌کارترین آنان است و بیش‌ترین درآمد را دارد، و جوان‌ترینشان، بهترین گلف‌باز در میان جمع است.

حرفهٔ هرکس چیست؟

جواب:

۲

بخش دوم و پایانی

اشاره

استاد احمد قندهاری، معلم، مؤلف و پژوهنده‌ای است که شما خوانندگان عزیز مجله، قسمت اول مصاحبه با ایشان را در شمارهٔ قبل ملاحظه کردید، اینک ادامه مصاحبه را که آقای غلامرضا یاسی‌پور تدوین کرده‌اند و البته اعضای هیأت تحریریه مجله هم در آن شرکت داشته‌اند، در پی می‌آوریم:

گفت‌وگو با استاد احمد قندهاری

شاگردان در همان جلسهٔ اوّل به ما نمره می‌دهند!

❖ یاسی‌پور: آیا روش فعّال ـ فعّالیت‌محور منظور بوده ـ را در کلاس می‌پذیرید یا نه؟ و اگر می‌پذیرید، چه قدر به‌آن عمل می‌کنید؟ چون یک موقع شما آموزش می‌دهید و زمانی مسأله حل می‌کنید و تمرین می‌دهید؛ خوب این‌ها دو قسمت است. این‌ها جدا از همدیگرند. البته باید تمرین هم باشد؛ چون اصلاً یکی از معانی ریاضی، تمرین است. وقتی عرب‌ها الریاضی می‌نویسند یا ریاضی، یعنی ورزش، و ورزش هم همان تمرین است، یعنی ورزیدن. اصلاً ورزش به معنای تمرین است و خارجی‌ها هم وقتی می‌گویند Exercise، به معنای تمرین است. پس تمرین از آموزش جداست؛ یعنی شما وقتی تمرین می‌دهید، آموزش‌ها و آموخته‌ها را بررسی می‌کنید و روی آن‌ها کار می‌کنید؛ ولی آیا در آموزش شاگردان را دخالت می‌دهید؟

❂ استاد قندهاری: مسلّم است که در تدریس ریاضی، شاگردان دخالت می‌کنند؛ ولی این که در کلاس یک مطلبی را به بحث بگذاریم، در عین حالی که ممکن است درست باشد؛ من این کار را نکرده‌ام. در شرایط فعلی، مثلاً می‌گویم که نظرتان را دربارهٔ این موضوع بگویید یا این مثال را حل کنید. سعی هم می‌کنم مثالی که می‌دهم، جنبهٔ تشویقی داشته باشد؛ به این معنا که یک گوشهٔ آن را راهنمایی می‌کنم که بچه‌ها مقداری تشویق شوند؛ والاّ این که در همهٔ زمینه‌ها این‌ها را دخالت دهم، من فکر می‌کنم حداقل برای من عملی نبوده است.

❖ یاسی‌پور: بنده این‌طور به نظرم می‌رسد که بیشتر برای انجمن‌ها و کلاس‌های اضافه این مسأله عملی‌تر است.

سؤال بعدی، سؤال خیلی متعارفی است و من به دنبال پاسخ متفاوتی هستم؛ چون معمولاً وقتی این سؤال را می‌کنند، پاسخ‌ها شبیه هم است. استاد عزیز، اگر بخواهید از نو شغلی را انتخاب کنید، آیا معلمی را برمی‌گزینید؟ و چند ویژگی از شغل معلمی که شما را هم مجذوب کرده، برای ما نام ببرید.

❂ اگر مقدور باشد که من دوباره



هفده، هجده ساله شوم و درس بخوانم، به‌جای رشتهٔ ریاضی، ادبیات را انتخاب می‌کنم. البته ممکن است دلایل مقداری شخصی باشد؛ ولی به‌هر دلیل، این اعتقاد من است. اما معنایش این نیست که از ریاضی خوشم نمی‌آید و نمی‌خواهم معلم باشم. از شغل معلمی خوشم می‌آید؛ ولی من فکر می‌کنم که مثلاً تدریس حقوق و ادبیات زیبایی‌هایش بیشتر و ملموس‌تر است و به هر دلیل جامعه‌پسندتر. از این طریق بچه‌ها را می‌توان بیشتر جذب و استعدادهایشان را بررسی کرد تا از طریق ریاضی. من معلمی را دوست دارم؛ اما اگر برایم مقدور بود، دوست داشتم که ادبیات بخوانم.

❖ یاسی‌پور: حمیدی شیرازی، یکی از شاعران معاصر، که در ابتدا معلم دبیرستان البرز هم بود، قصیده‌ای دارد که در انتهایش می‌گوید:

دو درد بود آن چه مرا پیر کرد و کشت
غوغای عشق بود و بلای معلمی

بعد در ادامه‌اش می‌گوید:

نفرین بر آن کسان که در این جا چو من برند
زجری به این گرانی و اجری بدین کمی

شما که این طور اعتقاد ندارید؟

❂ نه، من اعتقاد ندارم.

❖ یاسی‌پور: خوب، ویژگی‌هایی که باعث شد تا شما به شغل معلمی جذب شوید، چه بوده است؟ به عبارت دیگر، معلمی چه ویژگی‌هایی دارد که شما را به این شغل علاقه‌مند کرده است؟

❂ به اعتقاد من، معلمی شغل بسیار زنده‌ای است و شغلی است که می‌تواند در جامعه خیلی اثرگذار باشد. یک معلم منظم، درست و دقیق، واقعاً می‌تواند در آیندهٔ شاگردان اثرگذار باشد. مضافاً این‌که، خیلی از مسائلی که برایم پیش آمده، به‌وسیلهٔ شاگردانم به راحتی رفع شده است. اگر شما رفتار پسندیده‌ای سر کلاس داشته باشید، شاگردان واقعاً از کسانی می‌شوند که پا جا پای شما می‌گذارند و این، نشان‌دهندهٔ رسالت معلمی است. ما بیش از عالِم، به آدم احتیاج داریم. من اعتقادم این است که واقعاً ما آدم خوب می‌خواهیم؛ حالا اگر می‌خواهد مهندس باشد، مهندس خوب باشد. اما اگر آدم خوبی نباشد، می‌شود «چو دزدی با چراغ آید، گزیده‌تر برد کالا».

❖ یاسی‌پور: کمی از دوران دانشگاه و دبیرستانتان برای ما بفرمایید. کدام معلم در شما خیلی تأثیر داشته است؟ آیا در تدریس، از معلم یا استادی در دانشگاه الگو گرفته‌اید؟

❂ از دوران ابتدایی که چیز زیادی یادم نیست و معلم اثرگذار هم نداشتم. در دبیرستان هم اگر شما آن سال‌ها یادتان باشد، حتی کتاب درسی هم نبود. من شهرستان ساری درس می‌خواندم و کتاب درسی حدود سه ماه بعد از سال

❂ یک معلم درست و دقیق، واقعاً می‌تواند در آیندهٔ شاگردان اثرگذار باشد.

❂ خیلی از مسائلی که برایم پیش آمده، به‌وسیلهٔ شاگردانم به راحتی رفع شده است.

تحصیلی به دستمان می‌رسید.

❖ یاسی‌پور: ما آن موقع کتاب‌های کهنه می‌خریدیم. معمولاً کتاب‌های سال قبل را استفاده می‌کردیم؛ چون موجود نبود.

❂ علاوه بر این، معلمان معمولاً نسبت به درسشان آگاه نبودند. مثلاً در شهرستان آقایی دبیر ریاضی ما بود که حتی مثال حل شدهٔ کتاب را غلط حل می‌کرد. شاگردان را موظف می‌کرد که هر کدام یک درس جبر را بخوانند و درس بدهند. حالا خودش هم مقداری کمک می‌کرد و بیگانه نبود؛ اما مسلط نبود. شما اگر آن زمان یادتان باشد، سال ششم ریاضی جبر، مثلثات، حساب استدلالی، هندسهٔ ترسیمی، هندسهٔ رقومی، متمم هندسه و مخروطات داشت. هر کدام از ما موظف بودیم یک قسمت را درس بدهیم. در واقع ما هم شاگرد بودیم، هم معلم. معلم هم سرپرستی می‌کرد، کلاس را مثلاً ساکت نگه می‌داشت و احیاناً کمک می‌کرد. این به سال ۳۶ـ ۳۷ مربوط می‌شود. البته این را بگویم که من ۵۰ سال است که درس می‌دهم. ۴۳ سال به صورت رسمی، ولی قبل از این که وارد دانشگاه شوم، هزینهٔ خودم را از طریق تدریس تأمین می‌کردم. من معمولاً زمانی که محصل بودم، تا ۹ شب درس می‌دادم. آن موقع هم که می‌دانید مثلاً به یک نفر درس می‌دادیم، ماهی ۳ تومان به ما می‌داد. به هر حال، با این پول زندگی‌ام را اداره می‌کردم.

اما فرمودید کدام استاد اثرگذار بود؟ دکتر منوچهر وصال، در دانشگاه تهران؛ به علت دقتی که در درس آنالیز داشت. مثلاً یک دفعه از ما امتحان گرفت و جمع نمرات ۲۵ نفر شاگرد کلاس ۳۰ شد؛ یعنی اگر جواب سؤال‌ها کامل نبود، صفر می‌داد. از او می‌پرسیدیم استاد چرا صفر می‌دهید؟ می‌گفت من فهمیدم که شما نفهمیدید. این برای من خیلی اهمیت داشت که در این درس دقت لازم را داشته باشم؛ یعنی برایم خیلی تفکربرانگیز می‌شد. به خاطر همین، درس ریاضی برای من پایه و بنیاد شد.

❖ یاسی‌پور: از هم‌شاگردی‌هایتان، غیر از آقای رستمی که حالا این‌جا حاضرند و در هیأت تحریریه، همکار شما هستند، چه کسانی را به یاد دارید؟

❂ به جز آقای رستمی که از افتخارات ماست و تألیف دایرةالمعارف هندسه از ایشان، شاید در دنیا بی‌نظیر باشد، آقای دکتر نشوادیان‌بخش، آقای یاسایی که خدا رحمتشان کند، آقای پرویز موسوی که دبیر هندسهٔ فوق‌العاده خوبی است و آقای ابراهیم صادقی که از دبیران فوق‌العاده ممتاز این کشور است. من فکر می‌کنم اکثر کسانی که در کار تدریس باقی مانده‌اند، از دبیران بی‌نظیر و جزو همکلاسی‌های ما هستند. واقعاً باعث افتخار من است که جزو این گروه از همکلاسی‌ها بوده‌ام.

❖ هاشمی موسوی: لطفاً نظر خود را دربارهٔ ریاضیات نظام قدیم و جدید بفرمایید؟

❂ من در مورد سه نظام اسبق، قدیم و جدید تحقیق کرده‌ام. هرچه به عقب‌تر می‌رویم، عمق مطالب بیشتر می‌شود. به اعتقاد من، آنچه که در مسائل ریاضیات اهمیت دارد، وجود مسائل ترکیبی در کتاب است. مسائل ترکیبی باعث می‌شود یک مسأله از چهار، پنج مبحث بگذرد و ارتباط آن‌ها را با هم نشان دهد. این خیلی جالب است، شما اگر مسائل امتحان‌های آموزش اسبق را نگاه کنید، مثلاً در امتحان نهایی به یک مسأله بیست نمره می‌دادند؛ اما آن مسأله، هشت تا سؤال داشت و همه در ارتباط با هم بودند. اصولاً طرح این گونه مسائل کار دشواری است. کار ساده‌ای نیست که شما بتوانید مسأله‌ای را طرح کنید که از ۴۰ مورد درسی، لااقل ۲۵ موردش را پوشش دهد.

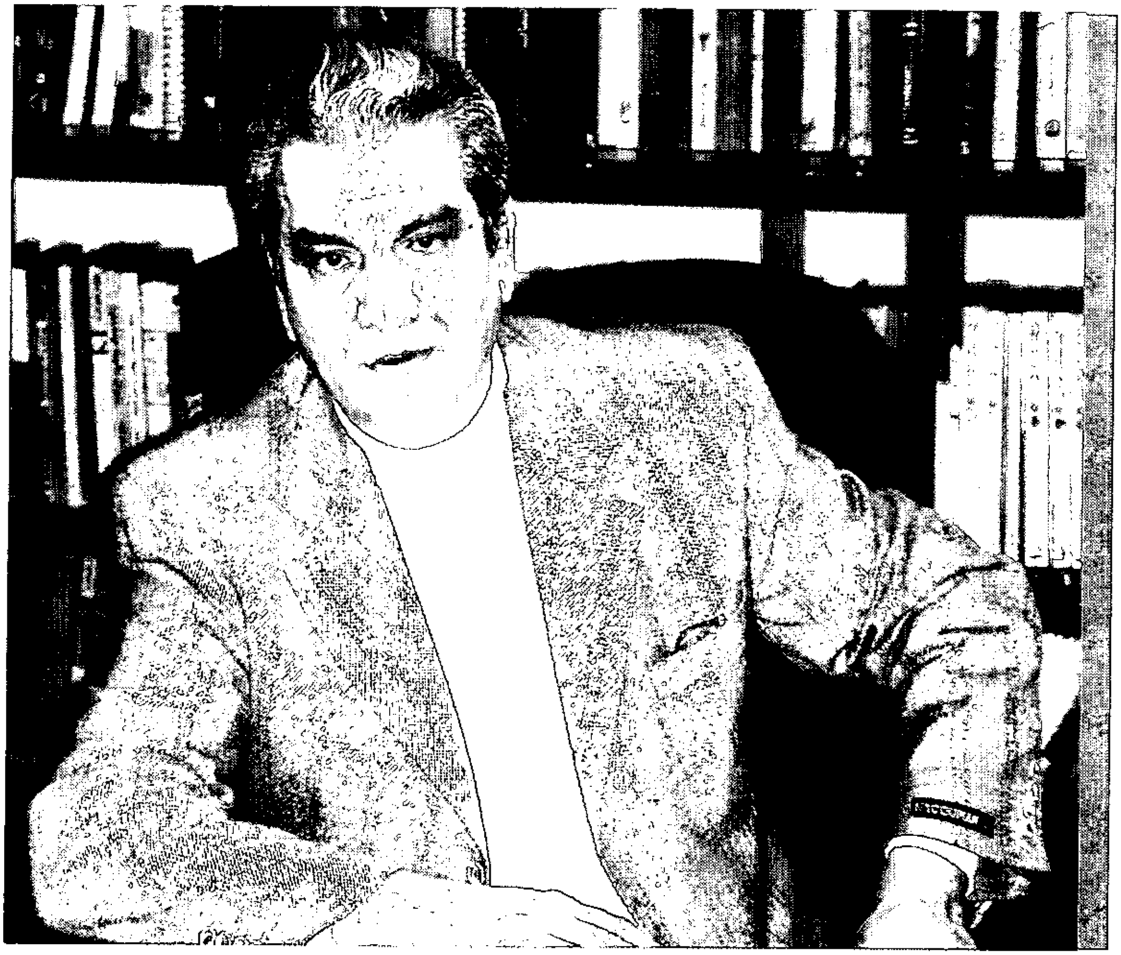
❖ یاسی‌پور: حالا همه جا همین طور شده است؛ چون ما کتاب‌های سابق را

در کشورهای دیگر هم که نگاه می‌کنیم در همان سابق و اسبق که می‌فرمایید، همان‌طور که شما می‌گویید، این‌طور بوده است؛ ولی حالا که نگاه می‌کنیم، این‌طور نیست. شاید این روش لازم بوده، یعنی به‌هرحال تجربه‌ای بود که در همه‌جا اتفاق افتاده و این تنها مختص ایران نبوده است. این را چه‌طور توجیه می‌کنید؟

❂ اولاً مسألهٔ مهمی که مطرح است، این است که، به نظر من در پشت پردهٔ سیاستگذاری آموزش، چیزهای دیگری نهفته است. من معتقدم آنچه که در آموزش و پرورش دنیا صورت می‌گیرد، ممکن است به صلاح آموزش و پرورش ما نباشد.

❖ امیری: نکته‌ای که شما در مورد عمق مطالب اشاره کردید، در کتاب‌های نظام جدید مشهودتر است؛ یعنی آن مثال معروفی که می‌گویند یک دریایی به عمق بیست سانتیمتر، واقعاً در حال حاضر در کتاب‌های ما اتفاق افتاده است.

❂ من فکر می‌کنم آموزش ایران مانند زمین کشاورزی است که شما به جای این‌که نیم‌متر شخم بزنید و محصول بکارید، پنج سانتیمتر شخم می‌زنید. محصول می‌دهد؛ اما حالا این چه‌قدر ارزش داشته باشد، دیگر آینده نشان می‌دهد. آنچه که مسلّم است، این‌که در ایران سرمایه‌گذاری آموزشی بسیار کم صورت می‌گیرد.



به اعتقاد من، آن‌چه که در مسائل ریاضیات اهمیت دارد، وجود مسائل ترکیبی در کتاب است. مسائل ترکیبی باعث می‌شود که یک مسأله از چهار، پنج مبحث بگذرد و ارتباط آن‌ها را با هم نشان دهد

❖ هاشمی موسوی: ریاضیات در ایران و کشورهای دیگر را چگونه مقایسه می‌کنید؟

✪ کلاً وقتی شما آموزش ریاضی را مقایسه می‌کنید، آموزش به چند عامل تقسیم می‌شود؛ اگر منظور عامل انسانی، یعنی معلم باشد، من معتقدم که ایران به دلایلی ـ حالا این دلایل شاید خارج از بحث ما باشد ـ معلمان ما کارآمدی بالایی دارند. حالا به هر دلیلی که باشد (اقتصادی، شخصیتی یا اجتماعی) معلمان ما واردترند. آموزش ما به نتیجهٔ مطلوب نرسیده است و این خود به عوامل دیگر آموزشی مربوط می‌شود. آن چیزی که مسلّم است، در کشورهای دیگر هم مدارس خصوصی وجود دارد؛ به‌خصوص در امریکا، که یک دیپلمه در آنجا، به اندازهٔ لیسانسیه بعضی از دانشکده‌های ایران بضاعت علمی دارد و آن‌جا دانشگاه‌هایی هم داریم که لیسانسیه‌اش به اندازهٔ دیپلم ما هم بضاعت علمی ندارد.

در آن‌جا امکانات خیلی بیشتر است. من به یک مدرسهٔ ابتدایی برخورد کردم که یک اتاق پر از چوب داشت که بچه‌ها می‌توانستند با آن‌ها مثلث‌های مختلف را بسازند و عمود منصف و ارتفاعش را رسم کنند. آزمایشگاه‌هایشان خیلی مجهز است. به آموزش بها می‌دهند و مشاوره‌های خوبی هم دارند.

❖ هاشمی موسوی: **پیشنهاد شما به معلمان به‌عنوان یک معلم موفق چیست؟**

✪ من معتقدم که هر معلمی باید نکاتی را به‌عنوان اصول رعایت کند. اولین آن‌ها، صداقت و نظم در کار است. بعد ملایمت در بیان مطالب جدید و سپس مقدمه‌چینی در بیان آن‌هاست؛ یعنی من معتقدم در کار تدریس، شتابزدگی اصلاً جایگاهی ندارد. حتماً باید مثال بزنیم و توضیح دهیم و اصلاً نباید عجله کنیم. حتماً به بچه‌ها وقت بدهیم که اگر می‌خواهند بنویسند، بنویسند. حتماً باید به شاگردان اجازه دهیم که هر سؤالی دارند، بکنند. باید ترسشان بریزد.

❖ یاسی‌پور: **من یاد صحبت آقای استاد شهریاری افتادم که ایشان از قول یکی از بچه‌ها نقل کرد که به من گفت، آقا شما معلمان آخر سال به ما نمره می‌دهید؛ ولی ما شاگردان همان جلسهٔ اول به شما نمره می‌دهیم. این صحبتی که فرمودید، باید ابتدا کاری کرد که با شاگردان رفیق باشیم و در واقع نمرهٔ بیست را از آنان احراز کنیم. شما اعتقادتان همین است؟**

✪ همین‌طور است. بچه‌ها همان جلسهٔ اول نمره را می‌دهند.

❖ یاسی‌پور: **این جا یک نکته وجود دارد و آن هم پیش‌داوری دانش‌آموزان نسبت به معلمان معروف است. خود این هم نکته‌ای است. مثلاً شما یک معلم معروفی هستید. بالأخره وقتی بچه‌ها بشنوند که آقای قندهاری می‌خواهد سر کلاس بیاید، ولو این که شما و تدریستان را ندیده باشند، به هر حال یک پیش‌داوری دارند. این پیش‌داوری چه قدر در این ارزش گذاری تأثیر دارد؟**

✪ به اعتقاد من خیلی مؤثر است. شما اگر در این زمینه فرد معروفی باشید، مسأله را هم که غلط حل کنید، مثلاً شاگرد می‌گوید من نمی‌فهمم، این معلم که مسأله را غلط حل نمی‌کند. واقعاً این تصور بین شاگردان هست. به اعتقاد من این فاکتور مثبت برای معلمان معروف وجود دارد.

❖ هاشمی: **رابطهٔ بین دانش‌آموز و معلم باید چگونه باشد که آن تا پایان سال تحصیلی حفظ شود؟**

✪ من معتقدم که به سنّ معلم هم بستگی دارد. مثلاً آقای شرقی الآن نمی‌تواند بگوید که شاگردان، بچه‌های من هستند. این جور درنمی‌آید که مثلاً دانش‌آموزی که الآن پیش‌دانشگاهی است، بچهٔ ایشان باشد. باید برادرانه و به‌عنوان یک دوست با او رفتار کند. اما من الآن مثل یک پدربزرگ رفتار می‌کنم.

۞ پیامبر اکرم صلوات‌الله علیه نمی‌فرماید من به پیغمبری مبعوث شدم، می‌فرماید من به معلمی مبعوث شدم و این خیلی مهم است.

❖ یاس‌پور: خوب این نکتهٔ بسیار مهمی است که دانش‌آموزان احساس ضعف و شکست نکنند؛ زیرا اگر دانش‌آموزی احساس شکست کند، دیگر سخت است که به تحصیلش ادامه دهد. جلال‌الدّین همایی، از استادان معاصر دانشگاه تهران، قطعه‌ای دارد که در واقع باید سرمشق آموزش هر معلم باشد. در آن قطعه می‌گوید:

تند و سرکش چو باد قهر مباش
که به شاخ جوان شکست دهی

باید مواظب باشی که شاخ جوان را نشکنی. نباید مانند باد قهر عمل کنی. باید خیلی ملایم باشی؛ چون به هرحال اگر با شاخ جوان تندی کنیم، می‌شکند و دیگر نمی‌تواند از جا بلند شود، و این نکتهٔ بسیار مهمی است.

۞ این مهم است که معلم درس را در آن سطحی که مورد نیاز شاگرد است، پایین بیاورد. پرگویی و گُنده‌گویی کردن سر کلاس، آفت کار معلم است.

❖ یاسی‌پور: کاملاً همان روش انبیاست و می‌گویند: «کلّموا الناس علیٰ قَدْرِ عقُولهم». انبیا هم ادعایشان این است که ما معلم هستیم؛ انّما بُعثتُ مُعَلّماً؛ پیغمبر اکرم صلوات‌الله علیه، نمی‌فرماید من به پیغمبری مبعوث شدم، می‌فرماید من به معلمی مبعوث شدم و این خیلی مهم است. برانگیخته شدن هم به خاطر معلمی بوده، نه پیامبری. در واقع پیامبری را یک نوع معلمی می‌داند و در واقع همان انتقال است. پیامبر یعنی منتقل کننده و دهندهٔ پیغام.

❖ امیری: استاد کمی در مورد کتاب‌های خودتان و این که چه اوقاتی را صرف نوشتن آن‌ها می‌کنید و تاکنون چند جلد کتاب از شما چاپ شده و اگر آماری از شمارگان آن‌ها دارید، بفرمایید.

۞ من معمولاً غیر از وقت‌های شام و ناهار، بقیهٔ اوقاتم را در دفتر کارم هستم. تقریباً روزی ۱۲ ساعت را می‌نویسم و شتابزده هم نمی‌نویسم. سعی می‌کنم در نوشته‌هایم آن‌چه را بیاورم که سر کلاس بیان می‌کنم. اول فکر می‌کنم که می‌خواهم چه بکنم و یک چارت و نقشهٔ کلی برایش می‌کشم. این نقشه را به چند قسمت تقسیم می‌کنم، بعد هر قسمت را ریز می‌کنم و سپس نوشتن را شروع می‌کنم. تعداد کتاب‌های چاپ شده‌ام ۳۸ عنوان است. شش، هفت عنوان هم زیر چاپ دارم. فکر می‌کنم شمارگان آن‌ها هم بالای یک میلیون باشد.

❖ امیری: لطفاً بفرمایید اولین کتاب شما در چه سالی چاپ شد و در آن هنگام، چه احساسی داشتید؟ وبعد از چاپ آخرین کتابتان چه احساسی داشتید؟

۞ اولین کتابی که چاپ کردم، نامش الان یادم نیست؛ ولی سال ۵۳ بود. البته خوشحال شدم. بعد از این که این کتاب را دیدم، رفتم سر کلاس و خیلی از مسائلش را غلط حل کردم؛ چون بسیار هیجان‌زده بودم. بچه‌ها هم از من می‌پرسیدند: آقا امروز چه شده که مرتب اشتباه می‌کنید؟

❖ صدر: چه انگیزه‌ای باعث شد که بنویسید؟

۞ آنچه که مسلّم است، این است که آدم معمولاً اول رفتارهایش را انجام می‌دهد، سپس به دنبال این می‌رود که چرا من این کار را کردم. بسیاری از شاعران شعر می‌گویند و شما تحلیل می‌کنید، و وقتی از شاعر می‌پرسید، می‌بینید شاعر اصلاً قصدش آن نبوده است. شخصی به نام آقای پاشایی هست که داستان‌های عرفانی ـ علمی ترجمه می‌کند. یک جلد از تاریخ ویل‌دورانت را هم او ترجمه کرده، اما ایشان مفسر شعر است. شما می‌دانید در دنیا ژرژ پمپیدو در فرانسه مفسر شعر است و در ایران آقای پاشایی. او با آقای احمد شاملو نزدیکی و صمیمیت داشت و هر دو هم با من ارتباط نزدیک داشتند. یادم هست یک روز من و



آقایان احمد شاملو و پاشایی در خانهٔ آقای پاشایی نشسته بودیم. آقای شاملو شعری به نام **طاق طاقی های آبی** دارد. آقای پاشایی این شعر را تحلیل کرد. آقای شاملو گفت: این طور نیست؛ اما آقای پاشایی گفت: آقای شاملو تو خودت هم این را نمی‌دانی، و شاملو قبول کرد. من منظورم این است که ما وقتی کاری می کنیم، ممکن است روز اول دلایلش برای خودمان روشن نباشد و بعدها معلوم شود. این که فرمودند چه انگیزه‌ای باعث شد من بنویسم، برای خودم روز اول خیلی روشن نبود؛ اما الان می‌توانم توضیح بدهم که چه انگیزه‌ای باعث شد. من تازه از امریکا بازگشته بودم که انقلاب شده بود و بیکار بودم. در خانه نشستم و یک سال طول کشید که دومین کتاب را نوشتم که نامش جبر و آنالیز بود.

❖ **هاشمی موسوی: معیارهای تدریس موفق چیست؟**

۞ فهرست‌وار می گویم: نظم، بضاعت علمی، آرام بیان کردن مطلب و شروع مطلب از چیزهایی که دانش‌آموز می داند و همچنین متانت، رفاقت، صمیمیت و صداقت معلم. این مجموعه به نظر من باعث می شود که یک معلم، آدم موفقی باشد.

❖ **یاسی‌پور: آخرین سؤال این که نظر شما دربارهٔ کتاب‌های درسی نظام جدید چیست؟**

۞ کتاب‌های نظام جدید را کسانی نوشته‌اند که حداقل می‌توانم بگویم بعضی از آن‌ها نویسندهٔ کتاب نیستند. ممکن است مؤلف استاد دانشگاه باشد؛ اما نتواند بنویسد. به اعتقاد من، محقق، مؤلف و معلم، سه مقولهٔ جدا از هم هستند. تألیفات امروزه، در این مرحله، ترجمه‌های بد و انتخاب‌های درهم هستند.

❖ **یاسی‌پور: با تشکر از شما و سایر دوستان، که در این گفت‌وگو شرکت کرده‌اند.**



۲

حمیدرضا امیری

احتمال شرطی، پیشامدهای مستقل و وابسته

برای
دانش‌آموزان
دوره پیش دانشگاهی

اشاره: در شماره قبل دربارهٔ مقدمات و مفاهیم اولیه احتمال مانند پدیده تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامد تصادفی بحث کردیم، همچنین پیشامد $A \cap B$ یعنی رخداد توأم A و B را بررسی کردیم. اکنون پیش از ادامهٔ بحث احتمال شرطی، به حل سه تمرین طرح شده در پایان قسمت اول می‌پردازیم:

حل تمرین ۱: الف. سه تاس را ریخته‌ایم می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه اول باشند؛ به شرط آن که بدانیم مجموعشان از ۹ کمتر است، پس پیشامدی که رخ داده، یعنی مجموع کمتر از ۹ را B فرض می‌کنیم و پیشامد این را که هر سه اول باشند، A در نظر می‌گیریم و با استفاده از رابطهٔ زیر احتمال را محاسبه می‌کنیم:

برای محاسبهٔ تعداد حالت‌های این که مجموع سه تاس کمتر از ۹ باشد، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

$$p(A / B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

اعداد تاس‌ها	تعداد حالت‌ها
۱ و ۱ و ۱	۱
۱ و ۲ و ۱	۳
۱ و ۲ و ۲	۳
۲ و ۲ و ۲ *	۱
۳ و ۲ و ۱	۶
۳ و ۴ و ۱	۶
۱ و ۳ و ۳	۳
۲ و ۳ و ۳ *	۳
۳ و ۲ و ۲ *	۳
۴ و ۱ و ۱	۳
۵ و ۱ و ۱	۳
۶ و ۱ و ۱	۳
۱ و ۲ و ۴	۶
۱ و ۲ و ۵	۶
	۵۰

برای محاسبهٔ تعداد اعضای پیشامد A مجموعهٔ $A_1 = \{۲,۳,۵\}$ را در نظر گرفته و در این صورت $A = A_1 \times A_1 \times A_1$ خواهد بود که $n(A) = ۳^۳ = ۲۷$ ؛ امّا فقط حالت‌هایی که در جدول در کنار آنها * قرار گرفته، $(A \cap B)$ تشکیل می‌دهند؛ پس $n(A \cap B) = ۱ + ۳ + ۳ = ۷$ ، بنابراین:

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۷}{۵۰}$$

ب. در این قسمت می‌خواهیم احتمال هر سه فرد را حساب کنیم؛ به شرط این که بدانیم مجموعشان ۷ است؛ پس مجموع ۷ را پیشامد B در نظر می‌گیریم که رخ داده است و هر سه فرد را پیشامد A فرض می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱,۱,۵ \to ۳ \\ ۲,۱,۴ \to ۶ \\ ۳,۲,۲ \to ۳ \\ ۳,۳,۱ \to ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow n(B) = ۱۵$$

جمع حالت‌ها = ۱۵

در بین این ۱۵ حالت، فقط ۶ حالت وجود دارد که هر سه تاس فرد هستند (سه حالت برای [۱,۱,۵] و سه حالت برای [۳,۳,۱]، پس $n(A \cap B) = ۶$ ؛

بنابراین: $p(A/B) = \frac{۶}{۱۵}$

حل تمرین ۲: الف. در پرتاب سه سکه می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه H بیایند؛ به شرط آن‌که بدانیم حداقل یکی از آنها H است.

حداقل یکی از سکه‌ها H است = B

هر سه سکه H بیاید = A

$B' =$ هر سه سکه T است $\Rightarrow n(B') = ۱ \Rightarrow n(B) = ۲^۳ - ۱ = ۷$

$(A \cap B) = \{(H,H,H)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۱ \Rightarrow p(A/B) = \frac{۱}{۷}$

ب. در این حالت می‌خواهیم احتمال آن را محاسبه کنیم که دو سکه T بیاید به شرط آن‌که بدانیم حداکثر دو سکه H است.

(هر سه سکه H است = B') حداکثر دو سکه H است = B

دو سکه T بیاید = A

$$B = \begin{Bmatrix} (T,T,T),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,H), \\ (H,H,T),(H,T,H),(T,H,H) \end{Bmatrix}$$

$$A = \{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$$

$$n(A \cap B) = ۳,\ \ n(B) = ۷ \Rightarrow p(A/B) = \frac{۳}{۷}$$

حل تمرین ۳: الف. طبق فرض در جعبه ۴ مهره آبی، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره سبز قرار دارد و سه مهره را تصادفی خارج کرده‌ایم و می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که هر سه آبی باشند؛ به شرط آن‌که بدانیم هر سه همرنگ هستند.

هر سه مهره همرنگ هستند = B

هر سه مهره آبی باشند = A

$$n(B) = \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} + \binom{۳}{۳} = ۱۶$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow n(A \cap B) = n(A) = \binom{۴}{۳} = ۴$$

$$\Rightarrow p(A/B) = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

ب. در این حالت می‌خواهیم احتمال آن را محاسبه کنیم که ۲ مهره آبی و ۱ مهره سبز باشد؛ به شرطی که بدانیم هیچ‌کدام قرمز نیستند.

هیچ‌کدام از سه مهره قرمز نیستند = B

۲ مهره آبی و ۱ مهره سبز باشد = A

$$n(B) = \binom{۳+۴}{۳} = \binom{۷}{۳} = ۳۵,\ \ A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A) = \binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۱} = ۱۸ \Rightarrow p(A/B) = \frac{۱۸}{۳۵}$$

حال به بحث اصلی خودمان بازمی‌گردیم و برای شروع، مثال معروفی را طرح می‌کنیم که غالباً برداشت دیگری از آن شده و غلط تفسیر می‌شود.

مثال. دو تاس آبی و قرمز را با هم می‌ریزیم و پیشامد A را رو شدن عدد زوج برای تاس آبی و پیشامد B را رو شدن عدد فرد برای تاس قرمز تعریف می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که A و B با هم رخ بدهند.

حل: درواقع باید $p(A \cap B)$ را به دست آوریم. لازم به تذکر است اگر شما پیشامد A را به صورت $A = \{۲,۴,۶\}$ و پیشامد B را به صورت $A = \{۱,۳,۵\}$ تعریف کنید، $(A \cap B) = \varnothing$ بوده و $p(A \cap B) = ۰$؛ در صورتی که می‌دانیم A و B می‌توانند با هم رخ بدهند و احتمال آن صفر نیست، و اشکال در این است که ما باید همواره A و B را از یک فضای نمونه‌ای در نظر بگیریم؛ زیرا تابع احتمال روی یک فضا تعریف می‌شود و فضای نمونه‌ای در این مسأله، دارای ۳۶ زوج مرتب است؛ بنابراین باید A و B را به صورت‌های زیر تعریف کنیم:

$$A = \left\{(a,b) \in S \middle| a \in \{۲,۴,۶\}, b \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\right\}$$

$$B = \left\{(a,b) \in S \middle| a \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}, b \in \{۱,۳,۵\}\right\}$$

$$n(A) = ۳ \times ۶ = ۱۸,\ \ n(B) = ۶ \times ۳ = ۱۸$$

$$A \cap B = \left\{(a,b) \in S \middle| a \in \{۲,۴,۶\}, b \in \{۱,۳,۵\}\right\}$$

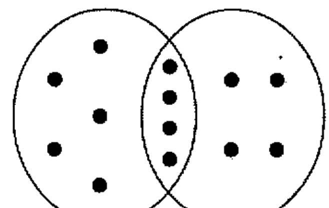
$$\Rightarrow n(A \cap B) = ۳ \times ۳ = ۹$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

در این مرحله، با توجه به مطالب ذکر شده و مثال‌های حل شدهٔ قبل، به‌راحتی می‌توان برای احتمال شرطی، مُدلی به صورت زیر طراحی و به فرمولی که قبلاً از آن استفاده شد، برسیم: فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند؛ به طوری که $A \cap B \neq \varnothing$ (مطابق شکل)، به وضوح مشاهده می‌شود که اگر پیشامد B رخ داده باشد و بخواهیم احتمال رخداد A را به شرط آن‌که B رخ داده باشد، حساب کنیم؛ یعنی بخواهیم $p(A / B)$ را به دست آوریم، این احتمال با احتمال رخداد $(A \cap B)$ رابطهٔ مستقیم دارد؛ یعنی

$$p(A / B) = kp(A \cap B) \quad (۱)$$

(هرقدر اشتراک A و B بیشتر باشد، چون B رخ داده، به همان نسبت $p(A / B)$ بزرگ‌تر و هرقدر اشتراک A با B کمتر باشد، $p(A / B)$ کوچک‌تر است). حال اگر قرار دهیم $A = B$، رابطهٔ (۱) به صورت $p(B / B) = kp(B \cap B)$ یا $۱ = kp(B)$ حاصل می‌شود.



(توجه دارید که احتمال رخداد پیشامد B به شرط آن‌که خودش رخ داده باشد؛ یعنی $p(B / B)$ برابر با ۱ است) که $k = \frac{۱}{p(B)}$ به دست می‌آید و اگر این مقدار در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت: $p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$، که می‌توان آن را به صورت زیر ساده کرد:

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

پیش از این که تعریف پیشامدهای مستقل و وابسته را مطرح کنیم، یادآوری می‌کنیم که دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را ناسازگار می‌نامیم؛ در صورتی که $(A \cap B) = \varnothing$ و سازگار می‌نامیم هرگاه $(A \cap B) \neq \varnothing$.

پیشامدهای مستقل از هم:

دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را مستقل از یکدیگر می‌نامیم؛ هرگاه رخداد یا عدم رخداد هریک، روی رخداد دیگری هیچ تأثیری نداشته باشد؛ در غیر این صورت دو پیشامد را وابسته می‌نامیم.

مثال۱. فرض کنیم تاسی را دوبار ریخته‌ایم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم ریخته‌ایم)، اگر پیشامد A را زوج آمدن تاس اوّل و پیشامد B را فرد آمدن تاس دوم تعریف کنیم، با توجه به تعریف، واضح است که A و B مستقل از یکدیگرند؛ یعنی این که تاس اوّل زوج بیاید یا زوج نیاید، تأثیری در فرد آمدن تاس دوم ندارد و برعکس.

مثال ۲. فرض کنید یک تاس و یک سکه را با هم می اندازیم و دو پیشامد A و B را به ترتیب «زوج آمدن تاس» و «رو شدن H» در نظر بگیریم؛ واضح است که A و B مستقل از یکدیگرند.

توجه دارید که A و B هر دو متعلق به فضای نمونه‌ای و ۱۲ عضوی S هستند.

$$A = \left\{(a,b) \in S \middle| a \in \{۲,۴,۶\}, b \in \{H,T\}\right\}$$

$$B = \left\{(a,b) \in S \middle| a \in \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}, b \in \{H\}\right\}$$

تذکر مهم: با توجه به تعریف پیشامدهای مستقل از هم،

واضح است که اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر باشند و B رخ داده باشد، تأثیری در رخداد A ندارد و اگر A رخ داده باشد، تأثیری در رخداد B ندارد؛ یعنی می‌توان نوشت:

$$B \Leftrightarrow \begin{cases} P(A/B)=P(A) \\ P(B/A)=P(B) \end{cases}$$ و A مستقل از یکدیگرند

نتیجه‌گیری مهم: قبلاً ثابت کردیم که $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ یا $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$ که با توجه به تذکر قبل می‌توان گفت:

$A \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ و B مستقل از یکدیگرند.

(بنابراین یکی از راه‌های بررسی این که دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S مستقل از یکدیگرند یا وابسته‌اند، بررسی برقراری تساوی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ است.)

در واقع تساوی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ **به نام قانون ضرب احتمالات** برای دو پیشامد A و B در حالت کلّی نام دارد و در حالتی که A و B مستقل از یکدیگر باشند، به صورت $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ نوشته می‌شود.

به عنوان مثال، برای فهم بیشتر این نتیجهٔ مهم، به مثال ابتدای این بحث بر می‌گردیم:

در مثال ۱، یعنی ریختن ۲ تاس (یا ۱ تاس دوبار)، اگر بخواهیم A و B با هم رخ بدهند، یعنی تاس اول زوج و تاس دوم فرد بیاید، خواهیم داشت:

$A=\{(a,b)\in S | a\in\{۲,۴,۶\}, b\in\{۱,۲,...,۶\}\}$

$B=\{(a,b)\in S | a\in\{۱,۲,...,۶\}, b\in\{۱,۳,۵\}\}$

$n(A)=۳\times۶=۱۸ \quad , \quad n(B)=۶\times۳=۱۸$

$(A\cap B)=\{(a,b)\in S | a\in\{۲,۴,۶\}, b\in\{۱,۳,۵\}\}$

$\Rightarrow n(A\cap B)=۳\times۳=۹$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(A)}=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=P(A\cap B)$$

درنتیجه A و B مستقل از یکدیگرند.

طرح یک مسألهٔ بسیار مهم

فرض کنید تاسی را دوبار می‌ریزیم و پیشامدهای A و B را در دو حالت به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم. در هر حالت مستقل یا وابسته بودن A و B را ابتدا از طریق تعریف و سپس با استفاده از تساوی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ تحقیق کنید.

(الف)
- A = پیشامد این که تاس اول ۴ بیاید
- B = پیشامد این که مجموع دو تاس ۹ باشد

واضح است که اگر تاس ۴ نیاید (A رخ ندهد) و مثلاً ۱ یا ۲ بیاید، امکان رخداد B وجود ندارد (تاس دوم حداکثر ۶ هم که بیاید، مجموع دو تاس ۹ نخواهد شد)، پس عدم رخداد A روی B تأثیرگذار است و لذا A و B وابسته‌اند.

از طرفی داریم:

$A=\{(a,b)\in S | a=۴ \ , \ b\in\{۱,۲,...,۶\}\}$

$B=\{(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)\} \ , \ A\cap B=\{(۴,۵)\}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

$P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۵۴}\neq\frac{۱}{۳۶}=P(A\cap B)\Rightarrow$ B و A وابسته‌اند.

(ب)
- A = پیشامد این که تاس اول ۴ بیاید
- B = مجموع دو تاس ۷ باشد

در نگاه اول، قسمت (ب) با (الف) فرقی ندارد و شاید این طور به نظر برسد که عدم رخداد A، یعنی این‌که تاس اول ۴ نیاید، روی رخداد B تأثیرگذار است؛ ولی ابداً این‌طور نیست؛ زیرا تاس اول ۴ بیاید یا نیاید، روی مجموع ۷ تأثیری ندارد (تاس اول هر عدد غیر از ۴ نیز که بیاید، برای مجموع ۷ امکان وجود دارد) پس A و B مستقل از یکدیگرند. حال از طریق

فرمول، این موضوع را بررسی می‌کنیم:

$$n(A)=۶\ ,\ B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

$$A\cap B=\{(۴,۳)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}\ ,\ P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

و $P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس A و B مستقل از یکدیگرند.

رابطهٔ بین پیشامدهای مستقل و وابسته با پیشامدهای سازگار و ناسازگار

دیدیم که اگر A و B ناسازگار باشند $(A\cap B)=\varnothing$ و $P(A\cap B)=۰$ ، پس اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و مستقل از هم باشند، باید لااقل یکی از دو پیشامد غیرممکن باشد؛ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=۰\\ P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\end{array}\right\}\Rightarrow P(A)\times P(B)=۰$$

$$\Rightarrow P(A)=0 \text{ یا } P(B)=0$$

به عبارت دیگر، اگر A و B هر دو پیشامدهای غیرممکن نباشند؛ یعنی $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$ ، در این صورت نمی‌توانند مستقل از هم و در عین حال ناسازگار باشند.

در مسألهٔ قبل، مشاهده کردید که $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$ (در هر دو حالت (الف) و (ب) پس B و A در هر دو حالت سازگارند، ولی در حالت (الف) وابسته و در حالت (ب) مستقل از هم بودند. پس دو پیشامد سازگار می‌توانند مستقل یا وابسته باشند.

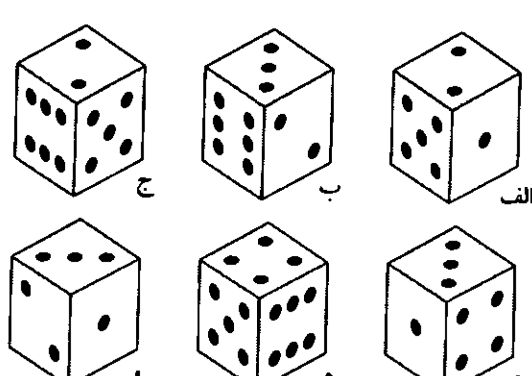
در قسمت بعدی، به معرفی چند رابطه و قانون مهم و کاربردهای آنها در حل مسائل احتمال شرطی خواهیم پرداخت.



تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

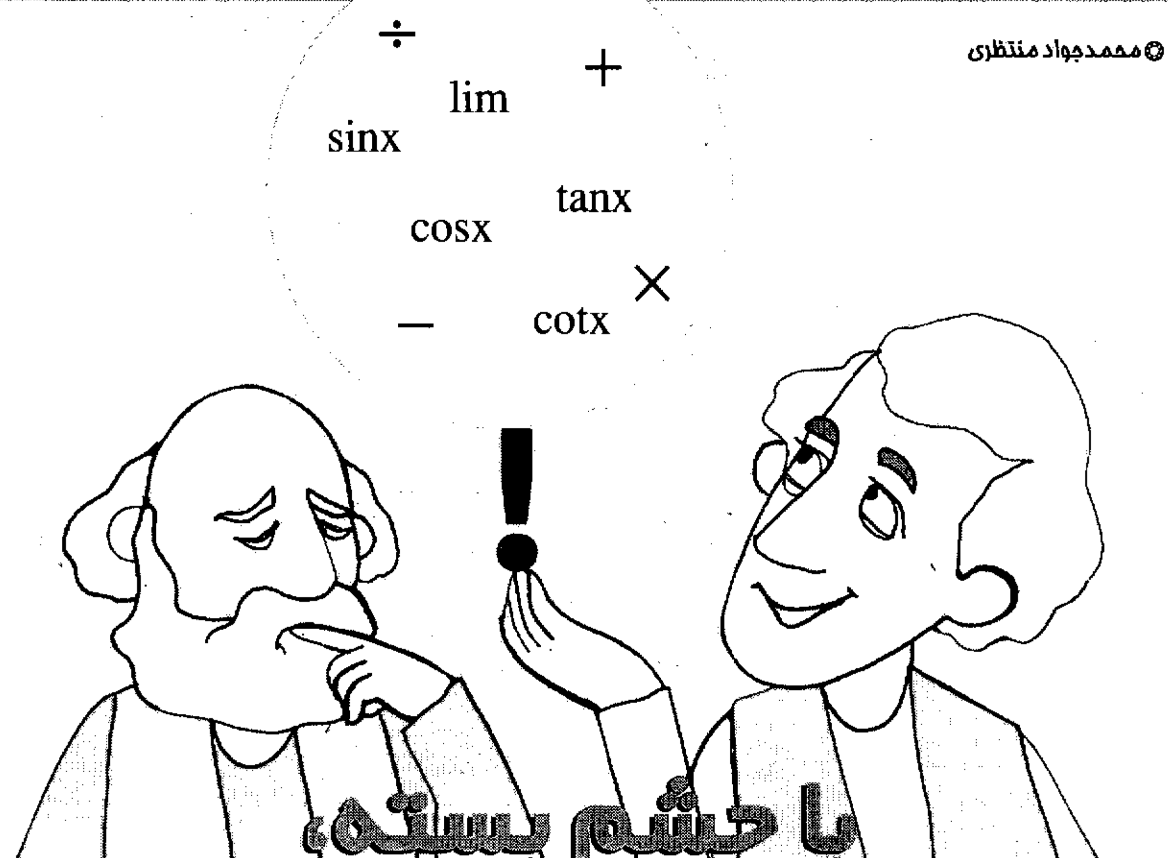
نماهای تاس‌های متفاوت

این شش شکل، مربوط به دو تاس متفاوت است. هر مجموعهٔ سه‌تایی از اینها (شش شکل) نماهای یکی از این دو تاس را نشان می‌دهند. این تاس‌ها استاندارد نیستند (تاس استاندارد یا معمولی، به تاسی گفته می‌شود که مجموع خال‌های هر دو وجه مقابل آن، ۷ باشد. برای مثال، وجه ۱ مقابل وجه ۶، وجه ۲ مقابل وجه ۵ و وجه ۳ مقابل وجه ۴ باشد ـ م). هر سه شکلی را که متعلق به یکی از این دو تاس است، مشخص کنید.



پاسخ: (الف، ب، ج) و (د، هـ، و)

محمدجواد منتظری



با چشم بسته، وارد دنیای ریاضی نشوید!

امروزه بر کسی پوشیده نیست که موفقیت در هر امری، مستلزم علم کامل و اشراف دقیق بر موضوع است. یک معمار اگر نتواند ساختمانی را که قصد دارد بسازد، تجسّم کند، از قدرت تحمل مصالح، ستون‌ها و دیگر اجزای آن اطلاع نداشته باشد یا از امکانات لازم در ساختمان برای زندگی بی‌خبر باشد، نمی‌تواند ساختمانی قابل قبول بسازد.

یک مکانیک اگر از کلیهٔ اجزای اتومبیل و نحوهٔ کارکرد آن‌ها و ظرافت‌هایشان بی‌اطلاع باشد، هرگز مکانیک خوبی نخواهد شد.

با وجود این، بعضی افراد در انجام امور خود عجول هستند و به‌طور شایسته به کار خود نمی‌پردازند. برای مثال، شما در زنگ ورزش، کدام معلم را دوست دارید؟ معلمی را که توپی را به شما بدهد تا به بازی مشغول شوید یا معلمی که نیم ساعت از زنگ ورزشتان را برای آمادگی و گرم کردن بدنتان برای انجام ورزش مورد نظر، اختصاص دهد، و به شما چند تکنیک را آموزش دهد و بخواهد تکنیک‌های مربوطه را در زمین انجام دهید. قطعاً اکثر شما مورد اول را می‌پسندید؛ ولی باید بدانید، با این مربی شما هرگز ورزشکار نخواهید شد و تنها ساعاتی را به تفریح و وقت‌گذرانی پرداخته‌اید.

پس اگر موفقیت در هر امری، مستلزم دید کامل است، آیا برای ورود به دنیای ریاضیات ـ که امروزه اهمیت آن بر هیچ عالمی اعم از علوم مختلف پوشیده نیست و بر آن‌ها مبرهن است که علم و دید دقیق ریاضی، ابزار لازم برای موفقیت است ـ نباید با چشمان باز وارد شد؟

بنابراین در مواجهه با این علم و در حل مسائل مربوطه، نباید با عجله و بدون درک لازم، تنها به دنبال راه‌حل‌های تستی باشیم.

در مدارس امروز ما، متأسفانه دانش‌آموزان به این آفت مبتلا شده‌اند و تعریف درستی از ریاضیات ندارند. ظاهر ریاضی را نظاره می‌کنند و از ورود به دنیای زیبا و شگفت‌انگیز

آن خودداری می‌کنند، و خود را از درک این لذائذ محروم می‌کنند؛ بدون آن که بیندیشند رمز و راز موفقیت در چیست. چنین افرادی هرگز نمی‌توانند از ریاضی لذت ببرند و از مواهب آن بهره جویند، و همیشه خسته‌اند و موفقیت چندانی نخواهند یافت. آنان ریاضی را در حفظ نکات و حل تست‌های مختلف جست‌وجو می‌کنند؛ مانند کاری که آن‌ها در میدان فوتبال انجام می‌دهند و از گرم کردن خود و آماده کردن بدنشان برای انجام ورزش مورد نظر خودداری می‌کنند.

اما راه و چارهٔ کار چیست؟

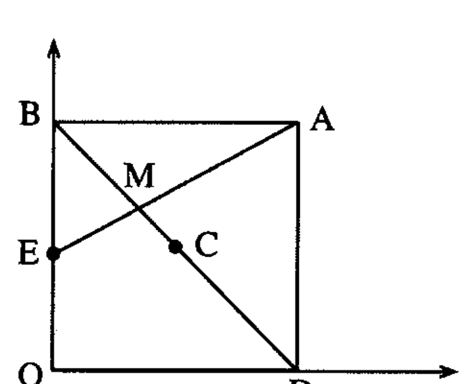
پیش از هر توصیه، یادآور می‌شویم که برای به‌فعل درآوردن سلول‌های مغزی، باید تمرینشان داد، باید به مرور زمان با ورزش‌های مغزی، یعنی سعی در حل مسائل فکری، آن‌ها را به فعالیت واداشت و این عمل باید از اوان دبستان و حتی پایین‌تر آغاز شود، و با اندیشه کردن در مسائل سادهٔ فکری، راه فعالیت‌های بعدی آن‌ها را هموار ساخت. معماهای ریاضی و مسائل هندسه، این وظیفه را به‌خوبی انجام می‌دهند. بنابراین توصیه می‌شود با علاقه و حوصله به آن‌ها بپردازید و از این که ساعت‌ها و روزها روی آن فکر کنید، خسته نشوید. در مرحلهٔ دوم، سعی کنید مطالب ریاضی را به‌طور عمیق یاد بگیرید. در واقع، پیش از فهم دقیق موضوع، از یادگیری نکات تستی بپرهیزید. بسیاری از دانش‌آموزان بوده‌اند که تنها اوقات خود را مصروف یادگیری و حفظ نکات تستی کرده‌اند؛ ولی چون از عمق این مطالب بی‌خبر بوده‌اند، نتوانسته‌اند از آن نکات نیز به‌خوبی استفاده کنند و در کنکور ناموفق بوده‌اند. در واقع، فهم دقیق مطالب، شما را در یادگیری نکات تستی و به‌کارگیری مطلوب آن‌ها، یاری می‌کند.

به عقیدهٔ نگارنده، یکی از ارزشمندترین کتاب‌هایی که تاکنون در مرکز تألیفات کتب درسی چاپ شده است و موارد ذکر شده را به‌خوبی انجام می‌دهد، کتاب ریاضی تکمیلی و هنر حل مسأله است. کتابی که به‌طور شگفت‌آمیزی، توانایی‌های شما را در حل مسائل درسی، اعم از ریاضی و دیگر دروس و حتی تست‌ها بالا می‌برد؛ کتابی که در توسعهٔ قدرت فهم و درک و سرعت حل مسائل، به شما کمک می‌کند. بسیار توصیه می‌شود دانش‌آموزان سال اوّل این درس را جدّی بگیرند. هرچه روی این درس وقت بگذارید، باز کم است. بسیاری از توانایی‌هایی را که لازمهٔ موفقیت برای تحصیل در دانشگاه‌هاست، با این درس تقویت می‌شود. اگر از این درس غافل شوید، فرصت مغتنمی را از دست داده‌اید؛ فرصتی را که شاید دیگر هرگز به‌دست نیاورید.

از توصیه‌های دیگر این است که سعی کنید مسائل ریاضی را خودتان حل کنید. هرگز به یافتن راه‌حل مسأله اکتفا نکنید. سعی کنید خودتان برای هر مسأله‌ای جوابی بیابید، و هر مسأله ریاضی را از چند روش حل کنید. اکثر مسائل ریاضی، راه‌حل منحصربه‌فردی ندارند. تلاش کنید بیندیشید، تفکرات خود را بر روی کاغذ بیاورید و در انتها افکار خود را به معلمان خود ارائه کنید تا اشکالات خود را بیابید. اگر مدتی این روند را دنبال کنید، درخواهید یافت که به‌طور معجزه‌آسایی قدرت تحلیل بسیاری از مسائل ریاضی را یافته‌اید.

در پایان، حل یکی از مسائل ریاضی را که در کنکور سال قبل آمده است، به سه روش ارائه می‌کنیم. امیدواریم در شما انگیزه‌ای ایجاد شود تا از دیدگاه‌های گوناگون به مسائل بنگرید.

مسأله. در یک مربع به ضلع $4\sqrt{2}$، خط واصل از رأس به وسط ضلع مقابل، قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از وسط مربع چیست؟



راه‌حل اول. مطابق شکل، نقطهٔ O را مبدأ اختیار می‌کنیم و محورهای دستگاه مختصات را بر امتداد اضلاع OD و OB بنا می‌کنیم (روش تحلیلی). آن‌گاه مختصات نقاط A، B،

D، E و C (مرکز مربع) به‌ترتیب برابر خواهند بود با:

$B(0, 4\sqrt{2})$ و $D(4\sqrt{2}, 0)$ و $E(0, 2\sqrt{2})$

$A(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ و $C(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

حال معادلات خطوط گذرنده از AE و BD را به‌دست می‌آوریم:

$$AE: y - 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2\sqrt{2}$$

$$BD: y - 4\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2} - 0}{0 - 4\sqrt{2}}(x - 0) \Rightarrow y = -x + 4\sqrt{2}$$

اما M محل تلاقی این دو خط است، لذا با حل دستگاه زیر، مختصات M را به‌دست می‌آوریم:

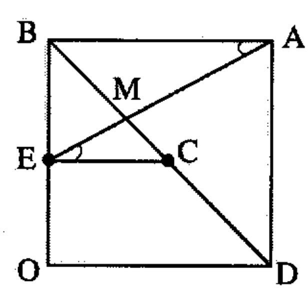
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2\sqrt{2} \\ y = -x + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$$

و در آخر با داشتن مختصات نقاط C و M، طول CM را می‌یابیم:

$$CM = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

راه‌حل دوم: با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} \angle AMB = \angle CME \text{ (متقابل به رأسند)} \\ \angle BAM = \angle MEC \text{ (CE∥AB و AE مورب)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle CME \text{ (بنابر حالت ۲ زاویهٔ مساوی)}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{EM}{AM} = \frac{CE}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow CM = \frac{1}{2}BM$$

$$\Rightarrow CM = \frac{1}{3}CB$$

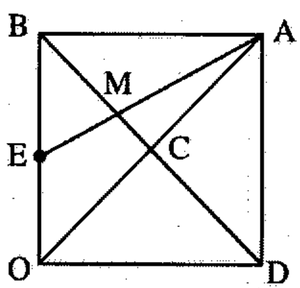
پس:

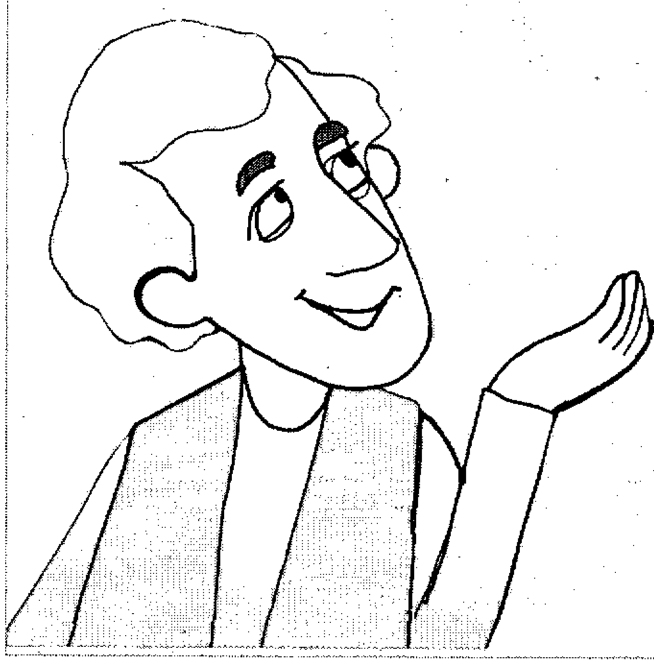
$$\Rightarrow CM = \frac{1}{3}CB = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}BD\right) = \frac{1}{6}BD = \frac{1}{6}(\sqrt{2}AB)$$

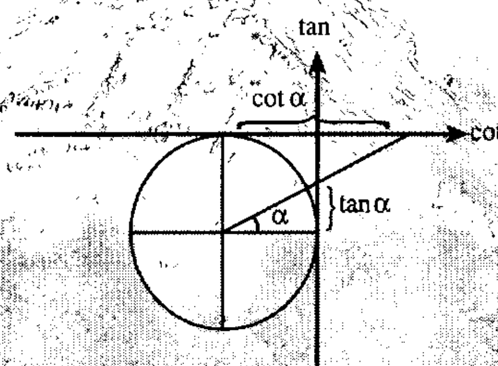
$$= \frac{\sqrt{2}}{6} \times 4\sqrt{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

راه‌حل سوم. M محل تلاقی میانه‌های مثلث ABO است و می‌دانیم که فاصلهٔ محل تلاقی میانه‌های هر مثلث تا رأس، $\frac{2}{3}$ و تا ضلع مقابل، $\frac{1}{3}$ میانهٔ نظیر است؛ پس

$$CM = \frac{1}{3}CB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}BD = \frac{1}{6} \times 8 = \frac{4}{3}$$







معادله های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی

برای دانش آموزان سال اول و دوم متوسطه

اشاره: در شمارهٔ قبل حل معادله‌های مثلثاتی $tgX = tg\alpha$ و $\cot gX = \cot g\alpha$ را ملاحظه کردید، اینک در ادامه مطلب مثال‌هایی را دربارهٔ این نوع معادله‌های مثلثاتی می‌آوریم.

آزمون ۱ . جواب کلی معادلهٔ $3tg3x-\sqrt{3}=0$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$ ۴) $3k\pi+\frac{\pi}{18}$

حل: گزینهٔ ۳ درست است؛ زیرا داریم:

$$3tg3x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 3tg3x=\sqrt{3} \Rightarrow tg3x=\frac{\sqrt{3}}{3}=tg\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$$

آزمون ۲ . جواب کلی معادلهٔ $\cot g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}=0$ کدام است؟

۱) $2k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$

۳) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{3}$

حل: گزینهٔ ۱ درست است؛ زیرا داریم:

$$\cot g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2+\sqrt{3}=\cot g\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{3}$$

آزمون ۳ . جواب‌های معادلهٔ $tg4x=\cot g\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$ کدام‌اند؟

۱) $x=\frac{1}{4}\left(k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ ۲) $x=\frac{1}{8}\left(k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

۳) $x=\frac{1}{4}\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ ۴) $x=\frac{1}{8}\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ ۴ درست است؛ زیرا داریم:

$$\operatorname{tg}4x = \cot g\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}4x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 4x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{8}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

آزمون ۴ . جواب‌های معادلهٔ $-\cot g\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}(\pi - x)$ کدام‌اند؟

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $k\pi$

۳) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ۴) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری

حل : گزینهٔ ۲ درست است . داریم :

$$-\cot g\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}(\pi - x) \Rightarrow \operatorname{tg}x = -\operatorname{tg}x \Rightarrow 2\operatorname{tg}x = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

آزمون ۵ . یک جواب معادلهٔ $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$ کدام است؟

۱) $-\frac{7\pi}{8}$ ۲) $\frac{7\pi}{8}$

۳) $\frac{7\pi}{4}$ ۴) $-\frac{7\pi}{4}$

حل : گزینهٔ ۱ درست است .

راه اوّل : عددهای داده شده در گزینه‌ها را در معادله قرار می‌دهیم . هرکدام در معادله صدق کند ، جواب ، آن است .

$$x = \frac{-7\pi}{8} \xrightarrow{\text{در معادله}} \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3} \times \frac{-7\pi}{8} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Rightarrow -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -(-1) - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

بنابراین $x = \frac{-7\pi}{8}$ جواب معادله و گزینهٔ (۱) درست است . بنابراین نیازی به گذاشتن بقیهٔ گزینه‌ها در معادله نیست .

راه دوم : جواب‌های کلی معادله و سپس جواب‌های خصوصی آن در محدودهٔ جواب‌های داده شده در گزینه‌ها را به دست می‌آوریم . داریم :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2x}{3} = k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3k\pi}{2} + \frac{5\pi}{8}$$

k	x	
−1	$-\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{8} = \frac{-7\pi}{8}$	جواب

آزمون ۶ . کدام مقدار جواب معادلهٔ $3\cot g\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$ نیست؟

۱) $\frac{13}{12}$ ۲) $-\frac{11}{12}$

۳) $\frac{25}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

حل : گزینهٔ ۴ جواب است .

راه اوّل : عددهای داده شده در گزینه‌ها را در معادله قرار می‌دهیم تا مقداری از x که در معادله صدق نمی‌کند ، مشخص شود .

$$x = \frac{13}{12} \xrightarrow{\text{در معادله}} 3\cot g\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3\cot g\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$x = \frac{-11}{12} \xrightarrow{\text{در معادله}} 3\cot g\left(\frac{-11\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3\cot g\left(\frac{-2\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow -3\cot g\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow -3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$x = \frac{25}{12} \xrightarrow{\text{در معادله}} 3\cot g\left(\frac{25\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3\cot g\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$3\cot g\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\sqrt{3}=0\Rightarrow 0=0$$

چون سه عددهای داده شده در گزینه های (۱)، (۲) و (۳) در معادله صدق کرده‌اند، بنابراین جواب معادله‌اند؛ پس $x=\frac{5}{12}$ جواب معادله نیست، پس نیازی به قراردادن این عدد در معادله نیست.

راه دوم: معادله را حل می‌کنیم و جواب‌های خصوصی آن در محدودهٔ عددهای داده شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$3\cot g\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}=\cot g\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \pi x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x=k+\frac{1}{12}$$

به‌طوری که دیده می‌شود، $x=\frac{5}{12}$ جزو جواب‌های معادله نیست.

k	x
-1	$-\frac{11}{12}$
0	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{13}{12}$
2	$\frac{25}{12}$

پرسش: برای این تست، کدام راه‌حل ساده‌تر است؟

آزمون۷. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cot g\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)+1-\sqrt{2}=0$ دربازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π

۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

حل: گزینهٔ ۳ درست است. جواب‌های کلی معادله و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ و آن‌گاه مجموع آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\cot g\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)+1-\sqrt{2}=0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1=\cot g\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{8}=k\pi+\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

k	x
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$
2	π
3	$\frac{3\pi}{2}>\pi$

جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از: 0، $\frac{\pi}{2}$ و π. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با:

$$0+\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$$

آزمون ۸. اگر $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ و $tgx=2-3m$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}<m<1$ ۲) $1<m<3$

۳) $-3<m<-1$ ۴) $\frac{1}{3}\leq m\leq 1$

حل: گزینهٔ ۱ درست است؛ زیرا داریم:

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow -1<tgx<1\Rightarrow -1<2-3m<1$$

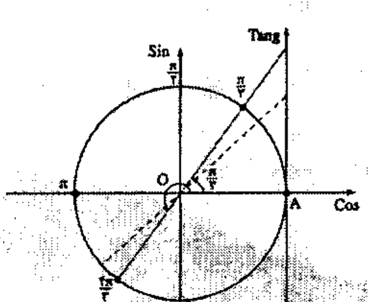
$$\Rightarrow -3<-3m<-1\Rightarrow \frac{1}{3}<m<1$$

آزمون ۹. اگر $0<tgx<\sqrt{3}$ باشد، کدام گزینه می‌تواند حدود x باشد؟

۱) $0<x<\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{-\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{3}<x<\pi$

حل: گزینهٔ ۱ درست است. در بازهٔ $[0,2\pi]$ می‌دانیم که $0=tg0=tg\pi$ و $\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3}=tg\frac{4\pi}{3}$ است. بنابراین با توجه به شکل، حدود x می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد:



$0<x<\frac{\pi}{3}$ و $\pi<x<\frac{4\pi}{3}$

آزمون ۱۰. اگر $-۱ < \cot g\left(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right) < ۱$ باشد، کدام گزینه می‌تواند حدود x باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۷\pi}{۴}$

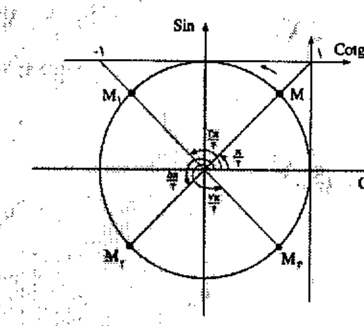
۳) $\frac{۳\pi}{۴}<x<\frac{۷\pi}{۴}$ ۴) $\pi<x<۲\pi$

حل: گزینهٔ ۴ درست است. در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ داریم:

$۱=\cot g\frac{\pi}{۴}=\cot g\frac{۵\pi}{۴}$ و $-۱=\cot g\frac{۳\pi}{۴}=\cot g\frac{۷\pi}{۴}$

بنابراین با فرض $\alpha=\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}$ ، $-۱<\cot g\alpha<۱$ و در نتیجه حدود α به یکی از صورت‌های زیر است:

$\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{۳\pi}{۴}$ $\frac{۵\pi}{۴}<\alpha<\frac{۷\pi}{۴}$



با جایگذاری $\alpha=\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}<\frac{x}{۲}<\pi\Rightarrow\pi<x<۲\pi$$

$$\frac{۵\pi}{۴}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}<\frac{۷\pi}{۴}\Rightarrow\frac{۳\pi}{۲}<\frac{x}{۲}<۲\pi\Rightarrow۳\pi<x<۴\pi$$

تمرین

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $tg۲x+\sqrt{۳}=۰$

ب) $\cot g\frac{x}{۳}-\sqrt{۲}+۱=۰$

پ) $\left(\sqrt{۲}-۱\right)tg\left(\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۶}\right)-۱=۰$

ت) $\cot g\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)-\sqrt{۳}=۰$

ث) $tg\left(\frac{۳x}{۲}-\frac{\pi}{۳}\right)+\cot g\left(\frac{x}{۴}-\frac{\pi}{۲}\right)=۰$

ج) $\cot g\left(\pi x+\frac{\pi}{۱۲}\right)-tg\left(\frac{\pi x}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)=۰$

۲. جواب‌های کلی معادله‌های زیر را به دست آورید، سپس جواب‌های خصوصی هر معادله در بازهٔ داده شده برای آن معادله را تعیین کنید.

الف) $۳tg\frac{x}{۲}+\sqrt{۳}=۰\ ,\ [۰,۲\pi]$

ب) $\left(۲+\sqrt{۳}\right)\cot g۲x-۱=۰\ ,\ [-\pi,۰]$

پ) $\left(۲-\sqrt{۳}\right)tg\left(\frac{۲x}{۳}+\frac{\pi}{۵}\right)-۱=۰\ ,\ [۰,۴]$

ت) $\left(\sqrt{۲}+۱\right)\cot g\left(۲\pi x-\frac{\pi}{۳}\right)-۱=۰\ ,\ \left[-\frac{۱}{۲},۱\right]$

ث) $tg\left(\pi x+\frac{\pi}{۶}\right)+\cot g\left(\frac{۲\pi x}{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)=۰\ ,\ [-۲,۲]$

۳. معادلهٔ $۳tg\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)-۳m+۲=۰$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان تعیین کنید که $-\frac{\pi}{۲۴}<x<\frac{۳\pi}{۸}$

ب. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x=\frac{۱۳\pi}{۲۴}$ باشد.

پ. مقدار m را چنان تعیین کنید که $\cot gx=-۱$ باشد.

ت. به ازای $m=\frac{۵}{۳}$ معادله را حل کنید.

۴. معادلهٔ $\cot g\left(\frac{\pi x}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)-m+۳=۰$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان بیابید که $-\frac{۱}{۶}<x<\frac{۵}{۶}$ باشد.

ب. مقدار m را چنان تعیین کنید که x=۲، یکی از جواب‌های این معادله باشد.

پ. به ازای $m=۳+\sqrt{۳}$ معادله را حل کنید.

۵. اگر $tgx=3m+7$ و $\frac{\pi}{۶}<\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۶}<\frac{۵\pi}{۲۴}$ باشد، حدود m را تعیین کنید.

۶. اگر $-\sqrt{۳}<\cot g\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)<\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تعیین کنید.

ترجمه:
غلامرضا یاسی پور

اعداد فیبوناتچی

اشاره

در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی و رابطه‌ها و خواص بین این اعداد پرداختیم، در ادامه مطلب باز هم دربارهٔ رابطه‌های بین این اعداد بحث می کنیم.

۲۱. دستاورد اصلی بخش پیشین را می توانیم مشخص تر کنیم، قضیهٔ بعدی بعدها مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

قضیه. $\frac{\alpha^{n-(1/n)}}{\sqrt{5}} \le u_n \le \frac{\alpha^{n+(1/n)}}{\sqrt{5}}$

اثبات. در این مورد، کارمان را محدود به اثبات سمت چپ این نامساوی دوگانه می کنیم. اثبات سمت راست، مشابه آن است.

از آن جا که طبق فرمول بینه:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

و از آن جا که $\alpha\beta = -1$، کافی است نشان دهیم که:

$$\alpha^{n-(1/n)} \le \alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}$$

یا

$$\alpha^{2n-(1/n)} \le \alpha^{2n} - 1$$

یا با به توان n رساندن دو طرف:

$$\alpha^{2n^2-1} \le (\alpha^{2n} - 1)^n \qquad (۲۱.۰۱)$$

اثبات (۲۱۰۱) با استقرای بر n انجام می گیرد. اگر n=۱، آن گاه نامساوی (۲۱۰۱) می شود:

$$\alpha \le \alpha^2 - 1$$

که در واقع برقرار است. در واقع یک تساوی داریم.

هنگامی که n=۲، نامساوی (۲۱۰۱) به (۲۲۰۱):

$$\alpha^7 \le (\alpha^4 - 1)^2$$

منجر می شود. این نامساوی را می توان با محاسبهٔ مستقیم محقق ساخت. گرچه، آن را می توان با به کار بردن بعضی از ویژگی های مستخرج در بخش ۱۷ نیز به اثبات رساند. به ویژه داریم:

$$\alpha^4 = 3\alpha + 2$$

$$(\alpha^4 - 1)^2 = (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 10$$

بنابراین (۲۲۰۱) را می توان به صورت:

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \le 15\alpha + 10$$

بازنویسی کرد که واضح است. سرانجام، اگر n=۳، آن گاه (۲۱۰۱) بر این است که:

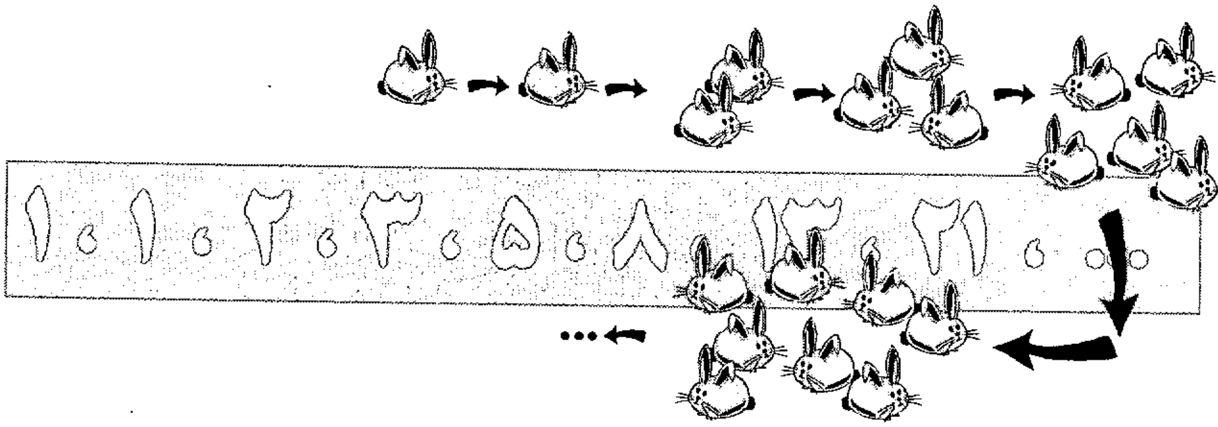
$$\alpha^7 \le (\alpha^6 - 1)^3$$

و می توان این نامساوی را به همان طریق فوق اثبات کرد.

اکنون فرض می کنیم (۲۱۰۱) به ازای n>۲ برقرار باشد و می خواهیم ثابت کنیم:

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \le (\alpha^{2n+2} - 1)^{n+1}$$

برای این کار، کافی است نشان دهیم هرگاه به جای n مقدار n+۱ را قرار دهیم، سمت راست (۲۱۰۱) سریع تر از سمت چپ افزایش می یابد. واضحاً سمت چپ توسط فاکتور α^{4n+2}



زیاد می‌شود. اکنون افزایش سمت راست را برآورد می‌کنیم. داریم:

$$\frac{\left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{\left(\alpha^{2n}-1\right)^n} = \left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n$$

آخرین کسر از α^2 بزرگ‌تر است و گذشته از این:

$$\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}-\alpha^2 = \frac{\alpha^{2n+2}-1-\alpha^{2n+2}+\alpha^2}{\alpha^{2n}-1}$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1}=\frac{\alpha}{\alpha^{2n}-1}>\frac{\alpha}{\alpha^{2n}}=\frac{1}{\alpha^{2n-1}}$$

بنابراین با استفاده از فرمول دو جمله‌ای (به عنوان نمونه، بخش ۱۱ این بخش را ملاحظه کنید) به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n > \left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n = \alpha^{2n}+n\frac{\alpha^{2n-2}}{\alpha^{2n-1}}+\cdots$$

که در آن نقطه‌ها به‌جای جمله‌های مثبت نامرتبط قرار دارند.

عبارت اخیر، هنگامی که $n>2$، بزرگ‌تر از $\alpha^{2n}+1$ است؛ بنابراین:

$$\frac{\left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{\left(\alpha^{2n}-1\right)^n} > \left(\alpha^{2(n+1)}-1\right)\left(\alpha^{2n}+1\right)$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n}-1$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n}(\alpha^2-1)-1$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+1}-1>\alpha^{4n+2}$$

و به این ترتیب، قضیه به اثبات می‌رسد.

۲۲. در این جا ردهٔ دیگری از دنباله‌هایی را بررسی می‌کنیم که به کمک اعداد فیبوناتچی ایجاد شده‌اند. در آغاز کار، فرض می‌کنیم x عددی دلخواه باشد؛ در این صورت هدفمان محاسبهٔ مجموع زیر است:

$$s_n(x)=u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n$$

برای انجام این کار، ابتدا از فرمول بینه استفاده و حاصل می‌کنیم:

$$s_n(x)=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}x^2+\cdots+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha x+\alpha^2x^2+\cdots+\alpha^nx^n\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\beta x+\beta^2x^2+\cdots+\beta^nx^n\right)$$

(۲۳۰۱)

در عبارت اخیر، با مجموع‌های دو تصاعد هندسی با قدر نسبت‌های به ترتیب αx و βx مواجه می‌شویم. فرمول معروف بیانگر مجموع تصاعد هندسی متناهی، تنها زمانی دارای معناست که قدر نسبت آن متفاوت با ۱ باشد. در حالتی که قدر نسبت مورد بحث برابر با ۱ است، تصاعد متناظر شامل جمله‌هایی برابر با یکدیگر است و این مجموع را می‌توان به سادگی محاسبه کرد.



در ارتباط با موارد پیشین، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\alpha x \neq 1$ و $\beta x \neq 1$؛ یعنی: $x \neq 1/\alpha = -\beta$ و $x \neq 1/\beta = -\alpha$. هرگاه چنین باشد، بامحاسبهٔ مجموع‌های

مشمول در (۲۳۰۱) فوق، به دست می‌آوریم:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\alpha^{n+1}x^{n+1}-\alpha x}{\alpha x-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\beta^{n+1}x^{n+1}-\beta x}{\beta x-1}$$

یا بعد از چند تبدیل آشکار:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\left(\alpha^{n+1}x^{n+1}-\alpha x\right)(\beta x-1)-\left(\beta^{n+1}x^{n+1}-\beta x\right)(\alpha x-1)}{(\alpha x-1)(\beta x-1)}$$

و گذشته از این:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{n+1}\beta x^{n+2}-\alpha^{n+1}x^{n+1}+\alpha x}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}-\frac{\alpha\beta^{n+1}x^{n+2}-\beta^{n+1}x^{n+1}+\beta x}{\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1}\right)$$

اکنون با به خاطر آوردن این مطلب که $\alpha\beta=-1$، $\alpha+\beta=1$ و $\alpha-\beta=\sqrt{5}$، داریم:

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{x\sqrt{5}-\left(\alpha^n-\beta^n\right)x^{n+2}-\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)x^{n+1}}{1-x-x^2}$$

و سرانجام؛

$$s_n(x)=\frac{x-u_nx^{n+2}-u_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2} \qquad (2401)$$

به ویژه با قرار دادن $x=1$ در (۲۴۰۱)، حاصل می‌کنیم:

$$s_n(1)=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1-u_n-u_{n+1}}{-1}=u_{n+2}-1$$

که همان فرمولی است که قبلاً در بخش ۱ ذکر شد.

به ازای $x=-1$، داریم:

$$s_n(-1)=u_1-u_2+\cdots+(-1)^{n-1}u_n$$

$$=\frac{-1-u_n(-1)^{n+2}-u_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1}$$

$$=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$$

که به معادلهٔ (۶۰۱) واقع در بخش ۳ بر می‌گردد.

اکنون به ذکر دو حالت «استثنایی» می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم:

$$x=1/\alpha=-\beta$$

در این صورت در (۲۳۰۱) هر جملهٔ تصاعد اوّل برابر ۱ و مجموع این تصاعد برابر n می‌شود؛ همچنین قدر نسبت تصاعد دوم برابر $-\beta^2$ می‌شود.

بنابراین:

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-(\beta^2-\beta^4+\cdots+(-1)^{n-1}\beta^{2n})\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2-(-1)^n\beta^{2n+2}}{1+\beta^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2}{1+\beta^2}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)$$

سرانجام، با ملاحظهٔ این که:

$$1+\beta^2=2+\beta=2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\beta^2}{1+\beta^2}=\frac{1+\beta}{2+\beta}=\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{10-2\sqrt{5}}{20}$$

به دست می‌آوریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{n}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{10}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\sqrt{5}-1}{10} \qquad (2501)$$

برای نتیجه گرفتن، فرض می‌کنیم:

$$x=1/\beta=-\alpha$$

در این حالت، قدر نسبت‌های تصاعدهای اخیر و قبلی واقع در (۲۳۰۱)، برابر ۱ و $-\alpha^2$ اند. بنابراین داریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\alpha^2-\alpha^4+\cdots+(-1)^{n-1}\alpha^{2n})-n\right)$$

با محاسبه‌ای مشابه با مورد پیشین، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^2-(-1)^n\alpha^{2n+2}}{1+\alpha^2}-n\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((-1)^{n+1}\alpha^{2n}\frac{\alpha^{2}}{1+\alpha^{2}}+\frac{\alpha^{2}}{1+\alpha^{2}}-n\right)$$

و در نتیجه مورد زیر را حاصل می‌کنیم:

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=(-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{5}}{10}\alpha^{2n}+\frac{1+\sqrt{5}}{10}-\frac{n}{\sqrt{5}}$$

(۲۶۰۱)

۲۳. اکنون مایل به بررسی رفتار $s_n(x)$ هنگامی هستیم که x ثابت باشد و n بدون محدودیت افزایش یابد. با حد گرفتن از n در معادلهٔ (۲۳۰۱) به دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\alpha x+\alpha^{2}x^{2}+\cdots+\alpha^{n}x^{n})$$

$$-(\beta x+\beta^{2}x^{2}+\cdots+\beta^{n}x^{n})\Big)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\left(\alpha x+\alpha^{2}x^{2}+\cdots+\alpha^{n}x^{n}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\left(\beta x+\beta^{2}x^{2}+\cdots+\beta^{n}x^{n}\right)$$

بنابراین آنچه در این مورد نیاز داریم، یافتن حدود دو تصاعد هندسی است. به عبارت دیگر، باید مجموع های دو تصاعد هندسی نامتناهی را بیابیم. برای این مقصود، این مطلب شناخته شده را به خاطر می‌آوریم که یک تصاعد هندسی نامتناهی، دارای مجموعی متناهی است؛ اگر و تنها اگر قدرمطلق قدر نسبتش کم‌تر از ۱ باشد. قدر نسبت‌های دو تصاعد مورد بحث، به ترتیب عبارت‌اند از αx و βx.

از آن‌جا که $|\beta|<|\alpha|$ به سادگی نتیجه می‌گیریم که $|\alpha x|<1$ مستلزم $|\beta x|<1$ است. در نتیجه، نابرابری $|\alpha x|<1$ وجود حدود مورد نظر ما را مسلّم می‌کند.

به این ترتیب، حد:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

با این شرط موجود است که:

$$|x|<1/\alpha$$

حد مزبور را با $s(x)$ نمایش می‌دهیم. مقدار عملی این حد را می‌توان با استفاده از فرمول (۲۴۰۱) محاسبه کرد.

به این ترتیب، کارمان را بر مبنای قضیهٔ واقع در بخش ۲۰، ادامه داده، به دست می‌آوریم:

$$u_n\le\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}+1$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}u_n x^{n+2}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{n}}{\sqrt{5}}+1\right)x^{n+2}$$

$$=\frac{x^{2}}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}(\alpha x)^{n}+\lim_{n\to\infty}x^{n+2}$$

از آن‌جا که واضحاً $|\alpha x|<1$ مستلزم $|x|<1$ است، نتیجه می‌گیریم که دو حد اخیر برابر صفرند و از آن:

$$\lim_{n\to\infty}u_n\ x^{n+2}=0$$

استدلالی مشابه به دست می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty}u_{n+1}\ x^{n+1}=0$$

در نتیجه، هنگامی که n بدون محدودیت افزایش یابد، با حد گرفتن در معادلهٔ (۲۴۰۱)، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-u_n x^{n+2}-u_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^{2}}$$

$$=\frac{1}{1-x-x^{2}}\left(x-\lim_{n\to\infty}u_n x^{n+2}-\lim_{n\to\infty}u_{n+1}x^{n+1}\right)$$

$$=\frac{x}{1-x-x^{2}}$$

نتیجهٔ به دست آمده را می‌توان، به گونه‌ای پاکیزه، به صورت زیر نوشت:

$$u_1x+u_2x^{2}+\cdots+u_nx^{n}+\cdots=\frac{x}{1-x-x^{2}}\qquad(2801)$$

از (۲۸۰۱) و با تخصیص مقادیر خاص به متغیر x، می‌توان فرمول‌های گوناگون بسیاری استخراج کرد. به عنوان نمونه، با قرار دادن $x=1/2$، به مورد زیر می‌رسیم:



$$\frac{u_1}{2}+\frac{u_2}{2^{2}}+\cdots+\frac{u_n}{2^{n}}+\cdots=2$$

برای
دانش آموزان
سال اول

میر شهرام صدر
www.sadr@iransciland.com

عبارت های جبری گویا و اعمال بر روی آن ها

کسرهایی که غالباً صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای است، عبارت‌های جبری گویا می‌نامیم. برای مثال عبارت‌هایی به‌صورت $\frac{2x^2+x-1}{x+2}$ و $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{x^3-7}{x}$ را عبارت‌های جبری گویا هستند.

دامنه عبارت‌های جبری گویا

دامنه عبارت‌های گویا برابر با مجموعه اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج[1] (در صورت وجود) است، یعنی مقادیری از x که به ازای آن‌ها مخرج کسر صفر می‌شود، از مجموعه اعداد حقیقی R حذف می‌کنیم.

{ریشه‌های مخرج} D=R- (دامنه عبارت گویا)

مثال: دامنه عبارت‌های گویای زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ب) $\frac{2x^2+1}{x^2+3x-4}$

ج) $\frac{5}{x^2+x}$ د) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$

حل:

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}; x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow x-1=0$ یا $x+1=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-1$

$\Rightarrow D=R-\{-1,+1\}$

ب)

$\frac{2x^2+1}{x^2+3x-4}; x^2+3x-4=0 \Rightarrow (x-1)(x+4)=0$

$\Rightarrow x-1=0$ یا $(x+4)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-4$

$\Rightarrow D=R-\{-4,1\}$

ج) $\frac{5}{x^2+x}; x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=-1 \Rightarrow D=R-\{-1,0\}$

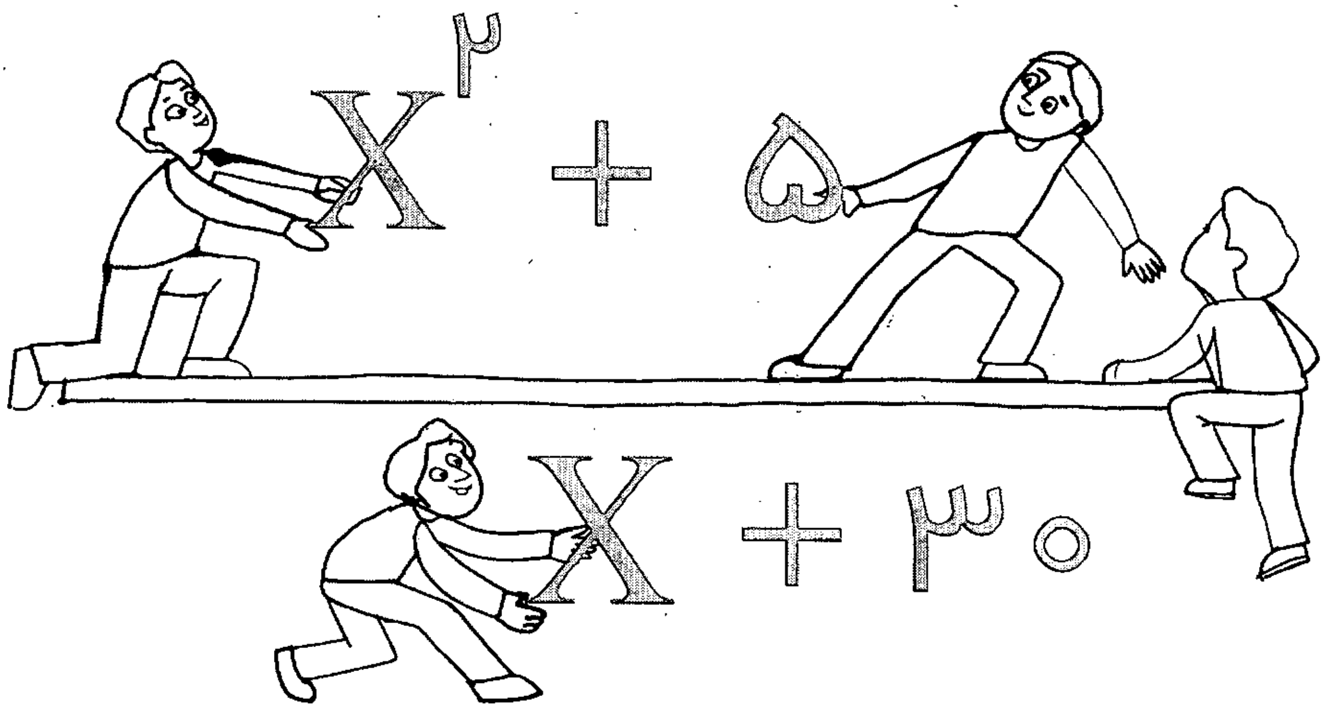
د) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}; x(x+1)(x^2-4)=0$

$\Rightarrow x(x+1)(x-2)(x+2)=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x+1=0$ یا $x-2=0$ یا $x+2=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=-1$ یا $x=2$ یا $x=-2$

$\Rightarrow D=R-\{-2,-1,0,2\}$



ساده‌کردن عبارت‌های جبری گویا

برای این منظور، ابتدا صورت و مخرج کسر را به حاصل‌ضرب عوامل اوّل تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را از صورت و مخرج حذف کرده، تا عبارت ساده شده به‌دست آید.

مثال: عبارت‌های جبری گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{3x^2y+6xy^2}{x^2-4y^2}=\dfrac{3xy(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)}=\dfrac{3xy}{x-2y}$

ب) $\dfrac{21a^2bc^2}{28abd}=\dfrac{3ac^2}{4d}$

ج) $\dfrac{42a^3-30a^3m}{35am^2-25m^3a}=\dfrac{6a^3(7-5m)}{5am^2(7-5m)}=\dfrac{6a^2}{5m^2}$

د) $\dfrac{35+5x+7y+xy}{5+y}=\dfrac{(35+7y)+(5x+xy)}{(5+y)}$

$=\dfrac{7(5+y)+x(5+y)}{(5+y)}=\dfrac{(5+y)(7+x)}{(5+y)}=7+x$

جمع و تفریق عبارت‌های جبری گویا

قبل از این‌که قاعده کلی جمع و تفریق عبارت‌های گویا را بیان کنیم، ابتدا روش محاسبه مخرج مشترک بین دو یا چند کسر را بیان می‌کنیم.

مخرج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است.

مثال: مخرج مشترک حاصل جمع‌های زیر را پیدا کنید؟

الف) $\dfrac{4}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

حل:

مخرج کسر اول $A=x^2+x=x(x+1)$

مخرج کسر دوم $B=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

مخرج مشترک (ک . م . م) $M=x(x+1)(x+2)$

یادآوری: برای محاسبه ک . م . م بین چند عبارت گویا، ابتدا هر یک از آن‌ها را تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگتر در عوامل غیرمشترک برابر با ک . م . م است.

ب) $\dfrac{2x+3}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^4-1}+\dfrac{x-1}{x^6-1}$

حل: مخرج کسر اول $A = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

مخرج کسر دوم $B = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$
$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$

مخرج کسر سوم $C = x^6 - 1 = (x^2-1)(x^4+x^2+1)$
$= (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

مخرج مشترک (ک.م.م) $M = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+x^2+1)$

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱ . صورت و مخرج هرکسر را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.

۲ . مخرج مشترک یا همان کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج‌ها را به دست می‌آوریم.

۳ . به جای هریک از کسرها، عبارت‌های گویای معادل را که مخرج آن‌ها، همان کوچک‌ترین مضرب مشترک است، قرار می‌دهیم.

۴ . عبارت‌های گویای هم‌مخرج را با هم جمع و تفریق می‌کنیم و حاصل را در صورت امکان ساده می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $A = \frac{7}{mn} + \frac{3}{mn^2}$

حل:

$\left.\begin{array}{l} mn \text{ مخرج کسر اول} \\ mn^2 \text{ مخرج کسر دوم} \end{array}\right\} \Rightarrow$ مخرج مشترک mn^2

کسرهای معادل $\begin{cases} \frac{7}{mn} = \frac{7n}{mn^2} \\ \frac{3}{mn^2} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{7n}{mn^2} + \frac{3}{mn^2} = \frac{7n+3}{mn^2}$

ب) $B = \frac{y}{y^2+2y-8} - \frac{y+3}{y^2-16}$

حل:

مخرج کسر اول $= y^2+2y-8 = (y-2)(y+4)$

مخرج کسر دوم $= y^2-16 = (y-4)(y+4)$

$\Rightarrow$ مخرج مشترک $= (y-2)(y+4)(y-4)$

کسرهای معادل $\begin{cases} \frac{y}{y^2+6y+8} = \frac{y}{(y+2)(y+4)} = \frac{y(y-4)}{(y+2)(y+4)(y-4)} \\ \frac{y-3}{y^2-16} = \frac{y-3}{(y-4)(y+4)} = \frac{(y-3)(y+2)}{(y+2)(y-4)(y+4)} \end{cases}$

$$B = \frac{y(y-4)}{(y+2)(y+4)(y-4)} - \frac{(y-3)(y+2)}{(y+2)(y-4)(y+4)}$$

$$= \frac{y(y-4)-(y-3)(y+2)}{(y-2)(y-4)(y+4)}$$

$$= \frac{y^2-4y-y^2+y+6}{(y-2)(y-4)(y+4)} = \frac{-3(y-2)}{(y-2)(y-4)(y+4)}$$

$$= \frac{-3}{(y-4)(y+4)}$$

ج)

$$C = \frac{ay^2+b}{2y-1} + \frac{2by+2ay^2}{1-4y^2} - \frac{ay^2-b}{2y+1}$$

حل:

مخرج کسر اول $= 2y-1$

مخرج کسر دوم $= 1-4y^2 = (1-2y)(1+2y) = -(2y-1)(1+2y)$

مخرج کسر سوم $= 2y+1$

مخرج مشترک $= -(2y-1)(1+2y)$

کسرهای معادل $\begin{cases} \frac{ay^2+b}{2y-1} = \frac{(ay^2+b)[-(1+2y)]}{-(2y-1)(1+2y)} = \frac{-ay^2-2ay^3-b-2by}{-(2y-1)(1+2y)} \\ \frac{2by+2ay^2}{1-4y^2} = \frac{+(2by+2ay^2)}{-(2y-1)(1+2y)} = \frac{+2by+2ay^2}{-(2y-1)(1+2y)} \\ \frac{ay^2-b}{2y+1} = \frac{-(2y-1)(ay^2-b)}{-(2y-1)(1+2y)} = \frac{+ay^2-b-2ay^3+2by}{-(2y-1)(1+2y)} \end{cases}$

$$C = \frac{-ay^2-2ay^3-b-2by}{-(2y-1)(1+2y)} + \frac{+2by+2ay^2}{-(2y-1)(1+2y)}$$

$$-\frac{ay^2-b-2ay^3+2by}{-(2y-1)(1+2y)}$$

$$= \frac{-ay^2-2ay^3-b-2by+2by+2ay^2-ay^2+b+2ay^3-2by}{-(2y-1)(1+2y)}$$

$$=\frac{-2by}{-(2y-1)(1+2y)}=\frac{2by}{(2y-1)(1+2y)}$$

د)

$$D=\frac{x+2}{x^2+7x+12}-\frac{x+1}{x^2-3x-18}+\frac{x-2}{x^2-2x-24}$$

حل:

مخرج کسر اول $= x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

مخرج کسر دوم $= x^2-3x-18=(x+3)(x-6)$

مخرج کسر سوم $= (x^2-2x-24)=(x-6)(x+4)$

مخرج مشترک $= (x+3)(x+4)(x-6)$

$$D=\frac{(x+2)(x-6)}{(x+3)(x+4)(x-6)}-\frac{(x+1)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$+\frac{(x-2)(x+3)}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$=\frac{x^2-4x-12-x^2-5x-4+x^2+x-6}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

$$=\frac{x^2-8x-22}{(x+3)(x+4)(x-6)}$$

ضرب عبارت‌های جبری گویا

برای ضرب دو یا چند عبارت جبری گویا، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. صورت و مخرج هر کسر را به حاصل عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.

۲. صورت کسرها را در یکدیگر و مخرج کسرها را در یکدیگر ضرب کرده و در صورت امکان کسر حاصل را ساده می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

الف)
$$\frac{x^2-4}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x+2}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)}\times\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}=\frac{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=(x-2)(x+1)$$

ب)

$$\frac{3x^2-14x-5}{9x^2-1}\times\frac{1}{x^2-6x+5}$$

$$=\frac{(x-5)(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)}\times\frac{1}{(x-1)(x-5)}$$

$$=\frac{(x-5)}{(3x-1)}\times\frac{1}{(x-1)(x-5)}$$

$$=\frac{(x-5)}{(3x-1)(x-1)(x-5)}=\frac{1}{(3x-1)(x-1)}$$

ج)

$$\frac{x^4-8x}{x^2-4x-5}\times\frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-2x}$$

$$=\frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-5)(x+1)}\times\frac{(x+1)(x+1)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-5)(x+1)}\times\frac{(x+1)}{x(x-2)}=\frac{x^2+2x+4}{x-5}$$

د)

$$A=\left(\frac{3x}{2x-1}-\frac{3x-1}{2x+1}\right)\left(2x-\frac{6x+1}{2x+3}\right)$$

$$A=\left(\frac{3x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{(2x-1)(3x-1)}{(2x+1)(2x-1)}\right)\left(\frac{2x(2x+3)}{(2x+3)}-\frac{6x+1}{(2x+3)}\right)$$

$$=\frac{6x^2+3x-6x^2+5x-1}{(2x-1)(2x+1)}\times\frac{4x^2+6x-6x-1}{(2x+3)}$$

$$=\frac{8x-1}{(2x-1)(2x+1)}\times\frac{4x^2-1}{(2x-3)}$$

$$=\frac{(8x-1)(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)(2x-3)}=\frac{8x-1}{2x-3}$$

تقسیم عبارت‌های جبری گویا

برای تقسیم دوعبارت جبری گویا مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. صورت و مخرج هر کسر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و در صورت امکان ساده می‌کنیم.

۲. کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل این عبارات را به دست آورید.

الف)

$$\frac{x^4+8x^2+7}{x^2-144y^2}\div\frac{x^4-1}{3x-36y}$$

$$=\frac{(x^2+1)(x^2+7)}{(x-12y)(x+12y)}\div\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{3(x-12y)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(x^2+7)}{(x-12y)(x+12y)}\times\frac{3(x-12y)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{3(x^2+7)}{(x+12y)(x-1)(x+1)}$$

ب)

$$\frac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45}\div\frac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$$

$$=\frac{(x-15)(x+1)}{(x-9)(x+5)}\div\frac{(x-15)(x+3)}{(x-9)(x+3)}$$

$$=\frac{(x-15)(x+1)}{(x-9)(x+5)}\times\frac{(x-9)}{(x-15)}=\frac{x+1}{x+5}$$

ج)

$$\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{1}{x-y}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)$$

$$\left(\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}-\frac{(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}\right)\div\left(\frac{(x+y)}{(x-y)(x+y)}-\frac{y}{(x-y)(x+y)}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{(x-y)(x+y)}\right)\div\left(\frac{x+y-y}{(x-y)(x+y)}\right)$$

$$=\frac{4xy}{(x-y)(x+y)}\times\frac{(x-y)(x+y)}{x}=4y$$



مسائل حل شده

حاصل این عبارت‌ها را به دست آورید.

۱.

$$\frac{a^4-a^2}{a^4+a^3}-\frac{a^2+1-2a}{a^2-a}+\frac{a-1}{a^2-1}$$

$$=\frac{a^2(a^2-1)}{a^3(a+1)}-\frac{(a-1)(a-1)}{a(a-1)}+\frac{a-1}{(a-1)(a+1)}$$

$$=\frac{a^2(a-1)(a+1)}{a^3(a+1)}-\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a+1}$$

$$=\frac{a-1}{a}-\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a+1}$$

۲.

$$\frac{a^2+ab}{a^2-ab}-\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}$$

$$=\frac{a(a+b)}{a(a-b)}-\frac{a(a+b)(a+b)}{b(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a(a+b)}{b(a-b)}=\frac{b(a+b)}{b(a-b)}-\frac{a(a+b)}{b(a-b)}$$

$$=\frac{ab+b^2-a^2-ab}{b(a-b)}$$

$$=\frac{-(a-b)(a+b)}{b(a-b)}=\frac{-(a+b)}{b}$$

۳.

$$A=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

مخرج کسر اول $=(a-b)(a-c)$

مخرج کسر دوم $=(b-c)(b-a)=-(a-b)(b-c)$

مخرج کسر سوم $=(c-a)(c-b)=[-(a-c)]\,[-(b-c)]=(a-c)(b-c)$

مخرج مشترک $=-(a-b)(b-c)(a-c)$

$$A=\frac{-bc(b-c)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}+\frac{ac(a-c)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}+\frac{-ab(a-b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{-b^2c+bc^2+a^2c-ac^2-a^2b+ab^2}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

در صورت کسر abc را اضافه و کم می‌کنیم:

$$= \frac{-b^2c+bc^2+a^2c-ac^2-a^2b+ab^2+abc-abc}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$A=\frac{(-a^2b+abc+a^2c-ac^2)+(bc^2-b^2c-abc+ab^2)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{-a(ab-bc-ac+c^2)+b(c^2-bc-ac+ab)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(ab-bc-ac+c^2)(-a+b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(a-c)(b-c)(-a+b)}{-(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{-(a-b)}{-(a-b)}=1$$

۴.

$$P=\frac{a+x}{(m+n)^3}\times\frac{x^2-y^2}{12}\times\frac{(m+n)^2}{(m-n)}\times\frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$$

$$P=\frac{(a+x)}{(m+n)(m+n)(m+n)}\times\frac{(x-y)(x+y)}{12}$$

$$\times\frac{(m+n)(m+n)}{(m-n)}\times\frac{6(m+n)(m-n)}{(x+y)}=\frac{(a+x)(x-y)}{2}$$

۵.

$$I=\frac{\frac{x-1}{x+3}-\frac{x+3}{x-1}}{1-\frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3}}=\left(\frac{x-1}{x+3}-\frac{x+3}{x-1}\right)\div\left(1-\frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3}\right)$$

$$=\left(\frac{(x-1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}-\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}\right)\div\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x-3}-\frac{x^2+x-4}{x^2+2x-3}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2-2x+1-x^2-6x-9}{(x+3)(x-1)}\right)\div\left(\frac{x^2+2x-3-x^2-x+4}{x^2+2x-3}\right)$$

$$=\frac{-8(x+1)}{(x+3)(x-1)}\div\frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

$$=\frac{-8(x+1)}{(x+3)(x-1)}\times\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)}=-8$$

۶. اگر تساوی $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$ به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد، مقدار B+A را بیابید.

حل:

$$\frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}=\frac{8x-11}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow\frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}=\frac{8x-11}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow(A+B)x-(2A+B)\equiv 8x-1\Rightarrow\begin{cases}A+B=8\\2A+B=11\end{cases}$$

$$A=3\ ,\ B=5$$

$$\Rightarrow A+B=3+5=8$$



حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱. $A=\left(\frac{ab+1}{ab-1}-\frac{ab-1}{ab+1}\right)\div\left(\frac{ab+1}{ab-1}-\frac{ab-1}{ab+1}-2\right)$

۲. $B=\frac{(x+\frac{1}{y})^m(x-\frac{1}{y})^n}{(y+\frac{1}{x})^m(y-\frac{1}{x})^n}$

۳. $C=\frac{1}{1+x^{a-b}}+\frac{1}{1+x^{b-a}}$

۴. $D=\frac{2x+1}{x-3}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x^2-2x-7}{x^2-x-6}$

۵. $E=\left(\frac{1+x+x^2}{1+x}-\frac{1-x+x^2}{1-x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)$

۶. $F=\left(1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\left(1-\frac{2ab}{(a+b)^2}\right)$

زیرنویس ....

۱. ریشه‌های مخرج مقادیری از متغیر x می‌باشند که به ازای آن‌ها مخرج کسر برابر با صفر می‌شود.

اثبات دو قضیه از تقارن به کمک نگاشت‌ها

برای دانش‌آموزان سال سوم

حمید رشتی‌زاده
دبیر ریاضی شهرستان‌های استان تهران

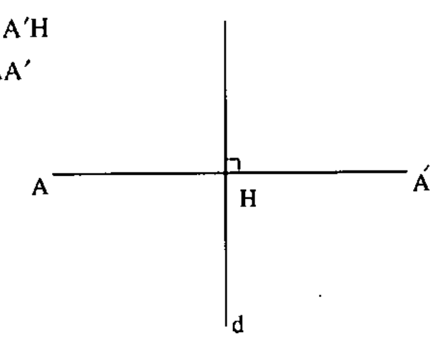
مقدمه

نگاشت‌ها در دورهٔ آموزشی متوسطه، از اهمیت زیادی برخوردارند و آموزش بخشی از هندسه به کمک نگاشت‌ها، از هندسه دیدگاهی تحلیلی را ارائه می‌دهد. آن‌چه در این مقاله مطالعه می‌کنید، اثبات دو قضیه از نگاشت‌هاست که در بیشتر کتب هندسی، به‌صورت سنّتی اثبات می‌شوند و سعی بر آن شده که با استفاده از مطالب آموزشی که در کتاب هندسهٔ (۲) ارائه شده است، ثابت شوند.

تعریف ۱. خط ثابت d را در صفحه در نظر گرفته، نقطهٔ A' را تصویر نقطهٔ A نسبت به خط d می‌نامند؛ هرگاه:

۱) $AH = A'H$

۲) $d \perp AA'$



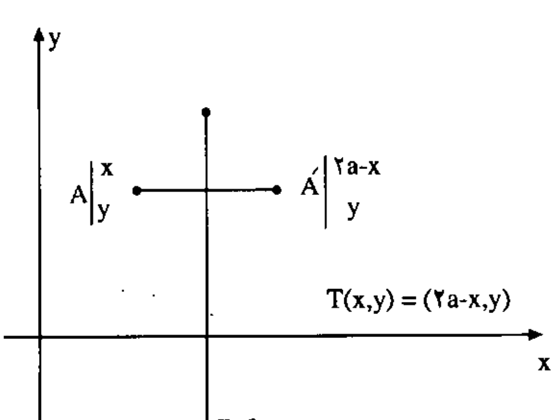
خط d را محور تقارن (بازتاب) و نقاط A و A' را تصویر یکدیگر نسبت به این محور و این تقارن را تقارن محوری می‌نامند.

فرض کنیم $a \in R$ و خط d به معادله $x = a$ باشند. در این صورت، با محاسباتی ساده، در می‌یابیم که تصویر نقطهٔ $A\Big|{x \atop y}$ نسبت به خط d عبارت است از: $A'\Big|{۲a - x \atop y}$ (۱).

در این صورت، اگر T نگاشت مورد نظر ما باشد، آن‌گاه ضابطهٔ آن به صورت:

$$T(x, y) = (۲a - x, y)$$

خواهد بود.



به روش مشابهی، می‌توان نشان داد که اگر خط d به معادله $y=b$ باشد، آن‌گاه تصویر نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ نسبت به d نقطهٔ $A''\begin{vmatrix}x\\2b-y\end{vmatrix}$ (۲) خواهد بود و اگر T' نگاشت این بازتاب باشد، داریم:

$$T'(x,y)=(x,2b-y)$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که اگر d به معادلهٔ $y=ax+b$ باشد، قرینهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ نسبت به d چیست؟

برای پاسخ به این سؤال، فرض کنیم که $A'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ نقطهٔ مورد نظر باشد، آن‌گاه باید دو مورد را در نظر بگیریم.

۱. اگر M وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه مختصات M باید در معادلهٔ d صدق کند؛ درنتیجه:

$$M\begin{vmatrix}\frac{1}{2}(x+\alpha)\\\frac{1}{2}(y+\beta)\end{vmatrix}\Rightarrow\frac{1}{2}(y+\beta)=\frac{a}{2}(x+\alpha)+b$$

$$\Rightarrow y+\beta=a(x+\alpha)+2b$$

$$\Rightarrow a\alpha-\beta=y-ax-2b \qquad (3)$$

۲. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم که شیب پاره‌خط AA'، m باشد، آن‌گاه $ma=-1$ خواهد بود یا:

(۴)

$$m=\frac{y-\beta}{x-\alpha}\Rightarrow ay-a\beta=\alpha-x\Rightarrow\alpha+a\beta=ay+x$$

با قرار دادن روابط (۳) و (۴) در یک دستگاه و حل آن، به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha=\frac{1}{1+a^2}\left[2ay+(1-a^2)x-2ab\right]$$

و

$$\beta=\frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y+2ax+2b\right]$$

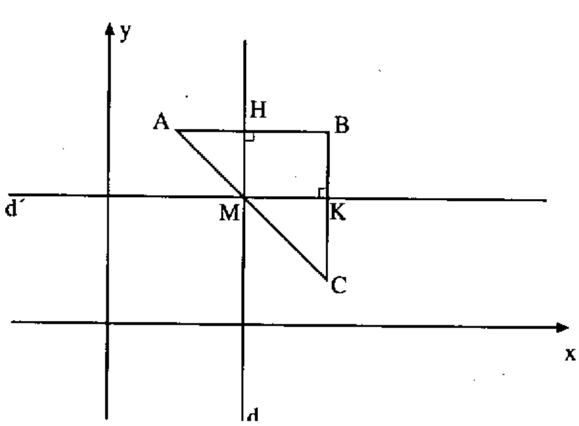
لذا مختصات نقطهٔ A' مشخص خواهد شد. حال اگر نگاشت متناظر با این تقارن را با F نمایش دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{1+a^2}\left[2ay+(1-a^2)x-2ab\right]\ ,\frac{1}{1+a^2}\left[(a^2-1)y+2ax+2b\right]\right) \qquad (5)$$

تعریف ۲. فرض کنیم که M نقطهٔ ثابتی در صفحه باشد. نقطهٔ A' را تصویر نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M می‌نامند؛ هرگاه $AM=A'M$.

نقطهٔ M را مرکز تقارن و نقاط A و A' را تصاویر یکدیگر نسبت به نقطهٔ M در این تقارن مرکزی می‌نامند.

فرض کنیم $M\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ مرکز تقارن و $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ نقطه‌ای در صفحه باشد. خطوط d و d' را به معادلات $x=x_1$ و $y=y_1$ رسم می‌کنیم. اگر تصویر A را نسبت به d، B و تصویر B را نسبت به d'، C بنامیم، از برابری دو مثلث $\overset{\Delta}{AHM}$ و $\overset{\Delta}{CMK}$، نتیجه می‌شود که $AM=CM$، لذا طبق تعریف (۲) اگر M را به‌عنوان مرکز تقارن در نظر بگیریم، آن‌گاه نقطهٔ C همان نقطهٔ A' خواهد بود.



با توجه به مطالب گفته شده، می‌توان دریافت که باید $B\begin{vmatrix}2x_1-x\\y\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}2x_1-x\\2y_1-y\end{vmatrix}$ باشند و درنتیجه، نگاشت تقارن مرکزی نسبت به نقطهٔ M عبارت است از:

$$D(x,y)=(2x_1-x\ ,\ 2y_1-y) \qquad (6)$$

قضیهٔ ۱ . ترکیب دو تقارن محوری با محور تقارن‌های موازی، یک انتقال است و اگر فاصلهٔ این دو محور تقارن را با h نمایش دهیم، طول بردار انتقال حاصل برابر ۲h خواهد بود.

برهان. **حالت اول**: اگر دو خط موازی محور عرض‌ها باشند، آن‌گاه معادلاتی به شکل $d: x = x_۱$ و $d': x = x_۲$ خواهند داشت. درنتیجه، اگر T نگاشت تقارن نسبت به d و T′ نگاشت تقارن نسبت به d′ باشند، آن‌گاه:

$$T'oT(x,y) = T'(T(x,y)) = T'(۲x_۱ - x, y) = (x + ۲(x_۲ - x_۱), y)$$ ،

که به‌وضوع این نگاشت، یک انتقال با بردار $\vec{V} = (۲x_۲ - ۲x_۱ \; , \; ۰)$ است و با توجه به این که فاصلهٔ بین این دو خط برابر $h = |x_۲ - x_۱|$ است، دیده می‌شود که $\|\vec{V}\| = ۲h$.

حالت دوم: فرض کنیم که دو خط d و d′ به ترتیب به معادلات $y = ax + b$ و $y = ax + b'$ موازی یکدیگر باشند. در این صورت، فاصلهٔ بین این دو خط عبارت است از $h = \frac{|b - b'|}{\sqrt{۱ + a^۲}}$. اکنون اگر باز هم T نگاشت تقارن نسبت به d و T′ نگاشت تقارن نسبت به d′ باشد، آن‌گاه برای نقطه‌ای مانند A در صفحه داریم $T(A) = A'$ و $T'(A') = A''$ ؛ ولی طبق رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آید:

$$T(A) = T(x,y) = \left(\frac{۱}{۱ + a^۲}\left[۲ay + (۱ - a^۲)x - ۲ab\right] \; , \; \frac{۱}{۱ + a^۲}\left[(a^۲ - ۱)y + ۲ax + ۲b\right]\right) = A' = (x', y')$$

و همچنین $T'(A') = A'' = (x'', y'')$ که در آن

$$x'' = \frac{۱}{۱ + a^۲}\left[۲ay' + (۱ - a^۲)x' - ۲ab'\right]$$

و

$$y'' = \frac{۱}{۱ + a^۲}\left[(a^۲ - ۱)y' + ۲ax' + ۲b'\right]$$

که پس از ساده شدن داریم:

$$\begin{cases} x'' = x + \dfrac{۲a(b - b')}{۱ + a^۲} \\ y'' = y + \dfrac{۲(b' - b)}{۱ + a^۲} \end{cases}$$

و در نتیجه

$$T'oT(x,y) = \left(x + \frac{۲a(b - b')}{۱ + a^۲}, \; y + \frac{۲(b' - b)}{۱ + a^۲}\right) = G(x,y)$$.

با توجه به ضابطهٔ G درمی‌یابیم که G یک انتقال است و بردار $\vec{V} = \left(\frac{۲a(b - b')}{۱ + a^۲} \; , \; \frac{۲(b' - b)}{۱ + a^۲}\right)$ بردار انتقال آن خواهد بود و $\|\vec{V}\| = \frac{۲|b - b'|}{\sqrt{۱ + a^۲}} = ۲h$.

قضیهٔ ۲ . ترکیب دو تقارن محوری با محور تقارن‌های متقاطع یک دوران است و زاویهٔ دوران، برابر است با دو برابر زاویه بین دو محور تقارن.

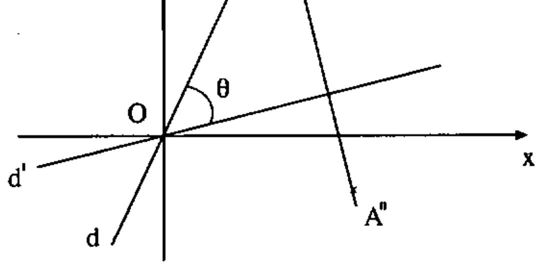
برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که دو محور یکدیگر را در مبدأ مختصات قطع می‌کنند. درنتیجه، محورهای تقارن d و d′ به ترتیب معادلاتی به صورت $y = ax$ و $y = a'x$ خواهند داشت $(a \neq a')$.

اگر T و T′ نگاشت‌های متناظر با این دو تقارن باشند، آن‌گاه:

$$T'(A') = T'(x', y') = A'' = (x'', y'') \; ,$$
$$T(A) = T(x,y) = A' = (x', y')$$

$$T(x,y) = \left(\frac{۱}{۱ + a^۲}(۲ay + (۱ - a^۲)x), \frac{۱}{۱ + a^۲}((a^۲ - ۱)y + ۲ax)\right) = (x', y')$$

$$T'(x', y') = \left(\frac{۱}{۱ + a'^۲}(۲a'y' + (۱ - a'^۲)x') \; , \; \frac{۱}{۱ + a'^۲}((a'^۲ - ۱)y' + ۲a'x')\right) = (x'', y'')$$



که در آن

$$x'' = \frac{1}{1+a'^2}\left[\frac{2a'}{1+a^2}((a^2-1)y+2ax)+\frac{(1-a'^2)}{1+a^2}(2ay+(1-a^2)x)\right]$$

و پس از محاسبات با فرض

$$\begin{cases} m = \dfrac{(1-a^2)(1-a'^2)+4aa'}{(1+a^2)(1+a'^2)} \\ n = \dfrac{2(a-a'+aa'^2-a'a^2)}{(1+a^2)(1+a'^2)} \end{cases}$$

، خواهیم داشت: $x'' = mx - ny$ و همچنین $y'' = nx - my$.

اکنون اگر زاویه بین دو محور تقارن را θ در نظر بگیریم، آن‌گاه $\tan\theta = \frac{a-a'}{1+aa'}$ خواهد بود. در نتیجه به کمک محاسبات، مثلثاتی به‌دست می‌آید که $\cos 2\theta = m$ و $\sin 2\theta = n$ و ضابطهٔ ترکیب این دو نگاشت به صورت مقابل

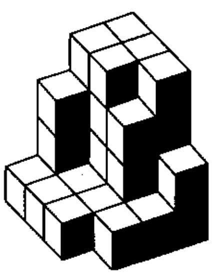
$$T'oT(x,y) = (x.\cos 2\theta - y.\sin 2\theta\ ,\ \ x.\sin 2\theta + y.\cos 2\theta)$$

خواهد بود. همین‌طور که ضابطهٔ ترکیب این دو نگاشت نشان می‌دهد، ترکیب آن‌ها یک دوران با زاویهٔ دوران 2θ است. در ادامه اگر d و d' در نقطه‌ای به غیر از مبدأ، همدیگر را قطع کنند، با انتقال مبدأ مختصات به نقطهٔ برخورد دو محور، می‌توان قضیه را به همین شکل اثبات کرد. همچنین اگر یکی از دو محور موازی محور عرض‌ها باشد، می‌توان در جای خود از ضابطهٔ نگاشت آن استفاده کرد.

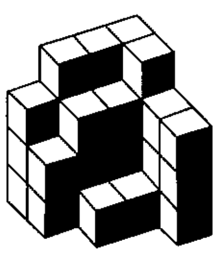
تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

پازل مکعب‌ها

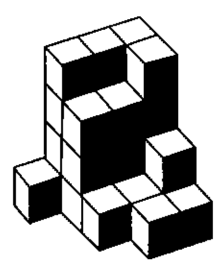
کدام دو مجموعهٔ مکعب‌های زیر را می‌توان با هم جفت‌وجور کرد تا یک مکعب ۴×۴×۴ به دست آید؟



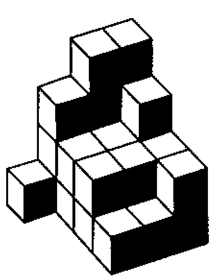
د



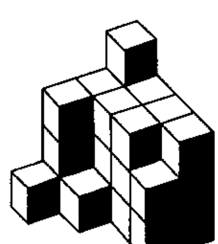
ب



الف



هـ



ج

پاسخ: (ب) و (هـ)

دکتر بهمن طباطبایی
بخش ریاضی،
دانشکده علوم دانشگاه شیراز

نقش ریاضیات در علوم انسانی و تجربی



اشاره: این مقاله تاکید بر آن دارد که دانش‌آموزان رشته‌های انسانی و تجربی بدانند که مطالب ریاضی را که در دورهٔ متوسطه مطالعه می‌کنند به‌طور مفهومی فرا گیرند، تا در هر رشته‌ای که در دانشگاه ادامه تحصیل می‌دهند، دچار مشکل نشوند.

چکیده: در این مقاله، سعی می‌کنیم با توجه به نیاز رشته‌های علوم انسانی و تجربی به ریاضیات، با عنایت به دانش قبلی آن‌ها در این رشته و آموزش‌هایی که دیده‌اند و نگرش آن‌ها به دنیای ریاضی، پیرامون نحوهٔ آموزش ریاضیات به آن‌ها، سخنی با دوستان در میان بگذاریم. سپس اشاره‌ای خواهیم داشت به تفاوت عمیقی که بین نگاه ما و نگاه دانشجویانمان به عالم ریاضی وجود دارد. سرانجام دربارهٔ نحوهٔ تدوین کتاب‌های درسی آن‌ها به بحث خواهیم نشست.

مقدمه

سعی می کنیم مطالب خود را در سه بند الف: نیاز؛ ب: دانش قبلی و آموزش‌هایی که دیده‌اند؛ ج: اختلاف دو نگاه به عالم ریاضی خلاصه کنیم.

الف. نیاز

به‌طور طبیعی همهٔ کسانی که در علوم انسانی، علوم پزشکی و رشته‌های وابسته به علوم پزشکی کار می‌کنند، به مقداری ریاضی نیاز دارند زیرا تجزیه و تحلیل‌های آماری، برآوردها، پیش‌بینی‌ها و برنامه‌ریزی‌ها نمی‌تواند بدون کمک ریاضی انجام شود. می‌نیمم‌کردن هزینه‌ها، ماکزیمم‌سازی درآمدها، تخصیص بودجه‌ها، پی‌گیری و به نتیجه رساندن طرح‌های اقتصادی و...، رشد و توسعهٔ ارزش‌های مثبت مانند شاخص‌های بهداشتی، پیشرفت‌های تحصیلی، توفیق در مسابقات علمی و ورزشی، و تقلیل و کنترل نقاط ضعف مانند بیماری‌ها، اُفت تحصیلی، بی‌کاری، بزه‌کاری، ... نیاز به ریاضی دارد و بدون به‌کارگیری این علم ظریف و دقیق، هیچ گونه حرکتی میسّر نیست. به‌طور خلاصه در علوم انسانی و علوم پزشکی، از ریاضیات باید به عنوان یک ابزار استفاده کرد. روشن است که به‌کار بردن هر ابزاری، مهارت و دانش خود را می‌طلبد و به آموزش خاص خود نیاز دارد.

ب. دانش قبلی و آموزش‌هایی که دیده‌اند.

دانش قبلی محصّلین ما، به‌خصوص محصّلین رشته‌های علوم انسانی از علم ریاضی، بسیار سطحی است؛ به‌طوری که می‌توان گفت اطلاعاتشان از حد یک سلسلهٔ نماد و علامات، فراتر نمی‌رود و برداشت آنان از این علم بنیادی، محفوظاتی بیش نیست. به‌منظور پی‌بردن به بی‌پایه بودن دانش قبلی

محصلین و سطحی بودن برداشت آنان، بد نیست که به مثال زیر توجه کنید.

مثال. در رسم نمودار و تعیین اکسترمم‌های تابع f با ضابطهٔ:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$$

رسیدیم به:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

و گفتیم که $f'(0)$ موجود نیست؛ زیرا عدد تقسیم بر صفر تعریف نشده است، لذا ۲ تقسیم بر صفر بی‌معناست. محصّلی فرمود که خوب f' را به صورت کسری ننویسیم؛ بلکه بنویسیم:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

رویداد فوق، مبیّن آن است که محصّل کاری به معنای عبارت $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ ندارد، فقط آن را یاد گرفته است.

باید توجه داشت که اظهار نظر محصّل پیرامون $f'(x)$، به نحوهٔ آموزشی که دیده است، بی‌ارتباط نیست. در این زمینه می‌توان گفت آموزش‌هایی که محصّلین در دروس ریاضی می‌بینند، صرفاً جنبهٔ حفظی دارد و همراه با تفکر، تعقّل، بحث، مجادله و انتخاب احسن نیست یا به عبارتی دیگر، محصّل در کانالی قرار می‌گیرد که اجباراً باید مطالبی را بپذیرد و کورکورانه به کار گیرد. چنانچه محصّل قصد ادامهٔ تحصیل داشته باشد و بخواهد در رشته‌ای کار کند که به گونه‌ای با نوعی ریاضی سروکار دارد، باید قدرت تشخیص، توانایی تجزیه و تحلیل و جرأت انتخاب پیدا کند. باید از همان سنین دبیرستان که از نظر جسمی و روحی و فعال بودن سلول‌های مغزی در موقعیت بسیار خوبی قرار دارد، فکر کردن، کار کردن، تشخیص دادن و سایر فاکتورهای آموزشی را شخصاً تجربه کند و در این زمینه به نوعی، هر چند ساده، به بلوغ فکری برسد؛ نه این‌که به ماشین یادداشت کردن، به خاطر سپردن و تحویل دادن تبدیل شود.

ج. اختلاف دو نگاه به عالم ریاضی

متأسفانه تفاوت فاحش و عمیقی بین نگاه ما و نگاه محصّلین ما به دنیای ریاضی وجود دارد. ما با چشمی منطقی، استدلالی و چرایی به ریاضی نگاه می‌کنیم و در خواندن و نوشتن آن، ضمن ریشه‌یابی و سؤال از خود، کوشش می‌کنیم چیزی بدون دلیل نپذیریم و در بیان آن، همهٔ کوشش ما بر آن است که مطلبی را بدون دلیل ارائه نکنیم؛ در حالی که شاید بیشتر محصّلین با اکثر مفاهیم فوق بیگانه هستند و به ریاضی به چشم یک ابزاری نگاه می‌کنند که در به‌کارگیری آن، مهارتی هم کسب نکرده‌اند. در این زمینه، به‌منظور درک تفاوت بین دو نگاه به دنیای ریاضی، بد نیست که به مثال زیر توجه کنید.

مثال. در سر کلاس‌ها می‌گوییم که $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند و تأکید می‌کنیم که مثلاً در تابع f با ضابطهٔ:

$$f(x) = x(1 - \cos\frac{1}{x})$$

x قالبی است برای متغیرهای حقیقی. باز یادآوری می‌کنیم که $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند، لذا عدد حقیقی نیستند. برای این‌که متوجه شویم نتیجهٔ این تدریس، گفتار و تأکید چیست، به حد زیر توجه کنید.

در محاسبهٔ $\lim_{x \to +\infty} x(1 - \cos\frac{1}{x})$ پس از بحث و استدلال و محاسبهٔ حد، محصّلی گفت که من راه‌حل دیگری دارم. عرض کردم بفرمایید پای تابلو و راه‌حل خود را ارائه دهید. به پای تابلو تشریف آورد و گفت که در رابطهٔ:

$$x(1 - \cos\frac{1}{x})$$

به جای x، مقدار $+\infty$ قرار می‌دهیم و حاصل صفر می‌شود.

ملاحظه می‌کنید که در محاسبهٔ حد فوق، چه اصولی را زیر پا می‌گذارد و چه نکات مهمی را نادیده می‌گیرد؟ ملاحظه می‌فرمایید که محصّل کاری به مفهوم بنیادی $0 \times \infty$ که مبهم است، ندارد و راه خود را می‌رود؟

آنچه عرض کردم و مطالب بسیار دیگری که در این مختصر نمی‌گُنجد، می‌رساند که:

اوّلاً، این روش تدریس و نحوهٔ آموزش سنتی که رایج است، برای محصّلین رشته‌های علوم انسانی و علوم پزشکی بسیار مفید نیست. به جرأت می‌توان گفت که دو عامل مهم «بی‌دانشی» و «نیاز به نمره»، باعث می‌شود که وجود ما را در سر کلاس تحمل کنند تا ترم تمام شود.

ثانیاً، برای محصّلین هر رشته (رشته‌های علوم انسانی و پزشکی) باید کتاب‌هایی تدوین شود که در آن از ارائه و بحث پیرامون مفاهیمی که برای ایشان سنگین است، خودداری شود.

به عبارتی دیگر، باید از آن نوع ریاضی که مستقیماً با آن سروکار دارند، در کتاب‌هایشان آورده شود یا حداقل نوع مثال‌هایی که برای تفهیم بیش‌تر ارائه می‌شود، باید به گونه‌ای باشد که مستقیماً با رشتهٔ تحصیلی آنان مرتبط شود؛ زیرا این عمل باعث می‌شود که نه‌تنها مفاهیم ریاضی را به خوبی درک کنند، بلکه در به‌کارگیری آن، صاحب مهارت و تجربه شوند.



برای
دانش آموزان
سال اول و دوم
متوسطه

اتحادها و معادله ها

پرویز شهریاری

حساب در برخی حالت ها کارآمدتر از جبر است

اشاره: در شماره‌های قبل راجع به اتحادها و معادله‌های مختلف بحث کردیم، و مسائلی را با تشکیل معادله و حل جبری و استفاده از اتحاد حل کردیم، در ادامه مطلب مسائلی را عنوان می‌کنیم که برای آن راه‌حل هایی از حساب را آورده‌ایم که این راه‌حل ها نسبت به راه‌های جبری جالبتر است.

آنتوان چخوف در داستان «معلم خصوصی» نکته‌های جالب و خنده‌داری را آورده است؛ از جمله:

«ـ راستش را بخواهید، این یک مسألهٔ جبری است و آن را باید با «ایکس» و «ایگرگ» حل کرد.

شاگرد آهی کشید، دستش را به طرف قلم دراز کرد و گفت:

ـ ولی این مسأله، بدون جبر هم حل می‌شود.

ـ امان از نادانی و بی‌خبری...»

قدیم‌ها، در روزگاری که گاه مهربان‌تر از امروز بوده دوستداران ریاضیات، به کتاب‌های حساب شامل مسأله‌ها علاقه‌مند بودند و به آن‌ها دلبستگی داشتند. دانش‌آموزان با روش گوناگون حل حسابی مسأله‌ها آشنا می‌شدند، آموزش دقیقی می‌دیدند تا به هر اندازه که لازم است، ورزیده شوند و از توانایی‌های خود، در این زمینه، در تمامی طول زندگی استفاده می‌کردند.

در آن روزگار از «تست» و «کنکور» خبری نبود. نه کسی می‌توانست بدون درک اهمیت مسأله آن را حل کند و نه حتی به این اندیشه می‌افتاد که راهی برای «تست‌زدن» بدون این‌که به مفهوم‌های بنیانی ریاضیات پی‌ببرد، پیدا کند. ولی اکنون هم آنانی در زندگی علمی خود موفق می‌شوند که به دور از سروصداها و جنجال‌های روز، سراغ مفهوم‌ها بروند و چیزی را نفهمیده رها نکنند.

باید به جز آموزش روش‌های حل، به ذوق و احساس هنری

دانش‌آموزان هم توجه داشت؛ راه‌حل حسابی این مسأله، زیباتر از راه حل جبری آن است. البته باید گفت که راه‌حل جبری مسأله هم می‌تواند آموزنده باشد و مسیرهای تازه‌ای به روی ما بگشاید. درضمن، از راه حل هندسی هم نباید غافل بود؛ چرا که معنا و مفهوم مسأله را، به صورتی محسوس و عینی، در برابر ما می‌گذارد. منطقی‌تر و معقول‌تر، این است تا به همهٔ راه‌حل‌های ممکن یک مسأله بیندیشیم و از راه حل‌های گوناگون، بهره ببریم. در این جا، چند مسأله را با راه‌حل حسابی و گاه هندسی می‌آوریم؛ ولی سفارش می‌کنیم به راه‌حل‌های دیگر هم بیندیشید. مسأله‌ها چندان ساده نیستند و به اندیشیدن نیاز دارند.

سفارشی به دانش‌آموزان علاقه‌مند دارم که شامل چند بند می‌شود:

۱. هیچ مطلبی را نفهمیده، جلو نروید. هیچ قانونی وجود ندارد تا بدون فهم مطالب قبلی بتوان مطالب تازه را یادگرفت؛ این از ویژگی‌های ریاضیات است. هر وقت دیدید درس ریاضی را نمی‌فهمید، به گذشته مراجعه کنید، به درس‌های گذشته. از دبیر خود هم کمک بگیرید و به هر حال تکرار می‌کنیم، از هیچ مطلبی نگذرید؛ مگر این که آن را درست فهمیده باشید.

۲. اگر ریاضیات را دوست دارید، سفارش فرد دیگری را نپذیرید که گویا ریاضیات زندگی را تأمین نمی‌کند. از حالا به اندیشهٔ تأمین زندگی نباشید و تنها به دنبال ذوق خود بروید.

۳. مسأله‌ای را که می‌خواهید حل کنید، به راه‌های گوناگون بیندیشید و به راهی که انتخاب کرده‌اید، قانع نشوید.

همین سه سفارش کافی است و به مسأله‌ها بپردازیم. اول مسأله‌ای ساده:

مسألهٔ اوّل. خریداری ۱۳۸ متر ماهوت به رنگ‌های سبز و سیاه به مبلغ ۱۰۸۰۰۰ ریال خرید. از هر رنگ چند متر ماهوت خریده است؛ به شرطی که هر متر ماهوت سبز ۱۰۰۰ ریال و هر متر ماهوت سیاه ۶۰۰ ریال محاسبه شده باشد.

حل: بیش‌تر متن‌های قدیمی‌تر، مسأله را به این صورت حل کرده‌اند:

اگر تمام ۱۳۸ متر از ماهوت سیاه بود، باید قیمت آن‌ها، مبلغ:

$$۱۳۸ \times ۶۰۰ = ۸۲۸۰۰$$

ریال می‌شد. ولی خریدار مبلغ بیش‌تری پرداخته است؛ یعنی مبلغ ۱۰۸۰۰۰ ریال که تفاوتی برابر:

$$۱۰۸۰۰۰ - ۸۲۸۰۰ = ۲۵۲۰۰$$

ریال دارد این اختلاف به این دلیل است که قیمت هر متر ماهوت سبز ۴۰۰ ریال بیش‌تر است. بنابراین ماهوت سبز به اندازهٔ

$$۲۵۲۰۰ : ۴۰۰ = ۶۳$$

متر بوده است. دیگر میزان ماهوت سیاه به سادگی پیدا می‌شود

$$۱۳۸ - ۶۳ = ۷۵ \text{ (متر)}$$

راه حل، ساده و قابل فهم است؛ ولی کم‌تر به آن توجه می‌شود. مسأله‌هایی از این گونه را، ترجیح می‌دهند با «x» و «y» حل کنند. اگر طول پارچهٔ ماهوت سبز را x و طول پارچهٔ ماهوت سیاه را y بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + y = ۱۳۸ \\ ۱۰۰۰x + ۶۰۰y = ۱۰۸۰۰۰ \end{cases}$$

البته حل این دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی هم مشکل نیست و ما را به همان جواب‌ها برای x و y می‌رساند؛ ولی راه‌حل «حسابی» نیاز به تجزیه و تحلیل ذهنی بیش‌تری دارد و در ضمن، ساده‌تر است و زودتر به نتیجه می‌رسد.

مسألهٔ دوم. نقطه‌های A و B در ساحل رودخانه‌ای، به فاصلهٔ ۲۰ کیلومتر از یکدیگر واقع‌اند؛ در ضمن آب رودخانه، از سوی A به سوی B جریان دارد. قایق موتوری از A به سمت B می‌رود، بعد از رسیدن به B بلافاصله برمی‌گردد و خود را به A می‌رساند و از A دوباره به سمت B می‌رود. همزمان با قایق موتوری، قایق پارویی از A به سوی B حرکت می‌کند. قایق موتوری ضمن برگشت از B، قایق پارویی را در ۴ کیلومتری A ملاقات می‌کند. قایق موتوری برای بار دومی که از A به سمت B می‌رود، در چه فاصله‌ای از A به قایق پارویی می‌رسد؟ قایق پارویی وقتی در جهت جریان آب باشد، بدون استفاده از پارو پیش می‌رود.

حل: حالت اوّل. فرض می‌کنیم، قایق موتوری وقتی در خلاف جریان آب رود حرکت می‌کند، سرعت خود را حفظ کند؛ یعنی هم در جهت جریان آب و هم در خلاف جهت جریان آب، سرعتی ثابت و یکنواخت داشته باشد (در این حالت، می‌توان

مسأله را برای حالتی در نظر گرفت که به جای قایق موتوری، یک دوچرخه‌سوار و به جای قایق پارویی، یک پیاده و فاصلهٔ A تا B جادهٔ شوسه باشد که درنتیجه، دوچرخه‌سوار همیشه سرعتی ثابت دارد). دو قایق وقتی برای نخستین بار به هم می‌رسند که قایق موتوری ۳۶ کیلومتر و قایق ساده ۴ کیلومتر پیموده‌اند. نسبت فاصله‌های پیموده شده برابر است با نسبت سرعت‌ها؛ یعنی قایق موتوری سرعتی ۹ برابر قایق ساده دارد.

۳۶:۴ = ۹

برای ملاقات دوم، قایق موتوری باید ۸ کیلومتر بیش‌تر در راه باشد (از نقطهٔ برخورد اوّل تا A و برگشت همین فاصله). قایق موتوری باید ۹ برابر قایق ساده و درضمن ۸ برابر آن در حرکت باشد (نسبت دو عدد برابر ۹ و تفاضل آن‌ها برابر ۸ است)؛ یعنی قایق موتوری ۹ کیلومتر و قایق ساده یک کیلومتر بعد از ملاقات اوّل باید بپیمایند تا ملاقات دوم دست دهد. به این ترتیب، در ۵ کیلومتر A دوباره به هم می‌رسند.

حالت دوم. وقتی قایق موتوری در جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازهٔ سرعت جریان آب، به سرعتش افزوده می‌شود و وقتی برخلاف جریان آب حرکت می‌کند، به اندازهٔ سرعت جریان آب، از سرعتش کم می‌شود. در این حالت، با همان سرعتی که از قایق پارویی (وقتی با هم از A حرکت کرده‌اند) دور می‌شود که در برگشت از B به طرف قایق ساده «با همان سرعت» به آن نزدیک می‌شود. درواقع، وقتی دو قایق در جهت جریان آب حرکت می‌کنند، قایق موتوری با سرعتی برابر تفاضل سرعت‌ها، از قایق ساده فاصله می‌گیرد؛ ولی وقتی از طرف دیگر، همان سرعت قایق ساده (یعنی سرعت جریان آب) به آن افزوده می‌شود، درنتیجه قایق موتوری با سرعت اختصاصی خود از قایق پارویی دور می‌شود. وقتی قایق موتوری از B به سمت قایق ساده می‌آید، با سرعتی برابر مجموع سرعت‌های دو قایق به هم نزدیک می‌شوند؛ ولی در عوض از سرعت قایق موتوری، به اندازهٔ سرعت جریان آن کم می‌شود، درنتیجه مانند این است که قایق موتوری با سرعت اختصاصی خود، به محل ملاقات نزدیک می‌شود. بنابراین زمانی که طول می‌کشد تا قایق موتوری از قایق ساده دور شود و به B برسد، برابر با زمان لازم برای این که قایق موتوری، با حرکت از B، تا ملاقات قایق ساده حرکت کند؛ یعنی نسبت مساحت‌هایی که قایق موتوری در این دو حالت پیموده، برابر است با نسبت سرعت‌های آن در جهت جریان آب و در خلاف جهت جریان آب؛ نسبت این سرعت برابر است با $\frac{۲۰}{۱۶}$ یا $\frac{۵}{۴}$. فاصلهٔ نخستین ملاقات تا A برابر ۴ کیلومتر است، بنابراین ملاقات دوم دو قایق در ۵ کیلومتری A پیش می‌آید.

یادداشت. به دو نکتهٔ جالب توجه کنید: ۱. در هر دو حالت به یک نتیجه رسیدیم. ملاقات دوم در ۵ کیلومتری A پیش می‌آید. ۲. آزمایش کنید؛ اگر بخواهیم حالت دوم مسأله را به یاری جبر حل کنیم، چگونه باید معادله یا معادله‌ها را تشکیل داد؟

مسألهٔ سوم. دو بندرگاه کوچک A و B در ساحل رودخانه‌ای واقع‌اند. دو قایق، یکی از A و دیگری از B، در یک لحظه، به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. وقتی به هم می‌رسند، بسته‌های پستی را که به همراه دارند عوض می‌کنند و هر کدام به سوی بندرگاه خود برمی‌گردند. قایقی که از A حرکت کرده بود، یک ساعت بعد دوباره به A برگشت. ولی اگر قایق A، ۱۵ دقیقه زودتر از قایق B حرکت می‌کرد، آن دو قایق درست در نقطهٔ وسط A و B به هم می‌رسیدند. قایقی که از B حرکت کرده بود، بعد از چه زمانی دوباره به B برمی‌گردد.

حل: یادآوری می‌کنیم، لحظهٔ برگشت قایق به A، به طور کامل از روی لحظهٔ خروج قایق از B معین می‌شود؛ درست مثل برگشت قایق دیگر به B که از روی لحظهٔ خروج قایق A معین می‌شود. برای درک بهتر مطلب، کافی است تصور کنیم که قایق‌ها در لحظه‌ای که به هم می‌رسند، کالای پستی خود را عوض نکنند و در جهت عکس، به جای نخستین خود برگردند. به این ترتیب، قایقی که از A خارج شده است، پس از یک ساعت و ۱۵ دقیقه به جای نخستین خود برمی‌گردد؛ یعنی برای نصف راه از A تا B و برگشت آن، به یک ساعت و ۱۵ دقیقه نیاز دارد، و برای تمامی راه به ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه. بنابراین قایقی که از B خارج شده است، بعد از یک ساعت و ۳۰ دقیقه به جای نخست خود برمی‌گردد.

مسألهٔ چهارم. دو شمش با وزن‌های m کیلوگرم و n کیلوگرم و درصدهای مختلف مس در اختیار داریم. از هر شمش، تکه‌ای به وزن‌های برابر جدا کرده‌ایم و با آنچه باقی مانده است، شمش دیگری ساخته‌ایم. چه تکه‌ای با چه وزنی باید از شمش‌ها جدا

کرد تا درصد مس در شمش جدید برابر باشد؟

حل: این مسأله در بعضی از مسابقه‌ها داده شده است. بی‌تردید، این مسأله را می‌توان به یاری معادله‌ها حل کرد. درضمن، نباید از این مطلب هراس داشت که تعداد مجهول‌ها (یعنی ۳) از تعداد معادله‌ها (یعنی ۱) بیش‌تر است. نباید شگفت‌زده شد که راه‌حل کلی این مسأله، راه حل حسابی است. کلی، از این جهت که برای هر تعداد شمش می‌تواند به کار رود؛ در حالی که راه حل جبری به دشواری برمی‌خورد و همراه با محاسبه‌های مفصل است.

درواقع، این یک مسألهٔ حسابی عادی دربارهٔ «تقسیم به نسبت» است. در هریک از قیمت‌های شمش‌های تازه، باید، از شمش‌های نخستین، به نسبت $\frac{m}{n}$ وارد شود. (دربارهٔ دلیل این مطلب بیندیشید)؛ یعنی در شمش تازهٔ به وزن m کیلوگرم، m بخش برابر از شمش نخست (که به وزن m کیلوگرم است) و n بخشی از همین گونه از شمش دوم لازم است. وزن یک بخش برابر $\frac{m}{m+n}$ کیلوگرم می‌شود. ماندهٔ شمش اول در این شمش تازه برابر است با:

$$\frac{m}{m+n}.m=\frac{m^2}{m+n}\quad \text{(کیلوگرم)}$$

و بخش جدا شدهٔ دومی:

$$\frac{mn}{m+n}\quad \text{(کیلوگرم)}$$

چنین بخشی را باید از شمش اول جدا کرد

مسألهٔ پنجم. پنج مرد جوان ماهیگر، به صید ماهی مشغول بودند. با پایان یافتن صید، اولی گفت، او بیش از دیگران صید کرده است و $\frac{1}{3}$ آن‌چه را به دست آورده است، بین دیگران به طور برابر تقسیم می‌کند. بعد معلوم شد که دومی بیش از دیگران ماهی دارد و او $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را به طور برابر بین دیگران تقسیم کرد. می‌دانیم کل صید ماهیگیران ۶ کیلوگرم و ۴۰۰ گرم بوده و بعد از این، جریان به همه برابر رسیده است. مقدار صید هر نفر را، پیش از تقسیم ماهی‌ها معین کنید.

حل: این مسأله، نمونهٔ مسأله‌های حسابی است که باید آن را از آخر حل کرد. در پایان به هر ماهیگیر یک کیلوگرم و ۲۸۰ گرم ماهی رسیده است؛ یعنی پیش از آن که نفر دوم $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را بین دیگران تقسیم کند، به اندازهٔ:

۹۲۰ گرم و ۱ کیلوگرم $= \frac{3}{2} \times$ ۲۸۰ (گرم و ۱ کیلوگرم)

ماهی بوده است. در این زمان، یعنی قبل از آن که نفر دوم $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را تقسیم کند، چهار نفر دیگر هر کدام به اندازهٔ:

۶۴۰ : ۴ = ۱۶۰ (گرم)

کم‌تر، یعنی هرکدام ۱ کیلوگرم و ۱۲۰ گرم ماهی داشته‌اند، اگر به همین ترتیب استدلال کنیم، روشن می‌شود، پیش از آن که نفر اول $\frac{1}{3}$ ماهی‌های خود را بین چهار نفر دیگر تقسیم کند، یک کیلوگرم و ۶۸۰ گرم، نفر دوم یک کیلوگرم و ۷۸۰ گرم و هریک از سه نفر دیگر، ۹۸۰ گرم ماهی داشته‌اند.

مسألهٔ ششم. در بندر برای پر کردن تانکرها سه لوله وجود دارد. از لولهٔ نخستین در هر ساعت ۳۰۰ تن نفت بیرون می‌آید، از لولهٔ دوم ساعتی ۴۰۰ تن و از لولهٔ سوم ساعتی ۵۰۰ تن. باید دو تانکر بارگیری شود. اگر بارگیری به کمک لولهٔ اول و دوم انجام شود، به نحوی که آن را به یک تانکر و لولهٔ دوم را به تانکر دیگر متصل کنیم، بارگیری دو تانکر، به ازای حداکثر سرعت در دو حالت ممکن اتصال، ۱۲ ساعت وقت می‌گیرد. درضمن، یکی از تانکرها ممکن است زودتر پر شود، که در این صورت، کار لوله‌ای که به آن متصل است، متوقف می‌شود. اگر گنجایش تانکر کوچک‌تر (یعنی حجم آن) دو برابر آنچه اکنون هست، می‌بود و بارگیری به‌وسیلهٔ لوله‌های دوم و سوم انجام می‌گرفت، در این صورت، در حالت سریع‌ترین اتصال، بارگیری ۱۴ ساعت طول می‌کشید.

هر کدام از این نفت‌کش‌ها، چند تن نفت در خود جا می‌دهند؟

حل: روشن است که باید لولهٔ با بهره‌دهی زیادتر را به تانکری وصل کرد که گنجایش بیش‌تر دارد؛ چون یکی از تانکرها در ۱۲ ساعت پر می‌شود، یا تانکر کوچک‌تر:

$$12\times 300=3600$$

تن نفت می‌گیرد و یا:

$$12\times 400=4800 \quad \text{(تن)}$$

حالت اول ممکن نیست؛ زیرا با دو برابر کردن حجم تانکر کوچک‌تر به ۷۲۰۰ تن می‌رسیم، که برای پر کردن آن، حتی با لولهٔ سوم هم، بیش از ۱۴ ساعت وقت لازم است. بنابراین تانکر بزرگ‌تر ۴۸۰۰ تن گنجایش دارد و با لولهٔ دوم پر می‌شود و از آن گذشته با لولهٔ سوم، زودتر از ۱۴ ساعت؛ یعنی تانکر کوچک‌تر گنجایشی به این اندازه دارد:

$\frac{1}{2}\times ۱۴\times ۵۰۰ = ۳۵۰۰$ (تن)

مسألهٔ هفتم. در خبری مربوط به مسابقهٔ اسکی گفته شده است، درصد تعداد عضوهای گروهی که در مسابقه شرکت کرده‌اند، در مرز از ۹۶/۸ درصد تا ۹۷/۲ درصد است. حداقل ممکن تعداد عضوهای این گروه چقدر است؟

حل: درصد کسانی که در مسابقه شرکت نمی‌کنند، از ۲/۸ درصد تا ۳/۲ درصد است. اگر یک نفر در مسابقه شرکت نکند (کم‌تر از آن ممکن نیست)، تعداد عضوهای گروه، در مرزهای:

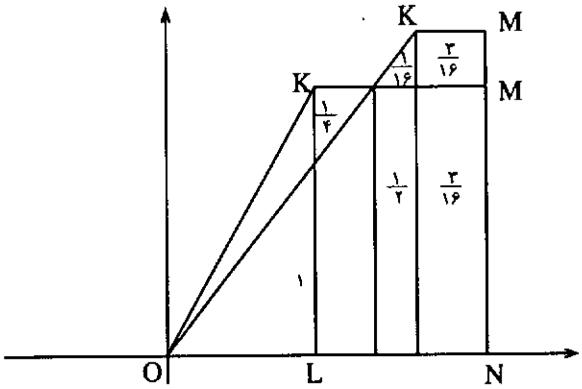
از... $۱\times\frac{۱۰۰}{۳/۲} = ۳۱/۲۰۰$ تا ... $۱\times\frac{۱۰۰}{۲/۸} = ۳۵/۷$

خواهد بود؛ یعنی کم‌ترین تعداد عضوهای گروه ۳۲ نفر است. روشن است، به ازای این تعداد عضوها، ۳/۲ درصد کم‌تر از واحد است؛ در حالی که بنابر شرط، یک نفر در مسابقه شرکت نکرده است.

مسألهٔ هشتم. این مسأله را به دو جهت در این جا آورده‌ایم؛ نخست این که در حل این مسأله، از هیچ معادله‌ای یا رابطه‌ای که بین مجهول‌ها باشد، استفاده نشده و بیش‌تر در هندسه و رسم به‌کار رفته است؛ دوم از روشی برای حل مسأله‌های مربوط به حرکت استفاده شده است که به نمایش هندسی آن‌ها مربوط می‌شود.

از نقطه‌های A و B، دو قطار به سوی یکدیگر در یک لحظه حرکت کردند. هر کدام از آن‌ها در آغاز با شتابی یکنواخت حرکت کردند (سرعت نخستین قطارها برابر صفر و شتاب حرکت در دو قطار متفاوت است)، و سپس با سرعتی یکنواخت پیش رفتند. نسبت سرعت‌های حرکت‌های یکنواخت دو قطار، برابر $\frac{۵}{۴}$ است. در چند لحظهٔ زمانی، سرعت قطارها برابر بود، ولی در آن لحظه، یکی از قطارها، فاصله‌ای برابر $\frac{۵}{۴}$ دیگری را طی می‌کرد. دو قطار در یک لحظه به نقطه‌های A و B رسیدند. چه بخشی از راه را هریک از قطارها پیموده بودند تا لحظه‌ای که دو قطار به سرعت‌های برابر رسیدند.

حل: سرعت را برای هر یک از قطارها به صورت هندسی در نظر می‌گیریم. نمایش را در دستگاه مختصاتی که سرعت را برحسب زمان برای هر قطار نشان می‌دهد، معین می‌کنیم. درضمن، فرض می‌کنیم دو قطار از یک نقطه حرکت کرده‌اند.



برای یکی از قطارها، نمایش حرکت را با OKM در نظر می‌گیریم و برای دیگری OK_1M_1 (شکل را ببینید). اندازهٔ مساحتی را که هر قطار می‌پیماید، برابر است با حاصل ضرب زمان (محور افقی) در سرعت (محور قائم)؛ یعنی برابر مساحت شکلی است که از پایین با محور زمان و از سمت چپ با سرعت نشان داده شده است.

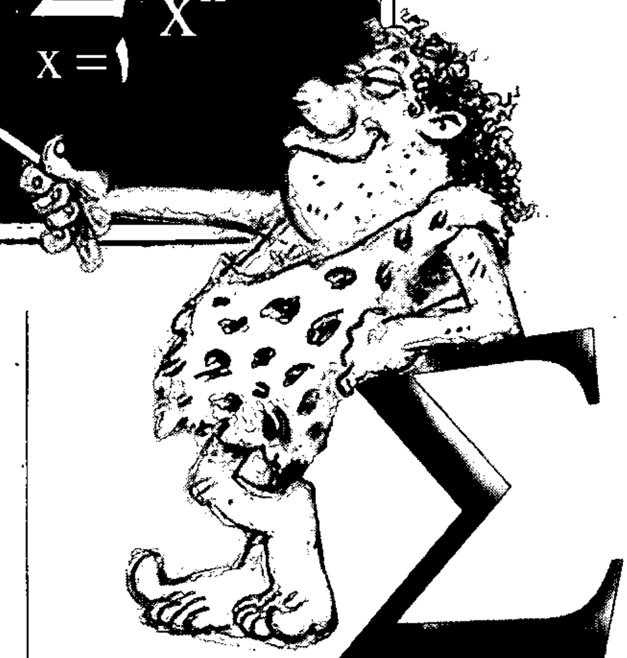
بنابر شرط مسأله، مساحت ذوزنقه‌های OKMN و OK_1M_1N با هم برابرند؛ یعنی شکل‌های OKP و PK_1M_1M هم ارزند (مساحتی برابر دارند). بنابر شرط، مساحت OKPL برابر است با $\frac{۵}{۴}$ مساحت OPL. اگر مساحت OPL را برابر واحد بگیریم، مساحت OKP برابر $\frac{۱}{۴}$ و مساحت PK_1T برابر $\frac{۱}{۱۶}$ می‌شود؛ زیرا $K_1T = \frac{1}{4}PL$ (بنابر شرط سرعت حرکت یکنواخت‌ها برابر $\frac{۵}{۴}$ است؛ یعنی $MN = \frac{5}{4}PL$) و مثلث‌های OPL و PK_1T متشابهند. سپس از هم‌ارزی OKP و PK_1M_1M، مساحت مستطیل TK_1M_1M را پیدا می‌کنیم که برابر $\frac{۳}{۱۶}$ می‌شود. بعد مساحت دو مستطیل باقی‌مانده را به دست می‌آوریم. تا به مسیر (برابر با مساحت‌های OKMN یا OK_1M_1N) برابر است با $۲\frac{۱}{۲}$. از آن‌جا که مساحت‌های ذوزنقهٔ OKPL و مثلث OPL به ترتیب برابر است با $\frac{۵}{۴}$ را، پس در لحظهٔ برابری سرعت‌ها (در نقطهٔ P)، یکی از قطارها $\frac{۱}{۲}$ مسیر را پیموده است و دیگری $\frac{۲}{۵}$ آن را.

اسامی برندگان مسأله‌های مسابقه‌ای برهان

۱ـ معصومه ابوالفتحی / تهران	۱ـ محمد رجبی / تهران
۲ـ رسول شریفی / اصفهان	۲ـ مرتضی نعمتی / تالش
۳ـ الهام رستگار / تهران	۳ـ مریم هخامنشی / بیجار

محاسبهٔ حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{Q}\,,\ k \in \mathbb{N})$

سید محمدرضا هاشمی موسوی



برای محاسبهٔ حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^n}$ به‌ازای هر k و هر n گویا،

کافی است نابرابری‌های زیر را اثبات کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{n-1}{k^n} > \dfrac{1}{k^{n-1}} - \dfrac{1}{(k+1)^{n-1}} & (1) \\[2ex] \dfrac{n-1}{k^n} < \dfrac{1}{(k-1)^{n-1}} - \dfrac{1}{k^{n-1}} & (2) \end{cases}$$

برای اثبات (۱) و (۲) به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} = \frac{(k+1)^{n-1} - k^{n-1}}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}} =$$

$$\frac{(k+1-k)\left[(k+1)^{n-2} + (k+1)^{n-3}k + \dots + k^{n-2}\right]}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}}$$

$$= \frac{(k+1)^{n-2} + (k+1)^{n-3}k + \dots + k^{n-2}}{k^{n-1}(k+1)^{n-2}} < \frac{(n-1)(k+1)^{n-2}}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}} < \frac{n-1}{k^n}$$

در نتیجه:

$$\frac{n-1}{k^n} > \frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} \qquad (1)$$

و همچنین به‌طور مشابه داریم:

$$\frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}} = \frac{k^{n-1} - (k-1)^{n-1}}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}} =$$

$$\frac{(k-k+1)\left[k^{n-2} + k^{n-3}(k-1) + \dots + (k-1)^{n-2}\right]}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}} =$$

$$\frac{k^{n-2} + k^{n-3}(k-1) + \dots + (k-1)^{n-2}}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}} > \frac{(n-1)(k-1)^{n-2}}{k^{n-1}(k-1)^{n-2}} > \frac{n-1}{k^n}$$

در نتیجه:

$$\frac{n-1}{k^n} < \frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}} \qquad (2)$$

پس از اثبات (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} < \frac{n-1}{k^n} < \frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}} \qquad (3)$$

در رابطهٔ (۳) مقادیر طبیعی به‌جز یک را به k نسبت می‌دهیم، که در این صورت داریم:

$$k=2:\ \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}} < \frac{n-1}{2^n} < \frac{1}{1^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$k=3:\ \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}} < \frac{n-1}{3^n} < \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}$$

. . . .

$$k:\ \frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<\frac{n-1}{k^{n}}<\frac{1}{(k-1)^{n-1}}-\frac{1}{k^{n-1}}$$

از جمع روابط فوق نتیجه می‌شود :

$$\therefore\ \frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<(n-1)\sum_{x=2}^{k}\frac{1}{x^{n}}<1-\frac{1}{k^{n-1}}$$

در این جا از رابطهٔ (۳) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود :

(۴)

$$\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-1}}<(n-1)\sum_{x=2}^{k}\frac{1}{x^{n}}<1-\frac{1}{k^{n-1}}$$

اینک طرفین رابطهٔ (۴) را بر $n-1>0$ تقسیم می‌کنیم و به کل نابرابری یک واحد اضافی می‌کنیم که در این صورت داریم :

$$n-1>0:\ 1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}}<$$

$$\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}<1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}}\qquad (5)$$

نابرابری مضاعف (۵) حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}$ را به‌ازای هر k طبیعی و هر n گویای بزرگ‌تر از یک نشان می‌دهد.

به‌عنوان مثال، حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{2}}$ و $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{3}}$ را حساب می‌کنیم :

$$n=2:\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{2}}<1+1-\frac{1}{k};$$

$$\frac{3k+1}{2K+2}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{2}}<\frac{2k-1}{k}$$

بدیهی است اگر $k\to\infty$ خواهیم داشت : $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}}<2$

$$n=3:\ 1+\frac{1}{8}-\frac{1}{2(k+1)^{2}}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{3}}<1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k^{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{(3k+1)(3k+5)}{8(k+1)^{2}}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{3}}<\frac{3k^{2}-1}{2k^{2}}$$

بدیهی است اگر $k\to\infty$ ، خواهیم داشت : $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{3}}<\frac{3}{2}$

به‌طور کلی اگر $k\to\infty$ ، داریم $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n}}<\frac{n}{n-1}$ $(n>1)$.

حال اگر طرفین رابطهٔ (۴) را بر $n-1<0$ تقسیم کنیم و به کل نابرابری حاصل یک واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت :

$$n-1<0:\ 1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}<$$

$$1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}}\qquad (6)$$

نابرابری (۶) حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}$ را به‌ازای هر k طبیعی و هر n گویای کوچک‌تر از یک نشان می‌دهد.

به‌عنوان مثال، حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $\sum_{x=1}^{k}x$ و $\sum_{x=1}^{k}\sqrt{x}$ را حساب می‌کنیم :

$$n=\frac{1}{2}:\ 1-2+2\sqrt{k}<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}<1-2\sqrt{2}+2\sqrt{k+1};$$

$$2\sqrt{k}-1<\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{2}+1$$

$$n=-1:\ 1-\frac{1}{2}+\frac{k^{2}}{2}<\sum_{x=1}^{k}x<1-2+\frac{(k+1)^{2}}{2};$$

$$\frac{k^{2}+1}{2}<\sum_{x=1}^{k}x<\frac{(k+1)^{2}}{2}-1$$

$$n=\frac{-1}{2}:\ 1-\frac{2}{3}+\frac{2k\sqrt{k}}{3}<\sum_{x=1}^{k}\sqrt{x}<$$

$$1-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2(k+1)\sqrt{k+1}}{3};$$

$$\frac{2k\sqrt{k}+1}{3} < \sum_{x=1}^{k}\sqrt{x} < \frac{2(k+1)\sqrt{k+1}+3-4\sqrt{2}}{3}$$

در این جا برای تکمیل شدن بحث، تنها حالت $n-1=0$ باقی می‌ماند که این حالت را به طور مستقل بررسی و حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ را مشخص می‌کنیم.

برای تعیین حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$، می‌توان نوشت:

$$m>0:\ \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}$$

بنابراین کافی است کران بالای $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}$ و کران پایین $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}$ را به دست آوریم. برای این منظور، در رابطهٔ (۵) عدد n را به $\left(1+\frac{1}{m}\right)$ تبدیل می‌کنیم و در این صورت:

$$(m>0)\frac{m}{\sqrt[m]{2}}+1-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \le m+1-\frac{m}{\sqrt[m]{k}} \quad (7)$$

به طور مشابه در رابطهٔ (۶) عدد n را به $\left(1-\frac{1}{m}\right)$ تبدیل می‌کنیم و در این صورت داریم:

$$(m>0)m\sqrt[m]{k}-m+1 \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}} \le m\sqrt[m]{k}+1-m\sqrt[m]{2}+1 \quad (8)$$

در این جا از روابط (۷) و (۸) حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ نتیجه می‌شود، یعنی:

$$1+\frac{m}{\sqrt[m]{2}}-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}} \le m\sqrt[m]{k+1}-m\sqrt[m]{2}+1\ ;$$

$$1+\frac{m}{\sqrt[m]{2}}-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le 1-m\sqrt[m]{2}+m\sqrt[m]{k+1} \quad (9)$$

اکنون اگر $m\to\infty$، حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ به دلخواه به دست خواهد آمد. به عبارت دیگر، اگر هر قدر مقدار m را بزرگ‌تر اختیار کنیم، حدود سری هارمونیک دقیق‌تر به دست می‌آید. بنابراین برای به دست آوردن هرچه دقیق‌تر سری $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ و محاسبهٔ این سری با تقریب دلخواه، باید m را افزایش دهیم. به عنوان مثال، اگر $m=10^{6}$ اختیار شود، حدود $\sum_{x=1}^{10^{6}}\frac{1}{x}$ چنین می‌شود:

$$14/1223 < \sum_{x=1}^{10^{6}}\frac{1}{x} < 14/1226$$

درنتیجه با تقریب ۰/۰۰۰۳، سری فوق برابر است با $\sum_{x=1}^{10^{6}}\frac{1}{x} \approx 14/1223$ که با سه رقم اعشار صحیح است.

با اختیار کردن $m>10^{6}$ از رابطهٔ (۹) توسط ماشین‌های محاسبه‌گر بادقت بالا، می‌توان سری هارمونیک را به ازای هر k با تقریب دلخواه محاسبه کرد. بنابراین رابطهٔ (۹) را می‌توان الگوریتم محاسبهٔ $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}$ دانست.

در این جا حدود $\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}}$ برای هر k طبیعی و هر n گویا به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{cases} n>1:\ 1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} < \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}} < 1+\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}} & (5) \\ n=1:\ 1+\frac{m}{\sqrt[m]{2}}-\frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \le \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x} \le 1-m\sqrt[m]{2}+m\sqrt[m]{k+1} \quad (m\to\infty) & (9) \\ n<1:\ 1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)k^{n-1}} < \sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x^{n}} < 1+\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} & (6) \end{cases}$$

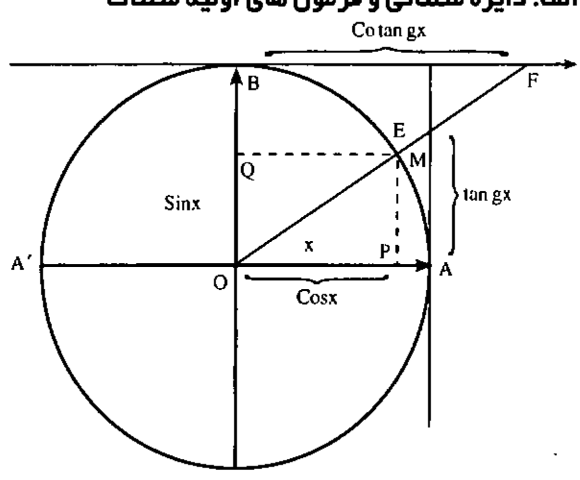
احمد قندهاری

مثلثات

برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

مقدمه

الف. دایرهٔ مثلثاتی و فرمول های اوّلیهٔ مثلثات



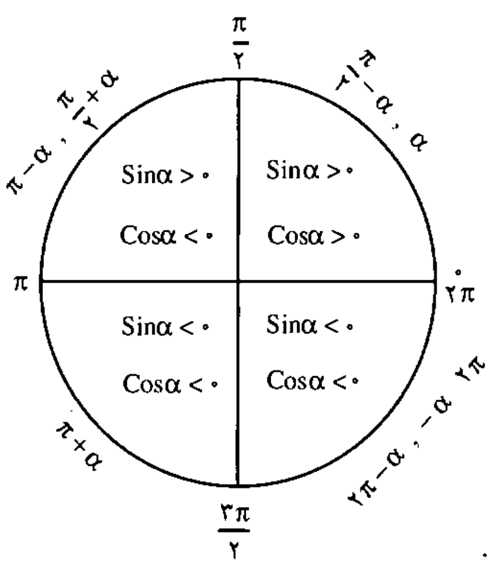
$$1)\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\end{cases}$$

$$2)\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad (\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$3)\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad (\alpha\neq k\pi)$$

$$4)\ \tan\alpha.\cot\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}\end{cases}\ \left(\alpha\neq\frac{k\pi}{2}\right)$$

تمرین۱ . اگر $\cot\alpha=\sqrt{2}-1$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه $\tan\alpha$ ، $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ را بیابید.



حل:

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=1+\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$=1+3+2\sqrt{2}=2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{2(2)}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^{۲}\alpha = ۱-\cos^{۲}\alpha = ۱-\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$
$$=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

تمرین۲ . اگر $\cdot < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ ، $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ و $a, b > \cdot$ ، $\sin\alpha$ ، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ را بیابید .

حل :

$$\sin^{۲}\alpha = ۱-\cos^{۲}\alpha = ۱-\frac{a^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}} = \frac{b^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}}{\frac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{a}{b}$$

ب. واحدهای کمان یا زاویه

۱ . **درجه** : اگر محیط یک دایره را به (۳۶۰) قسمت مساوی تقسیم کنیم ، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به هر قسمت را یک درجه گویند . علامت درجه (°) و مقدار زاویه بر حسب درجه را با D نشان می دهند .

۲ . **رادیان** : اگر شعاع یک دایره را با یک تکه نخ اندازه بگیریم ، سپس آن را روی محیط دایره منطبق کنیم ، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به این کمان اشغال شده به وسیلهٔ نخ را یک رادیان گویند . علامت رادیان r و مقدار زاویه بر حسب رادیان را با R نشان می دهند . با اندازه گیری های دقیق متوجه شدند که محیط یک دایره تقریباً ۶/۲۸ رادیان است که آن را با ۲π نشان می دهند .

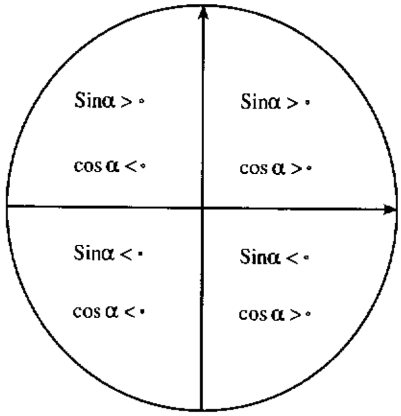
رابطهٔ بین درجه و رادیان : $\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}}$

ج . رابطهٔ بین نسبت های مثلثاتی $(\pi-\alpha)$ ، $(\pi+\alpha)$ ، $(-\alpha)$ ، $(۲\pi-\alpha)$ ، $(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ و $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ **بر حسب نسبت های مثلثاتی** α . فرض می کنیم $\cdot < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

توجه : α , $(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی است .

$(\pi-\alpha)$, $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است .

$(-\alpha)$, $(۲\pi-\alpha)$ در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی است .



$(\pi+\alpha)$ در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد .

$-\alpha$, $(۲\pi-\alpha)$ در ربع چهارم است ، لذا سینوس آن ها منفی است .

$$(۱)\begin{cases}\sin(۲\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(۲\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha\end{cases}$$

$(\pi-\alpha)$ در ربع دوم است ، لذا کسینوس آن منفی است .

$$(۲)\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\end{cases}$$

$(\pi+\alpha)$ در ربع سوم است ، لذا سینوس و کسینوس آن منفی است .

$$(۳)\begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\end{cases}$$

$(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ در ربع اول است ، لذا سینوس و کسینوس آن مثبت است ؛ ولی تابع مثلثاتی عوض می شود .

$$(۴)\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha\end{cases}$$

$(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ در ربع دوم است ، لذا کسینوس آن منفی است و تابع مثلثاتی عوض می شود .

$$(۵)\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$$

از تقسیم فرمول های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵) بر یکدیگر فرمول های، تانژانت و کتانژانت محاسبه می شود .

تمرین ۳. حاصل کسر زیر را بیابید.

$$A=\frac{\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{7\pi}{6}+\tan\frac{11\pi}{6}+\cot\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}+\tan\frac{3\pi}{4}+\cot\frac{7\pi}{4}}$$

حل:

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\frac{2\pi}{3}=\cot\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cot\frac{7\pi}{4}=\cot\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$

$$A=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-1-1}$$

$$=\frac{3-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6\left(\frac{-\sqrt{3}+1-4}{2}\right)}=\frac{7\sqrt{3}-3}{3\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

د. نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha\pm\beta)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β.

$$(6)\quad \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$(7)\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\sin\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$(8)\quad \tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\alpha}{1\mp\tan\alpha.\tan\beta}$$

تمرین ۴. $\sin 15^\circ$ و $\tan 75^\circ$ را بیابید.

حل:

$$\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)$$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ=\tan\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ.\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$\tan 75^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\times\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

هـ. نسبت‌های مثلثاتی (2α)

اگر در فرمول‌های ۶، ۷ و β را به α تبدیل کنیم:

$$(9)\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$(10)\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$(11)\quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$(12)\quad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$(13)\quad \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$(14)\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$(15)\quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

تمرین ۵. مطلوب است محاسبهٔ حاصل کسر

$$P=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos\alpha)}$$

حل:

$$P=\frac{2\sin\alpha.\cos\alpha.\cos\alpha}{(2\cos^2\alpha)(2\cos^2\frac{\alpha}{2})}=\frac{2\sin\alpha.\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha(2\cos^2\frac{\alpha}{2})}=\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$P=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

تمرین ۶. برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$ رابیابید.

حل: $D_f=\mathbb{R}$ می‌توان $x=\tan\alpha$ فرض کرد. پس:

$$f(x)=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$$

داریم: $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \le \sqrt{2} \Rightarrow$$ برد تابع ; $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

تمرین ۷. ثابت کنید: $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = 4$

حل: $\sin 80^\circ = \sin\left(90^\circ - 10^\circ\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10^\circ\right) = \cos 10^\circ$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \tan 60^\circ . \sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} \times \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ}$$

$$A = \frac{\cos\left(60 + 10^\circ\right)}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = \frac{\cos 70^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

تمرین ۸. ثابت کنید؛ $\cos\frac{\pi}{5} . \cos\frac{3\pi}{5} = -\frac{1}{4}$

حل:

$\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5}$ در عبارت بالا قرار می‌دهیم.

$$\text{سمت چپ عبارت} = -\cos\frac{\pi}{5} . \cos\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} . \cos\frac{2\pi}{5}\left(\frac{4\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}\right)$$

$$= \frac{-2 \times \left(2\sin\frac{\pi}{5} . \cos\frac{\pi}{5}\right) . \cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-2\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) . \cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{4}$$

تمرین ۹. مطلوب است محاسبهٔ $P = \sin^4\frac{\pi}{24} + \cos^4\frac{\pi}{24}$

حل: داریم: $a^4 + b^4 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2$

$$P = \sin^4\frac{\pi}{24} + \cos^4\frac{\pi}{24}$$
$$= \underbrace{\left(\sin^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{\pi}{24}\right)^2}_{1} - 2\sin^2\frac{\pi}{24} . \cos^2\frac{\pi}{24}$$

$$P = 1 - 2\left(\sin\frac{\pi}{24} . \cos\frac{\pi}{24}\right)^2$$
$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{12}\right)$$
$$P = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$$

تمرین ۱۰. حاصل کسر $P = \frac{1 - \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$ را بیابید.

حل: $\frac{\pi}{4} + a = x$ فرض می‌شود: $P = \frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \times \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x}$

$$= \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = -\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$P = -\cos 2x = -\cos 2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2a\right) = \sin 2a$$

تمرین ۱۱. اگر $\tan(3a + 2b) = 3$ و $\tan(3a - 2b) = 1$، آن‌گاه $\tan 6a$ را بیابید.

حل: $\begin{cases} 3a + 2b = x \\ 3a - 2b = y \end{cases} \Rightarrow 6a = x + y$

$$6a = x + y \Rightarrow \tan 6a = \tan(x + y)$$
$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y} = \frac{3 + 1}{1 - 3} = -2$$

تمرین ۱۲. با فرض $x \ne 2k\pi$ و $x \ne 2k\pi + \frac{\pi}{2}$، اگر تساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد، a، b و c را بیابید.

$$\frac{\sin x . \cos x}{\sin x + \cos x - 1} = a\sin x + b\cos x + c$$

حل:

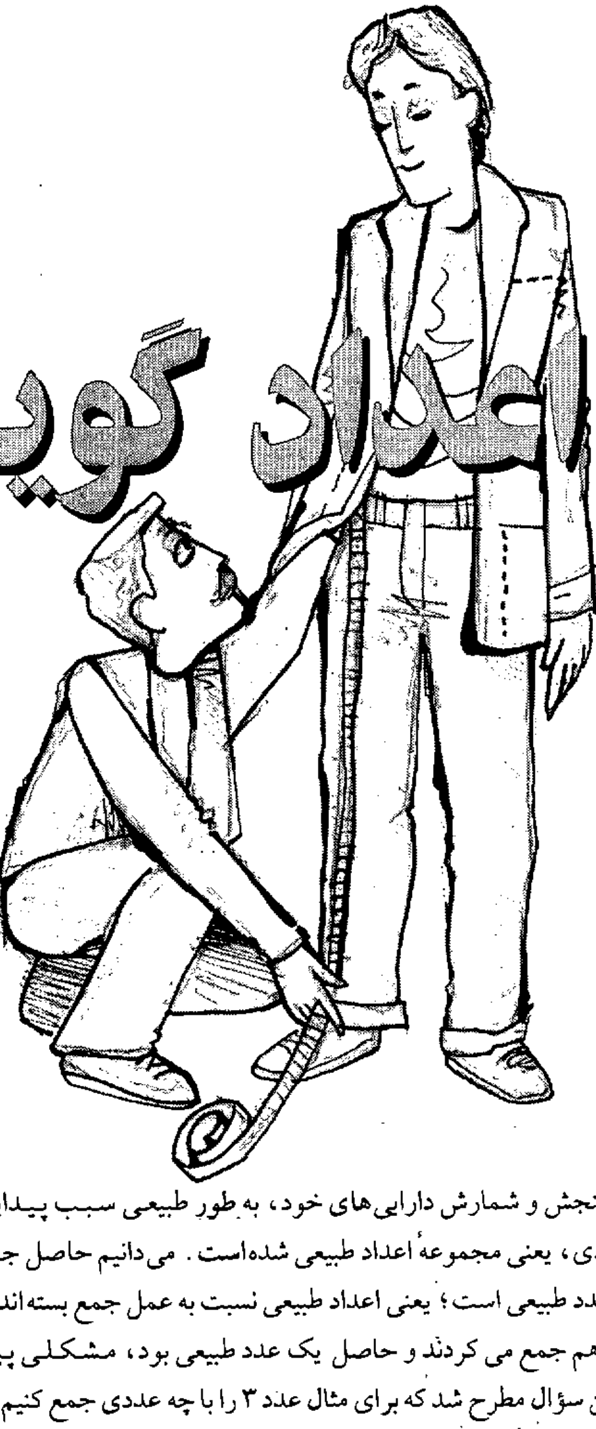
$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\sin x . \cos x}{(\sin x + \cos x) - 1} \times \frac{(\sin x + \cos x) + 1}{(\sin x + \cos x) + 1}$$

$$= \frac{\sin x . \cos x(\sin x + \cos x + 1)}{1 + 2\sin x \cos x - 1} = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}$$

$$= a\sin x + b\cos x + c \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$$

> «چون به مشکلات و نیازمندی‌های مردم درمورد علم حساب نگریستم، دریافتم که تمام آن مشکلات در عدد خلاصه شده‌است.»
>
> محمدبن موسی خوارزمی

مجموعهٔ اعداد گویا



برای دانش‌آموزان سال اول

یادآوری: با کسرهایی به‌صورت $\frac{5}{3}$ و $\frac{-4}{7}$ و نظایر آن‌ها آشنا هستید. به‌طور کلی هر عددی به‌صورت $\frac{m}{n}$ را که در آن m و n اعدادی صحیح باشند و $n \neq 0$، آن را یک کسر می‌نامیم. هر عددی را که بتوان به شکل یک کسر نوشت، یک عدد گویاست.

ممکن است این سؤال برای شما پیش بیاید که، مگر اعدادی هم هستند که نتوان آن را به‌صورت یک کسر نوشت؟ می‌توان ثابت کرد که مثلاً $\sqrt{3}$ را نمی‌توان به‌صورت یک کسر نوشت؛ یعنی کسری مساوی $\sqrt{3}$ وجودندارد. بعداً در این مورد بیش‌تر صحبت خواهیم کرد.

تاریخچه

نیاز بشر اولیه به سنجش و شمارش دارایی‌های خود، به‌طور طبیعی سبب پیدایش نخستین مجموعهٔ عددی، یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی شده‌است. می‌دانیم حاصل جمع دو عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است؛ یعنی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته‌اند. تا زمانی که دو عدد را با هم جمع می کردند و حاصل یک عدد طبیعی بود، مشکلی پیش نمی‌آمد؛ ولی وقتی این سؤال مطرح شد که برای مثال عدد ۳ را با چه عددی جمع کنیم تا ۷ حاصل شود، درواقع به‌معادلهٔ زیر برخوردند:

$$3 + \square = 7$$

پیش‌آمدن چنین مشکلات و معادلاتی، معکوس(قرینه) عمل جمع را در ذهن مردم باستان به‌وجود آورد که ما امروزه آن را تفریق می‌نامیم. درواقع، عمل تفریق دوعدد طبیعی به‌صورت زیر، به‌وسیلهٔ جمع تعریف می‌شود:

$$a - b = \square \Leftrightarrow b + \square = a$$

اما عمل تفریق به‌مفهوم امروزی، در این مجموعه بسته نبود. این موضوع و این که در طبیعت و پیرامون زندگی مردم آن‌زمان، پدیده‌های متقابل و متضاد مانند گرمی در مقابل سردی، سفیدی در مقابل سیاهی، حرکت در مقابل سکون، رفت در مقابل بازگشت و... مشاهده می‌شد، تصور پیدایش و وجود اعداد منفی را در اذهان مطرح می‌کرد. بالاخره با پیدایش اعداد منفی(قرینه‌های اعداد طبیعی) و بعدها با اضافه‌شدن صفر به این مجموعه، مجموعهٔ اعداد صحیح $Z=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$ کامل شد، که در این مجموعه، اعمال جمع و تفریق به‌راحتی انجام می‌گرفت.

لزوم صرفه‌جویی در کار و وقت، سبب شد که عمل ضرب به‌عنوان تعمیم عمل جمعْ مطرح شود؛ به این‌صورت:

$$a+a+\cdots+a=n.a \quad a\in Z, n\in N$$

عمل ضرب در Z به‌راحتی انجام می‌گرفت؛ ولی وقتی به معکوسش فکرمی‌کردند یا با معادلاتی به شکل:

$$۳\times\square=۲$$

برخوردمی‌کردند، دیگر Z کفاف این محاسبات را نمی‌کرد. به‌عبارت دیگر، چنین معادله‌ای در این مجموعه، دارای جواب نبود. مانند عمل تفریق، عمل تقسیم نیز به‌عنوان معکوس عمل ضرب، به‌صورت زیر تعریف شد:

$$\frac{a}{b}=\square \Leftrightarrow \square\times b=a$$

اما عمل تقسیم در Z بسته نبود. این موضوع و ظاهر شدن معادلاتی به‌شکل:

$۳\times\square=۱$ که مجهول آن به‌صورت $\square=\frac{۱}{۳}$ است، و همچنین لزوم تقسیم دارایی‌ها و املاک به نسبت و سهم معین(تقسیم ارث)، سبب شد تا اعداد گویا از روی اعداد صحیح، به‌شکل زیر تعریف شود:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in Z, n\neq ۰\right\}$$

تعریف مجموعهٔ اعداد گویا

Q حرف اول کلمهٔ Quotient به معنای خارج قسمت است.

هر عدد صحیح، یک عدد گویاست؛ یعنی $Z\subset Q$ (چرا؟)

پس تابه‌حال یادگرفتیم: $N\subset Z\subset Q$.

◇ **فعالیت ۱**

الف. اگر صورت کسر مثبتی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ب. اگر مخرج کسر مثبتی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

پ. اگر صورت کسر منفی را در عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ت. اگر مخرج کسر منفی را بر عددی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم، آن کسر چه تغییری می‌کند؟

ث. اگر صورت کسر را در عدد صفر ضرب کنیم، حاصل کسر چه می‌شود؟

ج. اگر صورت و مخرج کسر را در عدد ثابتی غیرصفر کنیم، کسر چه تغییری می‌کند؟

تمرین: فعالیت بالا را درصورتی که عددی که ضرب می‌شود، بین صفر و یک، صفر و ۱ـ و کوچک‌تر از ۱ـ باشد، انجام دهید، اگر عمل ضرب به تقسیم تبدیل شود، چه‌طور؟ نتیجهٔ فعالیت را در حالتی کلی بیان کنید.

دو عدد گویای مساوی

صورت و مخرج یک کسر را می‌توان در عددی غیرصفر ضرب یا تقسیم کرد؛ یعنی هر عدد گویا دارای بی‌شمار نماد است.

◇ **فعالیت ۲**

الف. چند کسر مثبت را که صورت آن‌ها عدد ثابتی است، درنظر بگیرید، کدام کسر بزرگ‌تر است؟ کدام کسر کوچک‌تر است؟

ب. چند کسر مثبت را که مخرج آن‌ها عدد ثابتی است، درنظر بگیرید، کدام کسر بزرگ‌تر و کدام کسر کوچک‌تر است؟

تمرین: فعالیت بالا را درصورتی که کسر منفی باشد، انجام دهید و نتیجه این فعالیت را در حالت کلی بیان کنید.

◇ **فعالیت ۳**

الف. کسری مثال بزنید و ب.م.م بین صورت و مخرج آن کسر را بیابید.

ب. صورت و مخرج کسر را بر ب.م.م تقسیم کنید.

پ. آیا ب.م.م کسر به‌دست آمده، برابر یک است؟

ت. چند کسر دیگر مثال بزنید و این فعالیت را درمورد آن

انجام دهید. نتیجهٔ فعالیت را بیان کنید.

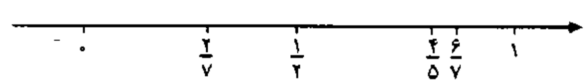
اعداد گویای تحویل ناپذیر

هر کسر را می‌توان به صورت کسری که دیگر ساده نشود، تبدیل کرد، که آن کسر را تحویل ناپذیر گویند. به عبارت دیگر، هرگاه ب. م. م صورت و مخرج برابر یک شد، کسر را تحویل ناپذیر نامند.

◇ **فعالیت ۴**

رضا: با مسأله‌ای مواجه شده‌ام و آن این است که، می‌خواهیم کسرهای $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۴}{۵}$، $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۱}{۲}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. محمد چه راهی به نظرت می‌رسد؟

محمد: به‌نظر من به‌طور تقریبی می‌توان محل هریک از کسرها را روی محور اعداد نمایش داد. همهٔ کسرها از یک کوچک‌ترند؛ چون صورت آن‌ها از مخرج‌هایشان کوچک‌تر است.



رضا: به نظر تو اگر تعداد اعداد گویا زیاد بود، این روش، جالب است؟

محمد: راستش می‌خواستم بگویم اعداد $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۶}{۷}$ تقریباً به هم نزدیک‌اند و برای تقسیم یک پاره‌خط به قطعات مساوی، باید خیلی دقت کرد. اگر اعداد ما خیلی به هم نزدیک باشند، ممکن است در مشاهده خطا داشته باشیم یا این که خط‌کش ما دقیق نباشد تا بتوانیم موقعیت دقیق دو کسر را روی محور مشخص کنیم. رضا راه دیگری به فکرت می‌رسد؟

رضا: به نظر من اگر بتوان مخرج کسرها را با هم مساوی کرد و بعد مقایسه را انجام‌داد، کار ساده‌تر می‌شود.

$$\left.\begin{matrix}\frac{۱}{۲}=\frac{۱\times ۳۵}{۲\times ۳۵}=\frac{۳۵}{۷۰}, & \frac{۶}{۷}=\frac{۶\times ۱۰}{۷\times ۱۰}=\frac{۶۰}{۷۰}\\ \frac{۴}{۵}=\frac{۴\times ۱۴}{۵\times ۱۴}=\frac{۵۶}{۷۰}, & \frac{۲}{۷}=\frac{۲\times ۱۰}{۷\times ۱۰}=\frac{۲۰}{۷۰}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{۲}{۷}<\frac{۱}{۲}<\frac{۴}{۵}<\frac{۶}{۷}$$

محمد: درست است؛ می‌توان این گونه کسرها را مقایسه کرد. اما اگر تعداد اعداد گویا زیاد باشد، این روش خیلی طول می‌کشد.

رضا: خوب، البته می‌توان تعدادی از اعداد گویا را که از کوچکی یا بزرگی آن‌ها اطلاع داریم، کنار بگذاریم، برای مثال می‌دانیم که $\frac{۱}{۲}$ از $\frac{۲}{۷}$ بزرگ‌تر است و فقط $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ به عدد یک نزدیک‌ترند و آن‌دو را با هم مقایسه کنیم.

محمد و رضا تصمیم گرفتند نزد معلمشان بروند و از او بخواهند تا راهنمایی‌شان کند.

معلم: ببینید دانش‌آموزان خوبم، اگر صورت کسرها بر مخرج آن‌ها تقسیم و سپس اعداد اعشاری حاصل را با هم مقایسه کنیم، به نظرم این راه ساده‌تر است. حالا حاصل کسرها را مقایسه کنید.

محمد: حاصل کسرها را به اتفاق هم به‌دست آوردیم:

$$\frac{۱}{۲}=۰/۵,\quad \frac{۶}{۷}=۰/۸,\quad \frac{۴}{۵}=۰/۸,\quad \frac{۲}{۷}=۰/۲۵$$

خوب تاکنون مشخص شد $\frac{۲}{۷}<\frac{۱}{۲}$؛ ولی آقای معلم، الان $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ جواب‌های یکسانی به ما دادند.

معلم: خوب فکر کنید، آیا راه‌حلی به ذهنتان می‌رسد؟

رضا: آری، خوب هریک از کسرها را تا دو رقم اعشار حساب کنیم.

محمد: نیازی به محاسبهٔ همه کسرها نیست، فقط دو کسر $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۵}$ کفایت می‌کند.

رضا: راست گفتی، تکلیف آن دو کسر دیگر مشخص است.

معلم: این روش نیز اشکالی دارد؛ می‌توانید بگویید اشکال آن چیست؟

رضا: آقای معلم، خوب ابتدا تصمیم گرفتیم که تا یک رقم اعشار حساب کنیم و سپس در مرحلهٔ بعد، تا دو رقم اعشار حساب کردیم؛ اگر تعداد اعداد گویا زیاد بود، مشکل ایجاد می‌شد.

معلم: آفرین! به نکتهٔ خوبی اشاره کردید. اشکال آن این است که ناچاریم هربار برای نمایش اعشاری هر کسر، تا چند رقم اعشار محاسبه کنیم. البته ماشین حساب تا چند رقم اعشار را خوب حساب می‌کند و اگر با رایانه آشنایی داشته باشید، می‌توانید برنامه‌ای بنویسید که اعداد را از کوچک به بزرگ یا به عکس مرتب کند.

مسأله مبارزه‌طلب. اگر $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ که در آن‌ها، a، b، c و d اعداد طبیعی هستند، آن‌گاه نشان دهید که $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

آیا می‌توان نتیجه گرفت که بین دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجوددارد؟ (چگونه؟)

مثال ۱ . می‌خواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۵}$ یک عدد گویا بیابیم. ابتدا کسرها را هم مخرج می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۵}=\frac{۱\times۳}{۵\times۳}=\frac{۳}{۱۵}\ ,\ \frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۵}{۳\times۵}=\frac{۵}{۱۵}$$

سپس دنبال عددی می‌گردیم که بین ۳ و ۵ باشد:

$$\frac{۳}{۱۵}<\frac{۴}{۱۵}<\frac{۵}{۱۵}$$

مثال ۲ . می‌خواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ یک عدد گویا پیدا کنیم. ابتدا کسرها را هم مخرج می‌کنیم

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۲}{۳\times۲}=\frac{۲}{۶}\ ,\ \frac{۱}{۲}=\frac{۱\times۳}{۲\times۳}=\frac{۳}{۶}$$

حال چون صورت‌ها اعداد متوالی هستند، می‌توان صورت و مخرج کسرها را در عدد ۲ ضرب کنیم تا بتوان عددی بین آن‌ها پیدا کنیم؛ پس: $\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۱۲}$ ؛ درنتیجه داریم:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

◇ فعالیت ۵

الف . آیا میانگین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ ، بین دو عدد گویای داده‌شده است؟

(میانگین دو عدد، یعنی حاصل‌جمع دو عدد تقسیم بر عدد ۲)

ب . آیا عدد $\frac{۲}{۵}$ بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ است؟

پ . آیا رابطهٔ $\frac{۱}{۲}>\frac{۱+۱}{۳+۲}>\frac{۱}{۳}$ درست است؟

کار با ماشین‌حساب

کسرهای زیر را با ماشین‌حساب محاسبه کنید و نتیجه را درمقابل آن بنویسید:

$\frac{۱}{۲}=۰/۵\ ,\ \frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳\ ,$

$\frac{۱}{۴}=\ldots\ldots\ ,\ \frac{۱}{۵}=\ldots\ldots;$

$\frac{۱}{۶}=۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶\ ,\ \frac{۱}{۷}=\ldots\ldots\ ,$

$\frac{۱}{۸}=\ldots\ldots\ ,\ \frac{۱}{۹}=\ldots\ldots$

الف . حاصل $\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳$ به‌دست آمد. اگر طرفین را در ۳ ضرب کنیم، می‌بینیم که $۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۹=۱$ درست نیست. چه‌طور چنین چیزی ممکن است؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌ها تقریبی است؟

ب . اگر عدد ۱ را بر ۳ تقسیم کنیم، مشاهده می‌کنیم که در خارج قسمت عدد ۳ تکرار می‌شود. آیا روش ساده‌تری برای این که این عدد تکراری را ننویسیم، وجود دارد؟

پ . اعداد گویای بالا را به چند دسته می‌توانید تقسیم کنید؟

ت . آیا راهی وجوددارد که بدون عمل تقسیم بتوان اعداد گویا را به سه دسته تقسیم کرد؟

◇ فعالیت ۶

الف . کسرهای روبه رو چه ویژگی مشترکی دارند؟

$۰/۳=\frac{۱}{۳}\ ,\ ۰/۲۵=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}\ ,$

$۰/۴۵۳=\frac{۴۵۳}{۱۰۰۰}\ ,\ ۱/۴=\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۷}{۵}$

ب . پس از ساده‌کردن کسرها در مخرج آن‌ها، کدام عامل‌های اول وجوددارد؟ آیا می‌توان مخرج آن‌ها را به صورت $۲^n\times۵^m$ که در آن m و n اعداد حسابی هستند، نوشت؟

پ . آیا هر کسری را که مخرج آن به صورت $۲^n\times۵^m$ است، می‌توان به صورت توانی از عدد ۱۰ نوشت؟

ت . از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در انتهای این فصل مشابه با صفحه‌های ۲۷ و ۲۸ کتاب درسی ریاضی ۱ ، می‌توان تدریس را به پایان رساند.

◇خود را بیازماییم

۱ . درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

۱) $Z\subset Q$ ۲) $N\subset Q$ ۳) $Q\subset W$

ـ هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت یک کسر متعارفی مثبت نوشت.

ـ غیر از اعداد گویا، عددی وجود ندارد.

ـ در مجموعهٔ اعداد گویا کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو وجود ندارد.

ـ صورت و مخرج یک کسر را می‌توان در یک عدد ضرب کرد.

ـ عدد صفر، یک عدد گویاست.

ـ عدد $-۰/۲۵$ یک عدد گویا نیست.

۲. دو سال و سه ماه، چه کسری از سه سال و چهار ماه است؟

۳. یکی از کسرهای معادل $\frac{۲}{۵}$ به صورت $\frac{۳۴}{۲a+۱}$ نشان داده شده است. a چه قدر است؟

۴. به ازای چه مقدار a، دو کسر $\frac{a+۱}{۳}$ و $\frac{a-۴}{۲}$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۵. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، نشان دهید به ازای هر $m \neq \frac{-d}{b}$ داریم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+mc}{b+md}$.

۶. پنج عدد گویای بین $\frac{-۳}{۲}$ و $\frac{-۲}{۳}$ بیابید.

۷. کسرهای زیر را به اعشاری تبدیل و دورهٔ گردش هریک را مشخص کنید.

$\frac{۲۶}{۶۵}$ ، $\frac{۱۳}{۶۵}$ ، $\frac{۴}{۶}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، $\frac{۷}{۳۴}$ ، $\frac{۱۳}{۲۳۱}$ ، $\frac{۱}{۱۳}$ ، $\frac{۱}{۷}$

۸. از کسرهای زیر، کدام مولد عدد اعشاری تحقیقی، کدام مولد عدد اعشاری متناوب ساده و کدام متناوب مرکب است؟ پس از تحقیق، عدد اعشاری هریک را بنویسید.

$\frac{۲}{۲۵}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۷}{۱۲}$ ، $\frac{۵}{۳۳}$ ، $\frac{۳}{۵۰}$ ، $\frac{۱}{۸}$

$\frac{۰/۲۵}{۳}$ ، $\frac{۲۶}{۶۵}$ ، $\frac{۵}{۱۱}$ ، $\frac{۵}{۱۸}$ ،

۹. اعداد $\frac{-۳}{۴}$ ، $\frac{-۴}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

۱۰. اگر $a > ۱$ و a گویا باشد، ثابت کنید $a > \frac{۲a}{a+۱} > ۱$.

کاربرد اعداد گویا

خوارزمی نیمهٔ اول کتابش را به راه‌حل‌های معادلات مختلف و اثبات صحت روش‌های خود اختصاص می‌دهد؛ ولی نیمهٔ دیگر کتاب مشتمل بر مثال‌هایی از چگونگی استفاده از علم حساب و جبر در مسائلی است که به حساب نیازهای قوانین اسلامی مطرح می‌شوند.

وقتی شخصی فوت می‌کند و برای فرد بیگانه میراثی باقی نمی‌گذارد، سهم‌های شرعی وراث طبیعی او را می‌توان با حساب کسرها محاسبه کرد. محاسبهٔ این سهم‌ها به «علم‌الفرایض» موسوم شد. مثال زیر از کتاب خوارزمی، کاربرد حساب را در این جا نشان می‌دهد.

مثال. «زنی درمی‌گذرد. از او شوهر، یک پسر و سه دختر باقی می‌ماند.» و منظور محاسبهٔ کسر ماترکی است که به هریک از وراث می‌رسد.

قانون(شرع) در این حالت، آن است که شوهر $\frac{۱}{۴}$ ماترک را می‌برد و به پسر دوبرابر سهم هر دختر تعلق می‌گیرد. (ولی باید اضافه کرد که قانون ارث اسلامی از لحاظ حقوق زنان، به مراتب پیشرفته‌تر از رسومات دوران پیش از اسلام در شبه جزیرهٔ عربستان است.)

خوارزمی سپس باقی‌ماندهٔ ماترک را پس از کسر شوهر، یعنی $\frac{۳}{۴}$ را، به پنج قسمت تقسیم می‌کند، دو قسمت برای پسر و سه قسمت برای دختران، چون کوچک‌ترین مضرب مشترک پنج و چهار، ۲۰ است، ماترک باید به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود. از این ۲۰ قسمت، شوهر پنج، پسر شش و هریک از دختران سه قسمت می‌برند.

مراجع

۱. بابلیان، اسماعیل و همکاران، ریاضیات سال اول دبیرستان، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۸۱.
۲. بهروش، محمود و همکاران، روش تدریس ریاضیات ابتدایی، دورهٔ کاردانی تربیت‌معلم ابتدایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۷۰.
۳. جهانشاهی، محمد، اصول فراگیری و آموزش ریاضی دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۷.
۴. داریوش همدانی، حمیده و همکاران، مهارت‌های پایهٔ ریاضی، وزارت آموزش‌وپرورش ۱۳۸۱.
۵. رحمانی، مهدی، اهداف آموزش ریاضی چیست و چه نقشی در اعتلای ریاضیات دارد، رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۵۰، زمستان ۱۳۷۶.
۶. رستگار، آرش، ریاضیات ۱، کتاب پیشنهادی وزارت آموزش‌وپرورش، چاپ بهار ۱۳۸۱.
۷. صفائیان، افسر، مجموعه تمرین‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی، گامی به سوی دبیرستان، انتشارات مبتکران، ۱۳۸۰.
۸. فرزان، مسعود و همکاران، ریاضی سال سوم راهنمایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۸۱.
۹. فرزان، مسعود و همکاران، کتاب معلم(روش تدریس)ریاضی دورهٔ راهنمایی، وزارت آموزش‌وپرورش، ۱۳۷۲.
۱۰. وحیدی، محمدقاسم، گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی، تألیف جی. ال. برگرن، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۳.

مه از صفحه ۲ جلد

طع کند و DZ با ZG برابر باشد؛ و (۶) رسم خطی از نقطهٔ D واقع بر
ضلع GB از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، که زاویهٔ Bاش قائمه است، به طوری
ه وتر AG را در K و امتداد AB از طرف B را در T قطع کند و TK/KG
رابر با نسبت معلومی باشد.[۳]

روشن است که لم‌های (۱) و (۲) حالت‌های خاصی از یک
سأله‌اند و میان (۳) و (۶) نیز چنین رابطه‌ای وجود دارد. نظیف در
ان استدلال ابن‌هیثم هریک از این دو جفت را در قالب یک ترسیم
ندسی بیان کرده است. بد نیست که در اینجا ترسیم او برای (۱) و
۲) را نقل کنیم و در توضیح روش ابن‌هیثم بر راه او برویم و به ترسیم
ارجاع دهیم. اتفاقاً (۱) و (۲) برخی از ویژگی‌های مشخصهٔ راه‌حلی
ا که برای مسألهٔ هندسی مورد نظر پیشنهاد شده دربردارند. در شکل،
نقطهٔ نامعلومی بر محیط دایرهٔ کوچک به قطر BG است. می‌خواهیم
A خطی رسم کنیم که دایره را در D و قطر، یا امتداد آن، را در E قطع
ند و DE مساوی طول معلوم Z باشد.

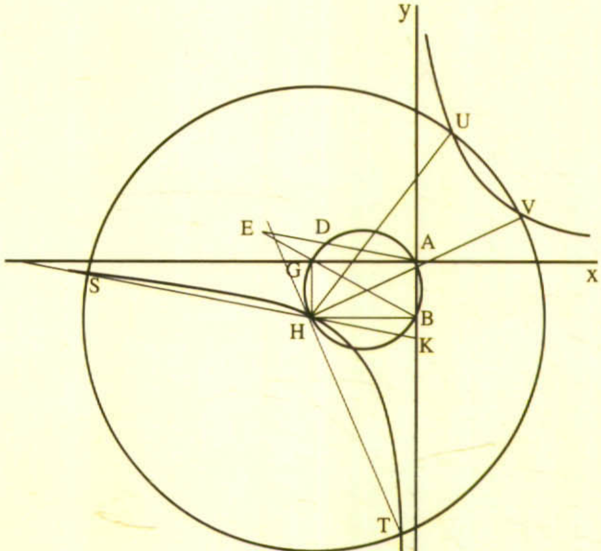
از G خط GH را موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در H قطع کند
BH را وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم که امتدادهای AG و AB،
ترتیب، نمایندهٔ محورهای x و y باشند؛ بدین نحو که مبدأ محورها
A منطبق است. هذلولیی را که از H می‌گذرد و x و y مجانبهای آن
ستند رسم می‌کنیم. آنگاه به مرکز H دایره‌ای به شعاع.

$$HS = \frac{BG^2}{z}$$

رسم می‌کنیم (HS ضلع مستطیلی که ضلع دیگرش z و مساحتش
BG است). این دایره، در حالت کلی، دو شاخهٔ هذلول را در چهار
طه مانند S و T و U و V قطع خواهد کرد. H را به هر چهار نقطه
صل، و از A خطهائی به موازات HS و HT و HU و HV رسم می‌کنیم.
ریک از این موازیها دایرهٔ محیطی مثلث ABG را در نقطه‌ای چون D و
طر، یا امتداد آن، را در نقطه‌ای چون E قطع خواهد کرد. ثابت شده
ست که هریک از این خطوط در شرط مورد نظر ما صدق می‌کند.

به خلاف اثبات بالا ابن‌هیثم سه حالت، یکی پس از دیگری، در
ظر گرفته است: (آ) خط مطلوب مماس بر دایره است، یعنی A بر D
نطبق است؛ (ب) D روی قوس AG است؛ و (ج) D روی قوس AB
ست. با وجود کلّیت لم (۱)، وی حالتی را که خط مطلوب امتداد BG
ا در طرف B قطع می‌کند، در نظر نمی‌گیرد.

همچنین وقتی که به لم (۲) می‌پردازد، برحسب رابطهٔ دایره با
شاخهٔ مقابل» هذلولی، سه حالت زیر را جداگانه بررسی می‌کند: (آ)
ایره این شاخه را در دو نقطه قطع می‌کند؛ (ب) دایره در یک نقطه بر
ین شاخه مماس می‌شود؛ و (ج) دایره این شاخه را قطع نمی‌کند. البته



ابن‌هیثم از دستگاه مختصات متعامدی که مبدأش نقطهٔ معلوم A باشد چیزی نگفته است، با این حال مربعی مشابه ABHG را در نظر گرفته ضلع‌های آن را که نظیر AB و AG اند به عنوان مجانب‌های هذلولیی وصف می‌کند که از نقطه‌ای نظیر نقطهٔ H در شکل رسم کرده است.

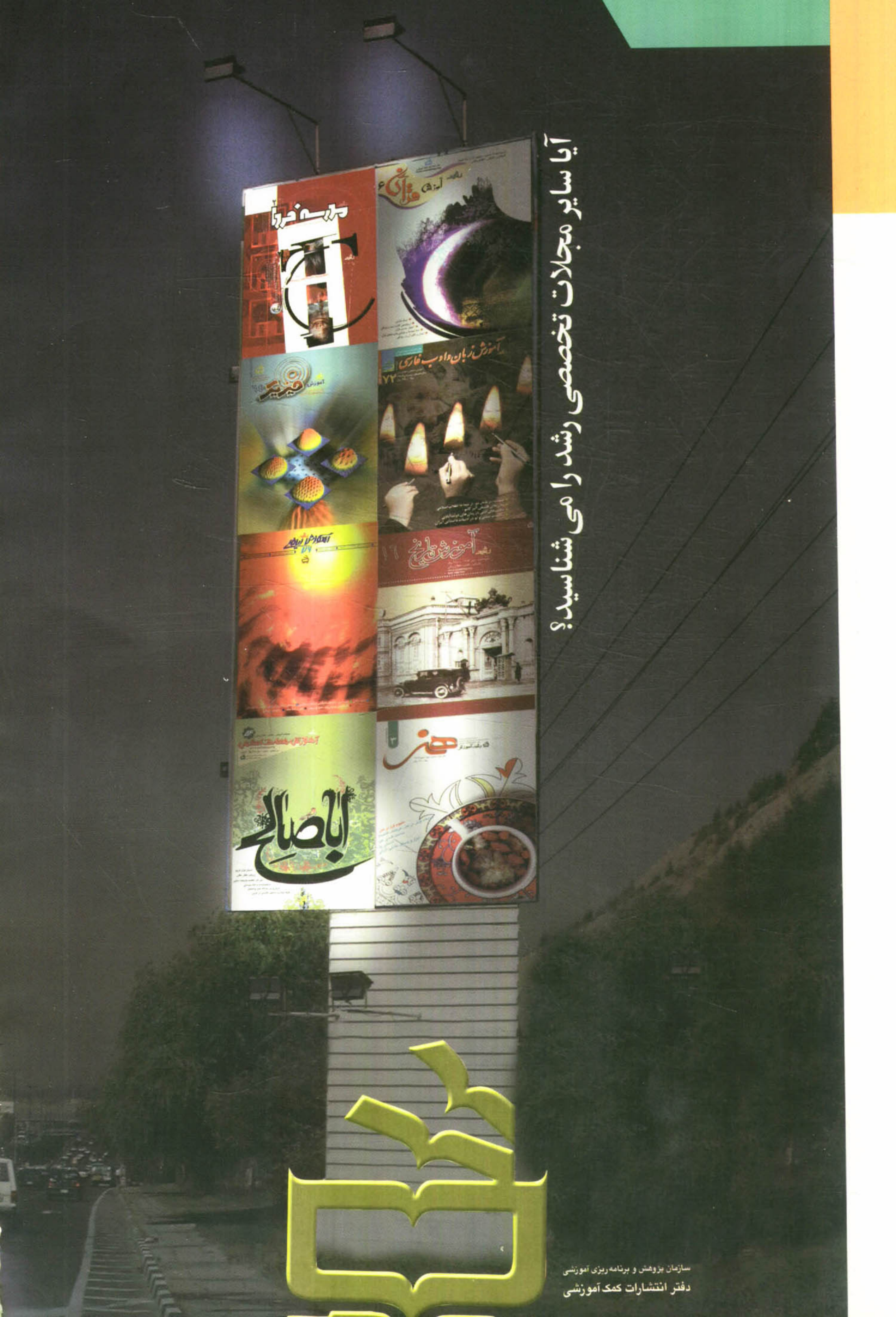
ابن‌هیثم، که این شش لم را برای یافتن نقطهٔ بازتاب در انواع مختلف سطوح به‌کار می‌برد، باز موارد خاص را به‌نوبت می‌آزماید. نظیف اثبات کرده است که حالتهای مختلف مشمول لم ۴، حل کلی مسأله را برای سطوح کروی، چه محدب و چه مقعر، تشکیل می‌دهند. در مورد آینه‌های استوانه‌ای ابن‌هیثم این حالات را در نظر می‌گیرد: (آ) دو نقطه در صفحه‌ای عمود بر محور استوانه واقع‌اند؛ [(ب) حالتی که دو نقطه روی صفحه‌ای قرار دارند که محور استوانه هم در آن واقع است]؛ و (ج) حالت کلی، که در آن مقطع صفحه‌ای که دو نقطه درآنند با استوانه نه خط مستقیم است و نه دایره بلکه بیضی است. برای آن‌که نشان دهد در سطوح محدب مخروطی بازتاب فقط از یک نقطه، که او تعیین کرده است، صورت می‌گیرد شش حالت مختلف را توصیف می‌کند. در مورد آینه‌های مقعر ثابت می‌کند که بازتاب ممکن است در یک تا چهار نقطه رخ دهد، اما عدهٔ این نقاط از چهار بیشتر نمی‌شود؛ و در مورد آینه‌های استوانه‌ای مقعر هم استدلال می‌کند که نقاط بازتاب به همین تعداد است.

زیرنویس ....

۱. Recherches sur la catoptrique grecque («پژوهش‌هایی دربارهٔ انعکاس نور در یونانی»)، از آ. لوژون (بروکسل، ۱۹۵۷)، ۷۱ـ۷۴.

۲. نمودارها در نسخهٔ کوپرولو ۹۵۲ موجود است (← کتابشناسی، «کارهای اصلی»، زیر شمارهٔ سوم ۳). تا آنجا که من می‌دانم، از این نسخهٔ خطی تاکنون در تحقیق دربارهٔ المناظر استفاده نشده است.

۳. Opticae thesaurus. Alhazeni libri VII، ۱۴۲ ـ ۱۵۰.


آیا سایر مجلات تخصصی رشد را می شناسید؟
آموزش زبان و ادب فارسی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی ۳
بهار ۱۳۸۴، بها: ۲۵۰۰ ریال

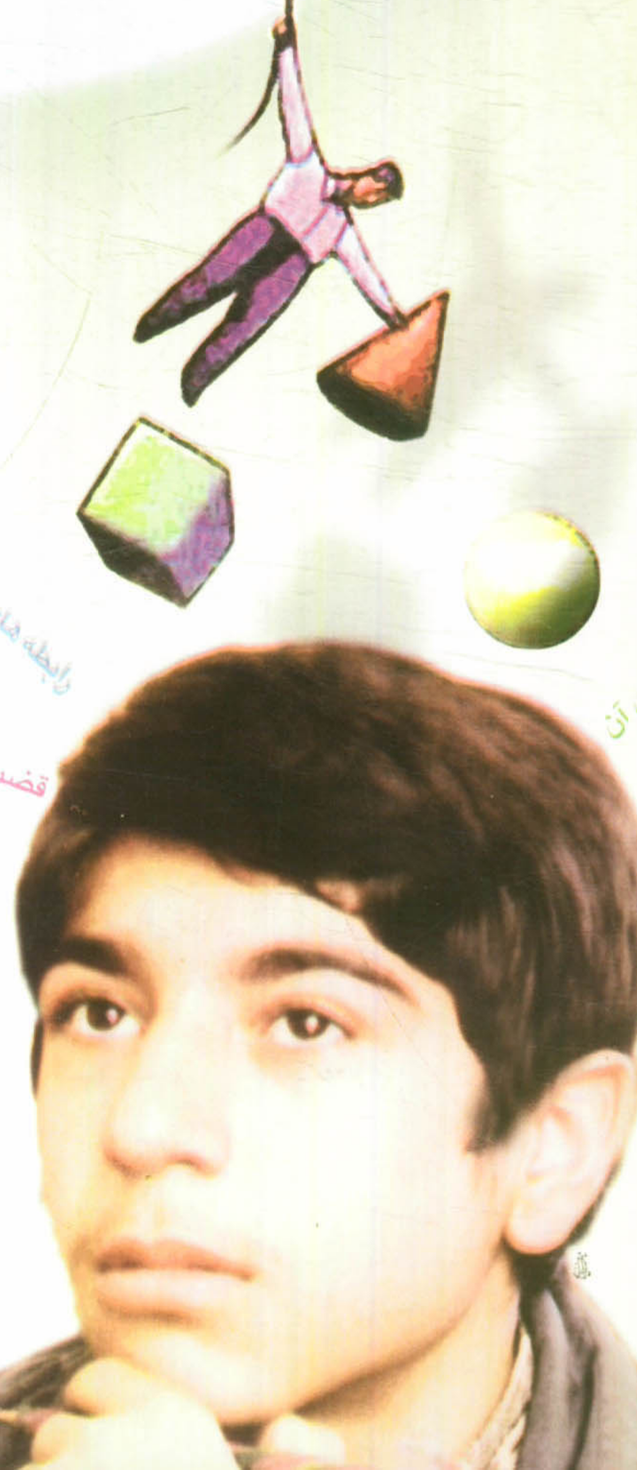
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۴۵

برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

www.roshdmag.org



رابطه های هم ارزی ـ کلاس های هم ارزی

قضیه ی رول و قضیه ی مقدار میانگین

تصاعد عددی

...رب خارجی و برخی ویژگی های آن

احتمال شرطی

... درباره‌ی اعداد گویا و گنگ



الغ بیگ

محمد تراغای معروف به الغ بیگ[1]
پادشاه، منجم و ریاضیدان (۷۹۶-۸۵۳)

الغ بیگ پسر شاهرخ تیموری بود که از ۸۰۷ تا ۸۵۰ هجری قمری سلطنت کرد. در ۷۹۶ در سلطانیه (نزدیک زنجان کنونی) تولد یافت و در ایام حیات جدّش امیر تیمور در لشکرکشی هند و کابل و بعضی لشکرکشی های دیگر همراه او بود. چون به یازده سالگی رسید امیر تیمور درگذشت و از آن پس او در سایه‌ی پدرش شاهرخ می‌زیست.

نوشته‌اند که الغ بیگ پادشاهی بود که به کثرت فضیلت و هنرپروری و به وفور عدالت و دادگستری از همه‌ی امثال خود برتر و گذشته از این مردی دانش‌پرور بود و دانشمندان زمان را گرامی می‌داشت. خود نیز به ریاضیات و نجوم دلبستگی فراوان و در آنها تبحّر کامل داشت.

در حدود سال ۸۲۴ رصدخانه‌ی سمرقند را که یکی از مهمترین رصدخانه‌های دوره‌ی اسلامی بود آغاز نهاد و زیج الغ بیگی را که آخرین اثر بزرگ منجمان دوره‌ی اسلامی است به کمک دانشمندان مشهوری چون غیاث‌الدین جمشید و معین‌الدین کاشانی و قاضی‌زاده‌ی رومی در سال ۸۱۴ به پایان رسانید.

با مرگ الغ بیگ رفته رفته رصدخانه‌ی سمرقند از کار افتاد و بنای آن‌رو به ویرانی نهاد تا آنجا که در حدود سده‌ی دهم دیگر حتی اثر و نشانه‌ای هم از بنای آن دیده نمی‌شد. تا این‌که در سال ۱۹۰۸ میلادی هیأتی روسی ویرانه‌های آن را کشف نمود و اطلاعاتی درباره‌ی بنای آن به دست آورد. بار دیگر هم سال ۱۹۴۱ میلادی هیأتی روسی به سمرقند رفت و مدفن الغ بیگ را در مقبره‌ی امیر تیمور کشف نمود. جسد وی را با لباسی که در هنگام به قتل رسیدن برتن داشته در تابوتی در قبرش یافتند. ظاهراً علّت این‌که او را با لباسش دفن کرده بوده‌اند این بود که او را شهید می‌دانستند و شهید را باید با لباسش دفن کرد. در جسد او جای سلاحی که او را از پای درآورده بود هویدا بوده است.

در نامه‌ای که غیاث‌الدین جمشید از سمرقند به پدرش که در کاشان بوده نوشته است اطلاعاتی درباره‌ی طرز رفتار الغ بیگ با او و دیگران و همچنین درباره‌ی رصدخانه‌ی سمرقند می‌توان یافت. قسمت‌هایی از این نامه در کتاب «قربانی: کاشانی نامه» صفحات ۳ تا ۶ نقل شده است.

زیج الغ بیگ[2]

زیجی الغ بیگ درست‌ترین و دقیق‌ترین زیج‌هایی است که در دوره‌ی اسلامی پدید آمده است. عده‌ای از ریاضی‌دانان و منجمان بزرگ مانند غیاث‌الدین جمشید کاشانی و قاضی‌زاده‌ی رومی در تهیه‌ی آن شرکت داشته‌اند. اگرچه مندرجات آن تا اندازه‌ای شبیه زیج‌های مهم دیگر است امّا به علّت جامع بودن و دقت فوق‌العاده‌اش بر همه‌ی زیج‌های دوره‌ی اسلامی برتری دارد. قسمتی از مقدمه‌ی این زیج در کتاب «مصاحب: جبرخیام» به چاپ رسیده است.

این زیج دارای چهار مقاله است: مقاله‌ی اول در تواریخ

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه

دورهٔ چهاردهم، شماره ۳
بهار ۱۳۸۴
بها: ۲۵۰۰ ریال
تیراژ: ۱۵۰۰۰ نسخه
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجلّه: ۹ـ ۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۱۱۱۰



یادداشت سردبیر

آیا تا به حال به مفهوم اصطلاح «تولید علم» فکر کرده اید؟ به واژه ی «مصرف علم» چه؟ به نظر شما «جامعه ی مصرفی» آیا فقط به جامعه ای گفته می شود که مصرف کننده ی کالای مادّی، اعم از کالای کشاورزی، صنعتی، نظامی و... باشد؟ مسلماً پاسخ شما منفی است، زیرا جامعه به کالاهای فرهنگی هم نیاز دارد. حال اگر کمی با تأمّل بیشتری به این موضوع فکر کنیم به این نتیجه می رسیم که در جهان امروز، اگر مصرف گرایی در یافته های علمی صرفاً تقلید از دیگران منحصر و محدود شود چه بسا مضرتر از مصرف گرایی در مقوله های مادی است.

اشاره های اخیر رهبر معظم و فرزانه ی انقلاب به مسئله ی تولید علم و تاکیدات مکرر ایشان در ارتباط با «جنبش نرم افزاری» مبنی بر لزوم نهادینه کردن این موضوع در جامعه، حاکی از اهمیت این مسئله است. اکنون وظیفه ی همه ما بخصوص دانش آموزان و دانش پژوهان جوان است که نسبت به مسئله ی تولید علم و جنبش نرم افزاری عمیقاً احساس مسئولیت کنیم تا بتوانیم نقش مؤثری در این انقلاب و جنبش نرم افزای داشته باشیم.

ما اگر در مراحلی مصرف کننده علم دیگران (اعم از خودی یا بیگانه) هستیم به این نیّت است که بتوانیم دانشی و نرم افزاری فراتر، جهان شمول تر و سالم‌تر و کاربردی تر تولید کنیم. به امید روزی که در همه ی زمینه های علمی از جمله بخصوص ریاضیات که ما در علوم است، تولیداتی قابل صدور به همه ی داشته باشیم، اِن شاءا...

از تاریخ بیاموزیم

بحران بلوغ ریاضیات نظری

۱۸

۱۷

○ پرویز شهریاری

اشاره

در هفدهمین بخش از سلسسه مطالب «از تاریخ بیاموزیم»، درباره‌ٔ ریاضیات نظری و چگونگی نحوهٔ شکل گرفتن سازوکار تکامل آن بحث شد، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

در نخستین مرحلهٔ وجود ریاضیات نظری، نقش عمده به عهدهٔ روابط منطقی است که به طور مؤثر در بنای اولیه به کار می‌رود. تکامل ریاضیات نظری از مرکز مفهومی واحد حرکت می‌کند و استدلال و اثبات این حق را پیدا می‌کنند که مراقب باشند تا بستگی‌های منطقی از روش‌های مشخصی جدا نشوند؛ علاوه بر این مفهوم‌های طبیعی و روشن، تنها به این مناسبت لازم‌اند که به استدلال‌ها پایهٔ منطقی بدهند.

مفهوم‌های تازه‌ای که به وجود می‌آیند، تأثیر خود را تا آن‌جا ادامه می‌دهند که زنجیرهٔ نتیجه‌گیری‌های متوالی، معنای خود را از دست ندهد و بین تکامل دانش ریاضی، از یک طرف، و تصورهایی که دربارهٔ امکان نتیجه‌گیری‌ها وجود دارد، از طرف دیگر، تعارضی به وجود نیاید، یعنی تا جایی که نتیجه‌های حاصل، به صورتی نامنتظر، دیدگاه‌های عادی و سنّتی را نقض نکنند.

وجود سلسله مراتب در دانش نظری ریاضی، بستگی‌های نظری را به وجود می‌آورد که در حالت بحران روابط منطقی قطع می‌شود. این بحران، با تغییر روابط منطقی به پایان می‌رسد و با آزادی از ساختمان نظری به طور مستقل پیش می‌رود و گاهی به عنوان پارادوکسی نسبت به عقل سلیم، تکامل می‌یابد.

نتیجه‌گیری‌های پارادوکسی در ریاضیات نظری، ارزش بی‌چون و چرایی از نظر آموزشی و روش‌شناسی دارند و اغلب با تجاوز به حریم بی‌نهایت ریاضی پدید می‌آیند که در آن عادت‌ها تغییر می‌کند. در این حالت‌ها، بیش از همه، آن‌جایی ظاهر می‌شود که ریاضیات، که علم دربارهٔ بی‌نهایت هاست (ویل) ممکن است تصورهای نامنتظری دربارهٔ بی‌نهایت بدهد. به همین ترتیب، برای بحران رابطه‌های منطقی هم، وقتی که منطق از بستگی‌های منطقی ساده‌لوحانه استفاده می‌کند (مثل وقتی که از صغرا و کبرا استفاده می‌کند)، به ویژه ضمن بررسی بی‌نهایت، رو در روی تصورها قرار می‌گیرد. در ریاضیات نظری کلاسیک، این رویارویی عبارت است از درک مسأله‌های مربوط به بی‌نهایت ضمن کشف معمایی، وقتی که ضربهٔ بحران بر ساختمان نظری گسترش یافته فرود آید. معلوم شد تکامل روش‌های اثبات، به ویژه اثبات با برهان خلف، منجر به برخورد با آموزش‌های فلسفی فیثاغورسی می‌شود که بنابر آن، هرچیزی را می‌تون با زبان عددهای طبیعی و نسبت‌های آن‌ها بیان کرد.

آ. سابو دربارهٔ اندازه‌پذیرها و کشف عددهای گنگ، نظر دیگری دارد. در کتاب «آغاز ریاضیات یونانی» که در زبان آلمانی در سال ۱۶۶۹ و به زبان انگلیسی در سال ۱۷۷۹ چاپ شد، دیدگاه او را در این‌باره شرح می‌دهد. سابو ضمن بررسی قضیه‌های اصلی نظریهٔ نسبت‌ها[1]،

نتیجه می‌گیرد که نظریهٔ نسبت‌های اودوکس، در نظریهٔ موسیقی به دست آمد، نه آن‌طور که گمان می‌رود در نتیجهٔ کشف عددهای گنگ، نظریهٔ نسبت‌ها از همان آغاز خصلت موسیقیایی داشت و وسیله‌هایی که به کمک آن‌ها بررسی انجام می‌گرفت، مونوکورد[۲] (سنج) و قانون بود. استفاده از صحت سنج و قانون، شرایطی را به‌وجود آورد که از تعریف پاره خط‌های راست، به تعریف عددها برسیم: سنج یک سیم داشت و در آن فاصلهٔ موسیقی با نسبت دو عدد بیان می‌شد؛ اما برای قانون، پیدا کردن نسبت چهار عدد لازم بود (حالت هندسی). یونانی‌ها، پیش از کشف اندازه‌ناپذیرها هم می‌توانستند از عددها به پاره‌خط‌ها بروند و در این‌جا، حلقهٔ اتصالی نظریهٔ موسیقیایی نسبت‌ها بود.

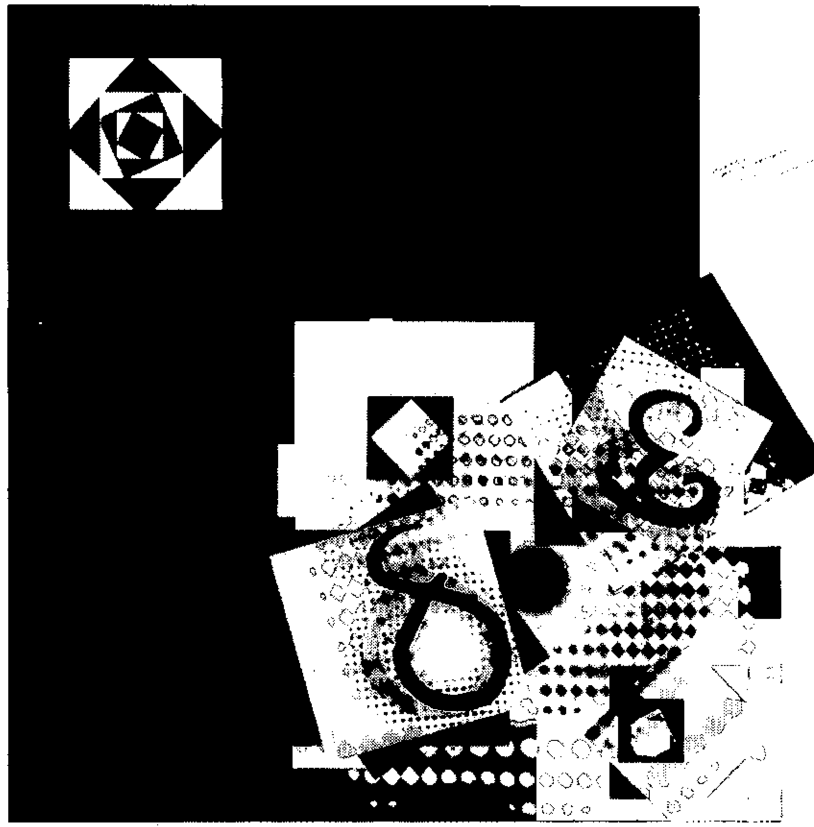
سپس در جریان حل مسأله‌های مربوط به نظریهٔ موسیقیایی نسبت‌ها بود که به کشف اندازه‌ناپذیرها رسیدند: مسأله‌های مربوط به تقسیم مهم‌ترین فاصله‌های موسیقی، به زیر فاصله‌ها، به نحوی که هماهنگی صدا حفظ شود. «این مسأله که ابتدا در نظریهٔ نسبت‌های موسیقی مورد توجه قرار گرفت، موجب شد تا پیدا کردن واسطهٔ هندسی بین طول سیم‌ها (که به صورت عددهای مناسب بیان می‌شد)، آسان‌تر شود، تا بتوانند فاصله‌های مجهول را تولید کنند. در نتیجهٔ این بررسی‌ها، یونانی‌ها متوجه شدند که همیشه برای دو عدد گویا، واسطهٔ هندسی وجود ندارد». کاربرد این درک تازه از نظریهٔ نسبت‌های موسیقی در حساب هندسی، موجب بررسی و مطالعه در دو حوزه شد. از طرفی شرط لازم و کافی برای دو عددی که واسطهٔ هندسی دارند، به کمک عددها مورد بررسی قرار گرفت و از طرف دیگر، مفهوم تشابه هندسی (برای شکل‌های با زاویهٔ قائمه)، مفهوم دقیق برای نسبت‌های هندسی را تعریف کرد.

با وجود این، چنین بررسی‌هایی می‌توانست مدت‌ها، بدون وجود مبنای نظری وجود نسبت‌ها، ادامه یابد. «... تجزیهٔ متوالی و کسرهای برگشتی [کسرهایی از نوع $f_{n+1} = \frac{1}{1+f_n}$، که با آغاز $f_1 = 1$، تقریب $\sqrt{2}$ را می‌دهد]، چیزی جز تفسیر عملی پیدا کردن اندازه‌ناپذیر نیست، اندازه ناپذیر یک درک نظری است، نه ویژگی تجربی نسبت‌های هندسی».

در ریاضیات نظری پایان سدهٔ هجدهم، مرکز بحران به مرکز آنالیز ریاضی منتقل شد. نظریهٔ ریاضی که بر اساس مفهوم‌های تابع و رابطهٔ تابعی بنیان گذاشته شده بود تا حدّ زیادی نمایان‌گر رابطه‌های منطقی پویا (دینامیک) بود. استفاده از بستگی‌های نظری، بدون این‌که مرز و شرطی را برای آن‌ها قائل باشند، گاهی منجر به نتیجه‌ای نادرست و بی‌معنی می‌شد. استفاده از مفهوم‌های مبهم رابطه‌های منطقی، نتیجه‌گیری‌ها را کم‌ارزش کرد و دربارهٔ آن‌ها تردیدهایی به‌وجود آورد. در بین ریاضیدانان حرفه‌ای، جدال دربارهٔ بستگی‌های منطقی دینامیک درگرفت. جدال از مرزهای درونی ریاضیات تجاوز کرد و همان‌طور که اغلب چنین است، دامن غیر حرفه‌ای‌ها را هم گرفت. بکلی در رساله «مقدمات دانش انسانی» (۱۷۱۰) و به ویژه در کتاب «آنالیست» خود (۱۷۳۴)، نا استواری و غیرقابل اطمینان بودن ساختمان‌های نظری ریاضیات را خاطرنشان می‌کند. ف. که جوری (Cajori) می‌نویسد: «استدلال‌های او همچون بمبی بر دژ ریاضیات فرود آمد.» عکس‌العمل آموزشی در برابر تکامل دانش ریاضی، نه تنها از مرزهای ریاضیات که از مرزهای آموزشی و روش‌های ریاضی به طور کلی گذشت و از هدف برطرف کردن دشواری‌ها دورتر رفت. ولی فرض برکلی، برگشت به عقب و به خاک سپردن تمامی دنیای ساختمان‌های ریاضی و صرف‌نظر کردن از نتیجه‌های ثمربخش بررسی‌های ریاضی بود. راه خروجی برای فرار از موقعیت‌های پیچیده، ناهماهنگی ساختمان‌های ریاضی و بستگی‌های منطقی، جست‌وجو می‌شد. مثل یونان باستان، خروج از بحران به کمک دقیق‌تر کردن نتیجه‌های اثبات کردنی، بستگی‌های نظری و سازکار کردن آن‌ها با چهرهٔ ساختمان‌های نظری تحقق می‌یافت؛ حتی اگر این دقیق کردن، برخی از بستگی‌های نظری و رابطه‌های منطقی اولیه را تهدید به کنار گذاشتن می‌کرد و این کار، با عمیق‌تر شدن درانتزاع‌ها و سرایت دادن آن با عمل انجام می‌گرفت.

ریاضیات نظری عصر جدید، به صورت روشنی، تمایل به شکفتن تصورهای اولیه مربوط به دانش نظری و دربارهٔ بازبینی دقیق رابطه‌های منطقی دینامیک، در کنگرهٔ ریاضی فرهنگستان علوم برلن (۱۷۸۴-۱۷۸۶) زیر عنوان «دربارهٔ نظریهٔ ریاضی بی‌نهایت» ظاهر شد. روحیهٔ آن زمان را می‌توان به خوبی از مسابقه‌ای که فرهنگستان علوم برلن پیشنهاد داده بود، دریافت:

«می‌دانیم که هندسهٔ عالی [که در آن



زمان، آنالیز ریاضی هم جزو آن بود] به طور پیوسته از بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک استفاده می‌کند. ولی در یونان باستان، با وسواس و دقت از هرچیزی که نزدیک به بی‌نهایت بود، پرهیز می‌کردند و آنالیست‌های مشهور امروزی معتقدند که بیان «کمیّت بی‌نهایت» در درون خود تضاد دارد. فرهنگستان می‌خواهد روشن کند، چرا از یک متناقض، نتیجه‌های درستی به دست می‌آید [تمایل اولیه به حفظ دستاوردها] و چگونه می‌توان «بی‌نهایت» را با واژه‌ای درست و روشن عوض کرد که از نظام ریاضی پیروی کند و بررسی‌هایی که به کمک آن انجام می‌گیرد، نه چندان دشوار باشد و نه چندان طولانی شود.»

حفظ دستاوردهایی که پژوهشگران با روش‌های تردیدآمیز پیدا کرده بودند، بیشتر از حفظ رابطه‌های منطقی به صورت نخستین خود، ارزش داشت. با اندک تغییری در سخن هیلبرت می‌توان گفت: هیچ کس نمی‌توانست ریاضیدانان را از بهشتی که به وسیلهٔ کارهای دکارت و فرما، نیوتن و لایب‌نیتس، اویلر، خانوادهٔ برنولی، مونژ و دیگران ساخته شده بود، بیرون کند. دوباره دانش ریاضیات نظری تجدید ساختمان کرد، استقلال خود را با صدای بلند اعلام داشت و آغاز به پاک کردن خود از مسیرهای شهودی و رابطه‌های منطقی ناشی از آن کرد.

بستگی‌های تکوینی رابطه‌های منطقی و الگوریتم‌هایی که از آن‌ها پیدا شده بود، با وارد شدن خواست تازه برای دقت و استدلال و تعریف مفهوم‌ها، فرو ریخت. سطح دقت درکار بالا رفت و تصورهای شهودی جای خود را به استدلال و اثبات داد. برای ریاضیات نظری یونان باستان، دربارهٔ این روند، تنها به طور غیرمستقیم می‌توانیم داوری کنیم؛ با مقایسهٔ آنچه که قبل و بعد از کشف اندازه ناپذیرها وجود داشت. برای ریاضیات نظری عصر جدید، بالا رفتن تقاضای دقت در اثبات‌ها، در رابطه با «تعریف به یاری ε و δ) به جای درک پیوستگی‌ها و امکان تجزیهٔ تابع به رشته‌های توانی (تصور تحلیلی) عملی شد. تلاش ریاضیدانان در جهت سازگار کردن بستگی‌های منطقی دینامیک با انبوه دستاوردهای ریاضی و زدودن ابهام از ساختار رشد یافتهٔ ریاضیات نظری، در کارها و موفقیت‌های ب. بولتر انو (۱۸۱۷)، اُ. کوشی (۱۸۲۳)، ن. ای. لباچوسکی (۱۸۳۴)، پ. لوژن دیریکله (۱۸۳۷) دیده می‌شود که مفهوم‌های گذر به حد، تابع، دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری را بر اساس خواست‌های ریاضیات نظری تدوین شده، دقیق‌تر کردند. مانع‌هایی که سد راه پیشرفت آیندهٔ ریاضیات بود، برداشته شد و تکامل دانش واحد ریاضی، در رابطه با مفهوم‌های بستگی‌های نظری آغاز گردید. ریاضیات نظری با پشت سرگذاشتن بحران مربوط به بستگی‌های منطقی، موجودیت خود را باز یافت و به زندگی خود ادامه داد.

به این ترتیب، چه برای ریاضیات سنّتی و چه برای ریاضیات نظری عصر جدید، وارد شدن مفهوم‌های ریاضیات نظری اولیه (که هنوز به اندازهٔ کافی آماده دقیق شدن نبودند)، منجر به بحرانی شد که در برخورد با بی‌نهایت به وجود آمده و پرده‌های عادت‌ها و رسم‌ها را دریده بود.

زیرنویس

۱. διαδτημα، فاصلهٔ موسیقی در معنای نخستین واژه؛ λογos به معنای نسبت دو عدد در نظریهٔ فیثاغورس موسیقی.

۲. Monocord، آلت موسیقی با یک سیم که برای پیدا کردن نسبت میان صداهای موسیقی به کار می‌رود.

ضرب خارجی

و برخی ویژگی های آن

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی، رشته ریاضی

✪ **محمد هاشم رستمی**

بنا به تعریف، ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ که به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{a}\wedge\vec{b}$ نمایش داده می‌شود، برداری مانند $\vec{c}$ است؛ به قسمی که:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\,a_3b_1-a_1b_3,\,a_1b_2-a_2b_1)$$

این بردار را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

به عنوان مثال، اگر $\vec{a}=(2,-5,3)$ و $\vec{b}=(-1,2,-4)$ باشد، $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}(20-6)+\vec{j}(-3+8)+\vec{k}(4-5)$$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=14\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$$

ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

تعریف: حاصل ضرب خارجی دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برداری است مانند $\vec{c}$؛ به قسمی که:

الف. بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است؛

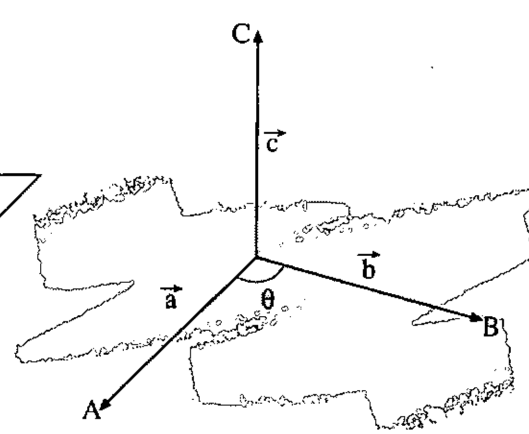
ب. کنج $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ مستقیم است؛

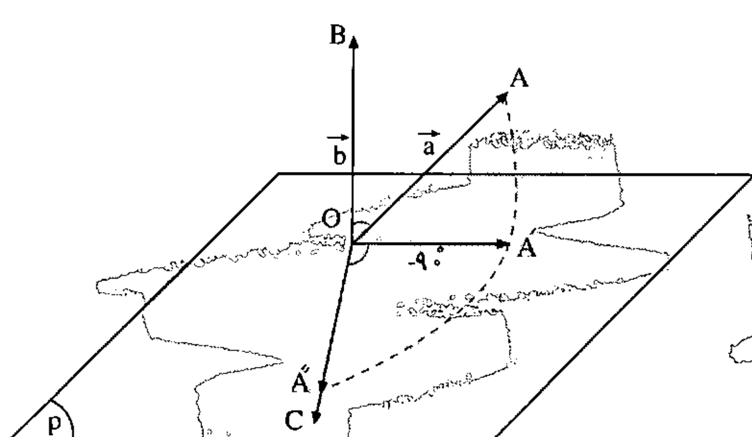
پ. طول آن برابر است با $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$.

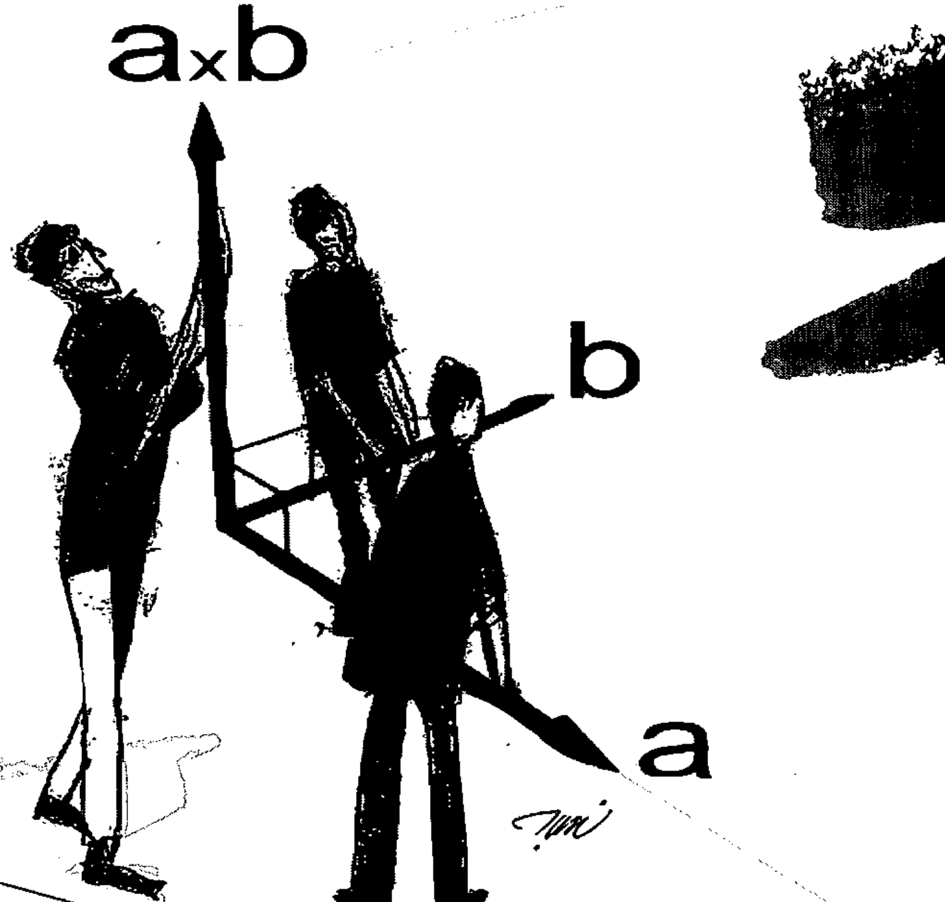
اگر حداقل یکی از دو بردار $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ برابر صفر باشد حاصل ضرب خارجی دو بردار را صفر تعریف می‌کنیم.

این تعریف، با تعریف حاصل ضرب خارجی دو بردار برحسب تصویرهای آن دو بردار هم ارز است.

ساخت هندسی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$. بردار $\vec{OA}=\vec{a}$ را بر صفحهٔ P که عمود بر $\vec{OB}=\vec{b}$ است، تصویر می‌کنیم و تصویر را $\vec{OA'}$ می‌نامیم. $\vec{OA'}$ را حول نقطهٔ O در صفحهٔ مزبور به







اندازهٔ (-90°) دوران می‌دهیم تا به وضع $\vec{OA_1'}$ درآید. این بردار را در عدد $|\vec{b}|$ ضرب می‌کنیم تا بردار $\vec{OC}$ به دست آید. این بردار همان بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ است؛ زیرا:

الف. $\vec{OC}$ بر بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ یعنی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است؛

ب. کنج (OC و OB و OA) مستقیم است؛

پ.

$$\left|\vec{OC}\right| = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{OA_1'}\right|$$

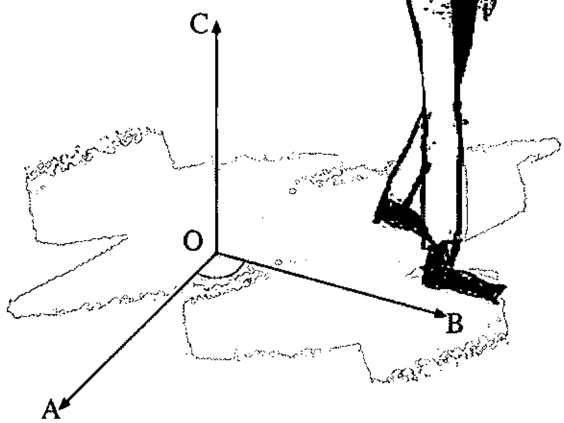
$$= \left|\vec{b}\right|\left|\vec{OA'}\right| = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{OA}\right|\cos(\vec{OA'},\vec{OA})$$

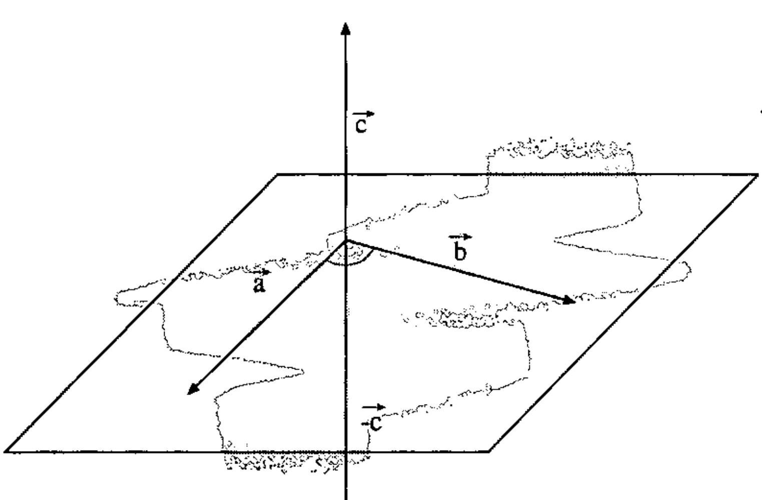
$$= \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$$

تعریف. کنج جهت‌دار، کنجی است که برای یال‌های آن ترتیب قائل شده باشند. کنج جهت‌دار (OC و OB و OA) را مستقیم یا راستگرد می‌نامند؛

هرگاه برای ناظری که روی OC ایستاده و OB را نگاه می‌کند، OC در طرف چپش واقع شود؛ اگر OC در طرف راست ناظر قرار گیرد، کنج معکوس یا چپگرد نامیده می‌شود.

در شکل (O-ABC) کنج مستقیم یا راستگرد است.

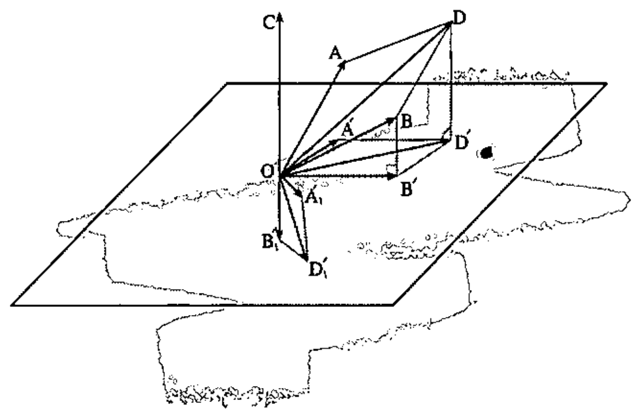




نکته. اثبات برخی ویژگی‌های ضرب خارجی بردارها، به کمک تعریف بالا ساده‌تر است؛ به عنوان مثال، رابطهٔ $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ به سادگی با توجه به شکل ثابت می‌شود.

اثبات هندسی ویژگی توزیع‌پذیری ضرب خارجی. سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

فرض می‌کنیم $\vec{OA}=\vec{a}$ و $\vec{OB}=\vec{b}$ و $\vec{OC}=\vec{c}$ و $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ باشد.



صفحهٔ P را در نقطهٔ O عمود بر $\vec{OC}$ رسم می‌کنیم و تصویرهای بردارهای $\vec{OA}$ ، $\vec{OB}$ و $\vec{OD}$ روی این صفحه را $\vec{OA'}$ ، $\vec{OB'}$ و $\vec{OD'}$ می‌نامیم. چهارضلعی $OA'D'B'$ نیز متوازی‌الاضلاع است و داریم $\vec{OD'}=\vec{OA'}+\vec{OB'}$. بنابراین اگر این متوازی‌الاضلاع را به اندازهٔ °۹۰- حول نقطهٔ O دوران دهیم، متوازی‌الاضلاع $OA'_1D'_1B'_1$ به دست خواهد آمد، که در آن رابطهٔ $\vec{OD'_1}=\vec{OA'_1}+\vec{OB'_1}$ برقرار است. دو طرف این رابطهٔ برداری را در عدد $|\vec{OC}|=|\vec{c}|$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$|\vec{OC}|\vec{OD}''=|\vec{OC}|\vec{OA}''+|\vec{OC}|\vec{OB}''$$

از آن‌جا بنا به روش ساختن بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ نتیجه می‌شود:

$$\vec{OD}\times\vec{OC}=\vec{OA}\times\vec{OC}+\vec{OB}\times\vec{OC}$$
$$\Rightarrow(\vec{OA}+\vec{OB})\times\vec{OC}=\vec{OA}\times\vec{OC}+\vec{OB}\times\vec{OC}$$
$$\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

بنابراین ضرب خارجی بردارها نسبت به عمل جمع، از راست توزیع‌پذیر است.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که این توزیع‌پذیری از چپ نیز وجود دارد؛ زیرا داریم:

$$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=-[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}]=-[\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}]$$
$$=-(\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$$

مثال۱. بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۳)$ ، $\vec{b}=(۱,-۱,۲)$ و $\vec{c}=(۵,۳,-۴)$ داده شده‌اند. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ را به دست آورید.

راه حل اول. بردار $\vec{b}+\vec{c}$ را مشخص می‌کنیم و سپس $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{b}+\vec{c}=(۱,-۱,۲)+(۵,۳,-۴)=(۶,۲,-۲)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۰&۳\\۶&۲&-۲\end{vmatrix}=-۶\vec{i}+۱۴\vec{j}-۴\vec{k}$$

راه‌حل دوم. از توزیع‌پذیری ضرب خارجی نسبت به جمع بردارها استفاده می‌کنیم.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۰&۳\\۱&-۱&۲\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۰&۳\\۵&۳&-۴\end{vmatrix}$$

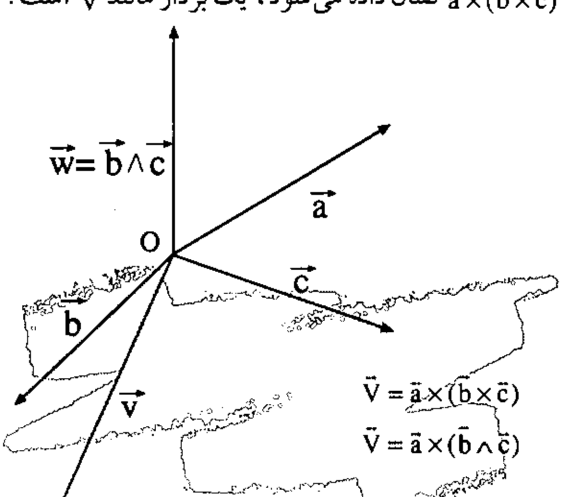
$$=(۳\vec{i}+۷\vec{j}+۲\vec{k})+(-۹\vec{i}+۷\vec{j}-۶\vec{k})=-۶\vec{i}+۱۴\vec{j}-۴\vec{k}$$

مثال۲. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند و $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۴$ است. اندازهٔ $|(۳\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-۲\vec{b})|$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از توزیع‌پذیری ضرب خارجی بردارها نسبت به عمل جمع داریم:

$$|(۳\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-۲\vec{b})|$$
$$=|(۳\vec{a})\times\vec{a}-(۳\vec{a})\times(۲\vec{b})-(\vec{b})\times(\vec{a})+(\vec{b})\times(۲\vec{b})|$$
$$=|\vec{۰}-۶(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})+۰|=|-۵(\vec{a}\times\vec{b})|=۵|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$$
$$=۵\times۳\times۴\times\sin۹۰=۶۰$$

ضرب دوگانهٔ خارجی سه بردار. حاصل ضرب دوگانهٔ (مضاعف) خارجی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ که به صورت $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ نشان داده می‌شود، یک بردار مانند $\vec{V}$ است:



با توجه به این که بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ همگی بر بردار $(\vec{b}\times\vec{c})$ عمودند، پس این سه بردار هم‌صفحه یا موازی یک صفحه‌اند و می‌توان نوشت:

$$\vec{V}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c} \qquad (1)$$

اگر $\vec{i}$ بردار یکّه در راستای $\vec{b}$ ، $\vec{k}$ بردار یکّه در راستای $\vec{b}=b\vec{i}$ ، $(\vec{b},\vec{c})=\theta$ و $\vec{J}=\vec{k}\times\vec{i}$ و $\vec{W}=\vec{b}\times\vec{c}$ فرض شود، و $\vec{W}=bc\sin\theta\vec{k}$ می‌شود.

حال دو طرف رابطهٔ (۱) را در $\vec{j}$ ضرب عددی می‌کنیم:

$$\vec{V}.\vec{j}=\alpha\vec{b}.\vec{j}+\beta\vec{c}.\vec{j}$$

چون $\vec{b}.\vec{j}=0$ است، پس:

$$\vec{V}.\vec{j}=p(\vec{c}.\vec{j}) \qquad (2)$$

از طرفی داریم:

$$\vec{c}.\vec{j}=c\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=c\sin\theta$$

$$\vec{V}.\vec{j}=\vec{j}(\vec{a}\times\vec{w})=\vec{j}\vec{a}\vec{w}=\vec{a}\vec{w}\vec{j}$$

$$=\vec{a}.(\vec{w}\times\vec{j})=bc\sin\theta\vec{a}.(\vec{k}\times\vec{j})$$

$$=-b\sin\theta\ \ \vec{a}.\vec{i}=-c\sin\theta(\vec{a}.\vec{b})$$

پس رابطهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود:

$$-c\sin\theta(\vec{a}.\vec{b})=\beta c\sin\theta\Rightarrow\beta=-(\vec{a}.\vec{b})$$

حا اگر در طرف اوّل رابطهٔ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\alpha\vec{b}+J\vec{c}$ جای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را عوض کنیم، داریم:

$$\vec{a}\times(\vec{c}\times\vec{b})=(-\beta)\vec{c}+(-\alpha)\vec{b}\Rightarrow\alpha=(\vec{a}.\vec{c})$$

بنابراین داریم:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

نتیجه: داریم:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-[\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})]=(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\,\vec{a})\vec{b}$$

پس:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}$$

نکته. حاصل‌ضرب مضاعف خارجی سه بردار را برحسب تصویرهای آن سه بردار می‌توان به‌دست آورد.

مثال۱. اگر $\vec{a}=(2,1,-1)$ ، $\vec{b}=(3,0,-2)$ و $\vec{c}=(-1,2,0)$ باشد، تصویرهای بردار $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ و اندازهٔ این بردار را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&0&-2\\-1&2&0\end{vmatrix}=4\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\Rightarrow\vec{b}\times\vec{c}=(4,2,6)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\4&2&6\end{vmatrix}=8\vec{i}-16\vec{j}=\vec{V}$$

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{64+256}=\sqrt{320}=8\sqrt{5}$$

مثال۲. اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند، ثابت کنید.

$$\vec{a}\times\left\{\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\right\}=\left|\vec{a}\right|^4\vec{b}$$

حل: با توجه به این که $(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$ است، بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ کنج سه قائمه می‌سازند.

بنا به تعریف ضرب خارجی دو بردار داریم:

$$\left|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right|=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|\sin90^\circ=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|\Rightarrow$$

$$\left|\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\right|$$

$$=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|\times\sin90^\circ=\left|\vec{a}\right|^3\left|\vec{b}\right|\Rightarrow$$

$$\left|\vec{a}\times\left\{\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\right\}\right|$$

$$=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{a}\right|^3\left|\vec{b}\right|\times\sin90^\circ=\left|\vec{a}\right|^4\left|\vec{b}\right|$$

حاصل‌ضرب طرف اوّل، برداری است در راستای بردار $\vec{b}$ ، که قدرمطلق آن مساوی $\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|^4$ است. بنابراین این بردار $\left|\vec{a}\right|^4\vec{b}$ می‌باشد؛ پس اتحاد داده شده برقرار است.

نکته۱. با استفاده از اتحاد $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ نیز درستی اتحاد بالا را می‌توان ثابت کرد.

نکته۲. با استفاده از تصویر بردارها، اتحاد بالا را می‌توان ثابت کرد.

تست. اگر $\vec{a}=(1,0,0)$ ، $\vec{b}=(0,1,0)$ و $\vec{c}=(0,0,1)$ باشد، $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر کدام است؟

۱) $\vec{a}$ ۲) $\vec{b}$

۳) $\vec{c}$ ۴) $\vec{0}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا بردارهای داده شده $\vec{a}=\vec{i}$ ، $\vec{b}=\vec{j}$ و $\vec{c}=\vec{k}$ بردارهای یکّه دستگاه مختصات xoy هستند؛ یعنی داریم:

$$\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$$

● احمد قندهاری



دنباله

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی، رشته ریاضی ◆

دنباله، تابعی است که دامنهٔ آن، مجموعهٔ اعداد طبیعی و برد آن، زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. به هریک از این مقادیر برد آن، یک جملهٔ دنباله گویند.

مثال. تابع $a:N \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $a(n)=\frac{n}{n+1}$ یک دنباله است. جملهٔ اوّل دنباله را با a_1، جملهٔ دوم دنباله را با a_2، جملهٔ سوم دنباله را با a_3 و... و جملهٔ nام دنباله را با a_n نشان می‌دهند. خود دنباله را با $\{a_n\}$ نشان می‌دهند.

در این دنباله داریم: $a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{2}{3}\ ,\ a_3=\frac{3}{4}\ ,\ \ldots$

و در دنبالهٔ $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ داریم:

$$a_1=\cos\frac{\pi}{2}=0\ ,\ a_2=\cos\pi=-1\ ,\ a_3=\cos\frac{3\pi}{2}=0$$

دنبالهٔ همگرا- اگر $\{a_n\}$ یک دنباله باشد، چنانچه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\ ,\ L\in\mathbb{R}$، در این صورت دنباله را همگرا یا همگرا به L گویند.

تعریف حدّ دنباله- می‌گوییم حدّ دنباله $\{a_n\}$ وقتی $n\to\infty$، عدد حقیقی L است هرگاه؛

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists M\in N \quad \ni n\geq M \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله به عدد حقیقی L همگرا است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. برای پیدا کردن عدد طبیعی M، باید نامساوی $|a_n-L|<\varepsilon$ را حل کرد یا به نامساوی $n\geq M$ رسید. پس از یافتن M، باید بتوانیم از $n\geq M$ نتیجه بگیریم $|a_n-L|<\varepsilon$.

مسألهٔ ۱. با استفاده از تعریف، ثابت کنید حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{2n-4}{n+10}\right\}$، عدد (۲) است.

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists M\in N \quad \ni n\geq M \Rightarrow \left|\frac{2n-4}{n+10}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2n-4}{n+10}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n-4-2n-20}{n+10}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-24}{n+10}\right|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\frac{۲۴}{n+۱۰} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱۰}{۲۴} > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow n+۱۰ > \frac{۲۴}{\varepsilon}$$

رابطهٔ برگشت‌پذیری $\quad n > \frac{۲۴}{\varepsilon} \Rightarrow n+۱۰ > \frac{۲۴}{\varepsilon}$

پس: $M = \left[\frac{۲۴}{\varepsilon}\right] + ۱$

اگر $M = \left[\frac{۲۴}{\varepsilon}\right] + ۱$ ، آن‌گاه از $n \geq M$ با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری، به نامساوی $\left|\frac{۲n-۴}{n+۱۰} - ۲\right| < \varepsilon$ خواهیم رسید.

مسألهٔ ۲ . ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}\right\}$ به صفر همگراست.

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists M \in N \quad \ni n \geq M \Rightarrow \left|\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳} - ۰\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|(\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}) \times \frac{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{n+۹-n-۳}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{۶}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}} < \varepsilon$$

داریم: $\quad \frac{۶}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} > \frac{۶}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}}$

رابطهٔ برگشت‌پذیری

$$\frac{۶}{۲\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{۶}{\sqrt{n+۹} + \sqrt{n+۳}} < \varepsilon$$

$$\frac{۶}{۲\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{۳}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{۳} > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{۳}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{۹}{\varepsilon^۲} \qquad M = \left[\frac{۹}{\varepsilon^۲}\right] + ۱$$

اگر $n \geq M$ ، با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری، به نامساوی $\left|\sqrt{n+۹} - \sqrt{n+۳}\right| < \varepsilon$ خواهیم رسید.

دنبالهٔ واگرا ـ اگر $\{b_n\}$ یک دنباله باشد، چنانچه $\lim_{n\to\infty} b_n$ مساوی چند عدد یا مقدار نامعلوم و یا ∞ شود. در این صورت می‌گوییم دنبالهٔ $\{b_n\}$ واگراست.

برای مثال، دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ واگراست؛ زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} (-۱)^n = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -۱ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

پس دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ واگراست و دنباله $\{\sin n\}$ نیز واگراست؛ زیرا:

عددی نامعلوم در بازهٔ $\quad \lim_{n\to\infty} \sin n = [-۱,۱]$

اثبات واگرایی دنباله

اگر دنباله‌ای واگرا باشد و بخواهیم ثابت کنیم دنباله واگراست، چنین عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد؛ پس از مختصری حل به تناقض می‌رسیم.

مسأله ۳ . ثابت کنید دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد؛ پس می‌توان نوشت:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists M \in N \quad \ni n \geq M \Rightarrow \left|(-۱)^n - L\right| < \varepsilon$$

برای درک بهتر، فرض می‌کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$

الف. اگر n زوج باشد، پس:

$$\left|(-۱)^n - L\right| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow |۱-L| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow |L-۱| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

رابطه (۱) $\quad -\frac{۱}{۲} < L-۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < L < \frac{۳}{۲}$

ب. اگر n فرد باشد، پس:

$$\left|(-۱)^n - L\right| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow |-۱-L| < \varepsilon \Rightarrow |L+۱| < \varepsilon \Rightarrow$$

رابطه (۲) $\quad -\frac{۱}{۲} < L+۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} < L < -\frac{۱}{۲}$

چون L یک عدد حقیقی است، نمی‌تواند همزمان در دو رابطهٔ (۱) و (۲) صدق کند. بنابراین دنباله نمی‌تواند همگرا باشد؛ پس واگراست.

مثال ۴ . ثابت کنید دنبالهٔ $\{n^۲ - ۲\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم این دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in N \quad \ni n \ge M \Rightarrow \left|n^3 - 2 - L\right| < \varepsilon$$

برای درک بهتر، فرض می‌کنیم $\varepsilon = 1$

$$\left|n^3 - 2 - L\right| < \varepsilon$$

$$\left|n^3 - 2 - L\right| < 1 \Rightarrow -1 < n^3 - 2 - L < 1 \Rightarrow 1 + L < n^3 < L + 3$$

$n^3 > 1 + L$ اشکالی ندارد، ولی $n^3 < L + 3$ اشکال دارد؛ زیرا:

$$n^3 < L + 3 \Rightarrow n < \sqrt[3]{L+3}$$

چون در محاسبهٔ حدّ دنباله $n \to \infty$، نامساوی $n < \sqrt[3]{L+\varepsilon}$ بیان می‌کند که مجموعهٔ اعداد طبیعی از بالا کراندار است و این غیرممکن است، بنابراین فرض این که این دنباله به عدد حقیقی L همگرا است، غیرممکن است؛ پس این دنباله واگرا است.

دنبالهٔ کراندار

دنبالهٔ $\{a_n\}$ را از بالا کراندار گوییم، هرگاه عدد حقیقی M_1 وجود داشته باشد؛ به‌طوری که برای هر $n \in N$، داشته باشیم $a_n \le M_1$.

و دنبالهٔ $\{a_n\}$ را از پائین کراندار گوییم، هرگاه عدد حقیقی M_2 وجود داشته باشد؛ به‌طوری که برای هر $n \in N$، داشته باشیم $a_n \ge M_2$.

یک دنباله را وقتی کراندار گوییم که هم کران بالا داشته باشد و هم کران پایین. به طور کلّی دنبالهٔ $\{a_n\}$ را وقتی کراندار گوییم، هرگاه عدد حقیقی مثبت K وجود داشته باشد؛ به طوری که برای هر $n \in N$ داشته باشیم $|a_n| \le k$.

برای مثال، دنبالهٔ $\{\sin n\}$ کراندار است؛ زیرا:

$$\forall n \in N \quad |\sin n| \le 1$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^3$ کراندار است.

حل:

$$0 < \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{-1}{2^n} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2^n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} \le \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^3 < 1$$

عدد (۱) کران بالای دنباله است و عدد $\frac{1}{8}$ کران پایین دنباله است و می‌توان نوشت:

$$1 = Max\left\{\left|\frac{1}{8}\right|, |1|\right\} \;;\; \forall n \in N \quad |a_n| \le 1$$

دنباله یکنوا

اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$ داشته باشیم:

$$\forall n \in N \quad a_{n+1} \ge a_n \text{ یا } \frac{a_n+1}{a_n} \ge 1$$

آن‌گاه دنباله را صعودی گوییم، و اگر داشته باشیم:

$$\forall n \in N \quad a_{n+1} \le a_n \text{ یا } \frac{a_n+1}{a_n} \le 1$$

آن‌گاه دنباله را نزولی گوییم.

دنباله‌ای را که همواره صعودی یا همواره نزولی باشد، دنباله یک نوا گوییم.

مسألهٔ ۶: ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ نزولی است.

حل: باید ثابت کنیم برای هر $n \in N$ داریم: $a_{n+1} \le a_n$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{2^n}{n!} \Rightarrow \frac{2(2^n)}{(n+1)n!} \le \frac{2^n}{n!} \Rightarrow$$

$\frac{2}{n+1} \le 1 \Rightarrow \frac{n+1}{2} \ge 1 \Rightarrow n+1 \ge 2 \Rightarrow n \ge 1$ همواره برقرار است.

قضیهٔ فشار

اگر در سه دنبالهٔ $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$، از ln ای به بعد داشته باشیم $a_n \le c_n \le b_n$، چنانچه $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$، آن‌گاه نتیجه می‌شود: $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

مسأله ۷. به کمک قضیهٔ فشار، حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ را بیابید (وقتی $n \to \infty$).

حل:

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{(2)(2)(2)(2)\dots(2)}^{n \text{ مرتبه}}}{(1)(2)(3)(4)\dots(n)} \le \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \dots \times \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2^n}{n!} \le \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(0) < \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} \le \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} \Rightarrow 0 < \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$$

نکات دنباله

۱. اگر بخواهیم بدانیم عدد M چندمین جملهٔ دنبالهٔ $\{a_n\}$ است، باید معادلهٔ $a_n = M$ را حل کنیم (با توجه به این که $n \in N$).

تست ۱. عدد ۳۹۹ چندمین جملهٔ دنباله $\{n^2 - 2n\}$ است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است. $n^2 - 2n = 399 \Rightarrow$

$$n^2 - 2n - 399 = 0 \Rightarrow n = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$n = 1 \pm \sqrt{1+399} \Rightarrow n = 1 \pm \sqrt{400} \Rightarrow$$

$$n = 1 \pm 20 \Rightarrow n = 21, -19$$

پس عدد ۳۹۹ جملهٔ بیست‌ویکم دنباله است.

$$n \in N \Rightarrow n = 21$$

۲. اگر بخواهیم بدانیم دنبالهٔ $\{a_n\}$ چند جملهٔ مثبت یا منفی دارد، باید نامعادلهٔ $a_n > 0$ یا $a_n < 0$ را حل کنیم (با توجه به این که $n \in N$).

تست۲. دنبالهٔ $\{2n^2 - 129n + 127\}$ چند جملهٔ منفی دارد؟

۱) ۶۰ جمله ۲) ۶۱ جمله
۳) ۶۲ جمله ۴) ۶۳ جمله

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$2n^2 - 129n + 127 < 0 \quad n = 1, \frac{127}{2}$$

$a > 0 ;\ 1 < n < \frac{127}{2}$ یا $1 < n < 63/5 \Rightarrow n = 2, 3, \dots 63$

تعداد $= (63 - 2) + 1 = 62$

۳. برای این که بدانیم از جملهٔ چندم جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ که به L همگراست، در بازهٔ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار می‌گیرد، باید نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$ را حل کنیم.

تست۳. از جملهٔ چندم، جمله‌های دنبالهٔ $\left\{\frac{2n-10}{n+1}\right\}$ در بازهٔ $\left(2-\frac{1}{100}, 2+\frac{1}{100}\right)$ قرار می‌گیرد،

۱) ۱۱۹۷ ۲) ۱۱۹۸
۳) ۱۱۹۹ ۴) ۱۲۰۰

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است، دنباله به عدد ۲ همگراست.

$$\left|\frac{2n-10}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{2n-10-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-12}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{n+1}{12} > 100 \Rightarrow$$

$$n+1 > 1200 \Rightarrow n > 1199 \Rightarrow n \ge 1200$$

۴. برای این که بدانیم چند جملهٔ دنبالهٔ $\{a_n\}$ که به L همگراست، در بازهٔ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار نمی‌گیرد، باید نامساوی $|a_n - L| \ge \varepsilon$ را حل کنیم.

تست۴. چند جمله از دنبالهٔ $\left\{\frac{2n-5}{4n}\right\}$ در خارج بازهٔ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}, \frac{1}{2}+\frac{1}{100}\right)$ قرار دارد؟

۱) ۱۲۴ جمله ۲) ۱۲۵ جمله
۳) ۱۲۶ جمله ۴) ۱۲۷ جمله

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است، دنباله به عدد $\frac{1}{2}$ همگراست.

$$\left|\frac{2n-5}{4n} - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2n-5-2n}{4n}\right| \ge \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-5}{4n}\right| \ge \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4n} \ge \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{4n}{5} \le 100 \Rightarrow 4n \le 500 \Rightarrow n \le 125$$

۱۲۵ جمله از این دنباله، در بازهٔ فوق قرار نمی‌گیرد.

۵. اگر $0 < a < b < c\ ,\ n \in N$ ؛ $n \to \infty ;\ a^n + b^n + c^n \sim c^n$

تست۵. دنبالهٔ $\left\{\frac{2^n + 3^{n-1} + 4^{n-1}}{2^{n+1} + 3^n + 4^{n-2}}\right\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲
۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n-1}+4^{n-1}}{2^{n+1}+3^n+4^{n-2}} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}}{4^{n-2}}=4$$

۶. اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به L همگرا باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}$$

تست۶. در دنبالهٔ همگرای مثبت $\{a_n\}$، داریم $a_{n+1}=\sqrt{20+a_n}$، حدّ دنباله کدام است؟

۱) -4 ۲) 4

۳) 5 ۴) -5

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است. فرض می‌کنیم حدّ دنباله L باشد، با توجه به نکتهٔ ۶ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=L$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{20+a_n}=\sqrt{20+\lim_{n\to\infty}a_n}\Rightarrow L=\sqrt{20+L}$$

$$L^2=20+L\Rightarrow L^2-L-20=0\Rightarrow\begin{cases}L=5\\ L=-4 \text{ غیرقابل قبول}\end{cases}$$

۷. اگر در دنبالهٔ غیرثابت $\{f(n)\}$، $n=x\geq 1$ و تابع f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم: اگر $f'(x)\geq 0$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{f(n)\}$ صعودی و اگر $f'(x)\leq 0$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{f(n)\}$ نزولی است.

تست ۷. چندتا از دنباله‌های زیر صعودی است؟

$$\left\{\sqrt{2}n^5+\sqrt{3}n^3+1\right\}\quad\left\{\frac{n+2}{2n-1}\right\}\quad\left\{\frac{2n-3}{n+2}\right\}$$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۰

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$\left\{\frac{2n-3}{n+2}\right\},\ n=x\geq 1\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}>0$$ دنباله صعودی است

$$\left\{\frac{n+2}{2n-1}\right\},\ n=x\geq 1\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{x+2}{2x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-5}{(2x-1)^2}<0$$ دنباله نزولی است

$$\left\{\sqrt{2}n^5+\sqrt{3}n^3+1\right\},\ n=x\geq 1\Rightarrow$$

$$f(x)=\sqrt{2}x^5+\sqrt{3}x^3+1\Rightarrow f'(x)=5\sqrt{2}x^4+3\sqrt{3}x^2\geq 0$$

دنباله صعودی است

۸. سرعت رشد $n\in N,\ p>0,\ k>1$

$$n\to\infty;\ \log n<n<n^p<k^n<n!<n^n$$

تست۸. چندتا از دنباله‌های زیر، همگرا به صفرند.

$$\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}\quad\left\{\frac{5^n}{n!}\right\}\quad\left\{\frac{n^4}{3^n}\right\}\quad\left\{\frac{2\log n}{n}\right\}$$

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است. بنا به نکتهٔ ۸، حدّ هر چهار دنباله صفر است.

۹. دنبالهٔ همگرا کراندار است (دنبال ممکن است کراندار باشد؛ ولی همگرا نباشد).

تست۹. چندتا از دنباله‌ها کراندار هستند؟

$$\left\{\frac{n!+(n+1)!}{n!+(n+2)!}\right\}\quad\left\{\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}\quad\left\{\frac{2n^2-5}{n^2+n}\right\}$$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچکدام

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2}=2$$ همگراست، پس کراندار است

$$\forall n\in N\quad\left|\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right|\leq 1$$ کراندار است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{n!+(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$$

همگراست، پس کراندار است

تست ۱۰. حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{\left[\sqrt{5}n\right]}{n}\right\}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۰

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

داریم؛ $x-1<\lfloor x\rfloor\le x \Rightarrow \sqrt{5}n-1<\lfloor\sqrt{5}n\rfloor\le\sqrt{5}n$

نامساوی را بر n تقسیم می‌کنیم.

$$\sqrt{5}-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor\sqrt{5}n\rfloor}{n}\le\sqrt{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5}-\frac{1}{n}\right)<\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{5}n\rfloor}{n}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}<\lim\frac{\lfloor\sqrt{5}n\rfloor}{n}\le\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{5}n\rfloor}{n}=\sqrt{5}$$

تست ۱۱. اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$ داشته باشیم $a_1=5$ و $a_{n+1}=2n+a_n$، آن‌گاه جملهٔ عمومی دنباله کدام است؟

۱) $2n^2-2n+5$ ‏ ۲) $3n^2-3n+5$

۳) $4n^2-4n+5$ ‏ ۴) n^2-n+5

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

داریم: $a_{n+1}=a_n+2n$

$$\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ \\ n\to n \end{array}\begin{cases} a_2=a_1+2(1) \\ a_3=a_2+2(2) \\ a_4=a_3+2(3) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n=a_{n-1}+2(n-1) \end{cases}$$

$$\overline{a_n=2(1+2+3+\dots+(n+1))+a_1}$$

$$=2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)+5=n^2-n+5$$

تست ۱۲. بزرگ‌ترین جمله‌های دنبالهٔ $\left\{\frac{5^n}{n!}\right\}$ کدام است؟

۱) a_4,a_3 ‏ ۲) a_5,a_4

۳) a_6,a_5 ‏ ۴) a_7,a_6

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

$$\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}=\frac{5(5^n)n!}{5^n(n+1)n!}=\frac{5}{n+1}$$

$$n=4 \Rightarrow \frac{a_n+1}{a_n}=1 \Rightarrow a_n+1=a_n \xrightarrow{n=4} a_5=a_4$$

$n>4\Rightarrow\frac{a_n+1}{a_n}<1$ ‏ دنباله نزولی است

$n<4\Rightarrow\frac{a_n+1}{a_n}>1$ ‏ دنباله صعودی است

پس دو جملهٔ a_4 و a_5 مساوی‌اند و بزرگ‌ترین جمله‌های دنباله می‌باشند.

تست ۱۳. اگر در دنبالهٔ $\{a_n\}$ داشته باشیم

$a_n=\begin{cases}\frac{n+4}{n} & \text{زوج، } n\\ \frac{n+2}{n} & \text{فرد، } n\end{cases}$ ، چند جمله از دنباله در بازه $(1-\frac{1}{100},1+\frac{1}{100})$ قرار ندارد.

۱) ۲۰۰ جمله ‏ ۲) ۲۵۰ جمله

۳) ۳۰۰ جمله ‏ ۴) ۶۰۰ جمله

حل: گزینهٔ ۴ صحیح است. بنا به نکتهٔ (۴)

$$\frac{n+4}{n}-1\ge\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{4}{n}\ge\frac{1}{100}\Rightarrow$$

$\frac{n}{4}\le 100\Rightarrow\begin{cases}n\le 400\\ n\end{cases}$ ‏ زوج؛ ۲۰۰ جمله

$$\frac{n+2}{n}-1\ge\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{2}{n}>\frac{1}{100}\Rightarrow$$

$\frac{n}{2}\le 100\Rightarrow\begin{cases}n\le 200\\ n\end{cases}$ ‏ فرد؛ ۱۰۰ جمله

پس جمعاً ۳۰۰ جمله.



اصل خوش ترتیبی - استقرای ریاضی

• سید محمدرضا هاشمی موسوی
www.primenumbersformula.com

آشنایی با نظریهٔ اعداد

نظریهٔ اعداد، یکی از شاخه‌های زیبا و جالب ریاضی است که ریشه در تاریخ بشر دارد و به دلیل زیبایی و کارایی همواره مورد علاقه بوده است. پیشرفت‌های علوم دیگر مانند رایانه و رمزنگاری که تکیه بر نظریهٔ مقدماتی اعداد دارند، به شادابی و زنده بودن این شاخه از دانش بشری کمک کرده‌اند.

نظریهٔ اعداد، شامل موضوع‌هایی در ریاضیات است که توانسته توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کند. در این شاخه از ریاضیات، به مسأله‌ها، قضیه‌ها و برهان‌هایی برمی‌خوریم که بیش از دو هزار سال قدمت دارند. برای مثال، در حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد مسیح(ع)، اقلیدس برهانی مقدماتی و ساده برای اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول ارایه داد. مسأله‌هایی نیز طرح شده‌اند که چند صد سال، عدهٔ کثیری از علاقه‌مندان و ریاضیدانان را به خود مشغول داشته و باعث پیدایش شاخه‌هایی جدید و نظریه‌های بدیع شده‌اند.

امروزه نظریهٔ اعداد، آن‌چنان وسعت یافته که تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضی رخنه کرده و حتی توانسته در علوم غیرریاضی همچون رایانه، کاربرد بسیار داشته باشد. همچنین

در این شاخه از ریاضیات، مسأله های لاینحل بسیاری وجود دارد که تا به امروز انسان به حل آن نزدیک هم نشده است. یکی از مسأله هایی که حدود ۳۵۰ سال دوام آورد، قضیهٔ بزرگ فرما بود که بالأخره در سال ۱۹۹۴ میلادی به توسط اندرو وایلز در بیش از ۲۰۰ صفحه به اثبات رسید و این، اثری بسیار عظیم در ریاضیات قرن بیستم گذاشت. اما از این موفقیت، بسیاری ناخرسند شدند؛ زیرا قضیهٔ بزرگ فرما که سال های سال انگیزه ای برای ارایهٔ نظریه های جدید ریاضیات بود، از میان رفت.

می دانیم اعداد صحیح و به خصوص اعداد صحیح مثبت (طبیعی) و قاعده های مربوط به حساب آن ها، جزو قدیمی ترین و پایه ای ترین فراورده های تفکر بشری محسوب می شود و انسان ها در تمدن های باستانی، به اهمیت و ضرورت شمارش برای مقاصدی چون داد و ستد، اندازه گیری طول و مساحت زمین ها و ساختمان ها، تعیین وقت و غیره پی بردند و تقریباً پنج هزار سال پیش، چینی ها و مصری ها به طور منظم حساب و شمارش را در زندگی روزمرهٔ خود به کار می بردند.

نظریهٔ اعداد، شاخه ای از ریاضیات است که بیشتر به خواص اعداد طبیعی:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...

می پردازد. در مورد چگونگی به وجود آمدن اعداد طبیعی، اطلاع درستی در دست نیست. اما شواهدی وجود دارند که نشان می دهند بشر اولیه اعداد طبیعی را برای شمارش مورد استفاده قرار داده است و به تدریج روش هایی را برای نمایش اعداد و انجام محاسبات ابداع کرده است.

اگر به صورتی ساده، ولی کلی بخواهیم این علم را توصیف کنیم، باید بگوییم که نظریهٔ اعداد، شاخه ای از ریاضیات است که به مطالعهٔ اعداد و خواص آنها می پردازد، که البته منظور اعداد صحیح، یعنی ... و ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و... و در حالت خاص اعداد طبیعی و در حالتی خاص تر، اعداد اول است:

۲, ۳, ۵, ۷, ...

نظریهٔ اعداد به روش های بسیار جالب توانسته است در طراحی الگوریتم های بسیاری سودمند و مؤثر باشد. در این راستا می توان از حساب کامپیوتری نام برد که روش ها و الگوریتم های محاسباتی بسیاری در دههٔ گذشته کشف شده است.

موضوع های قابل توجه و جذاب همچون اعداد اول، قضیهٔ اساسی حساب، بخش پذیری و تجزیهٔ اعداد بزرگ، تشخیص اعداد اول بسیار بزرگ، معادله و دستگاه های سیال (مانند معادله مربوط به قضیهٔ بزرگ فرما)، همیشه از زمان های قدیم تاکنون، ریاضیدانان بسیاری را به خود مشغول داشته که در این راستا ریاضیدانان بزرگی همچون فرما دچار اشتباهاتی شده اند که امروزه حتی بر دانش آموزان دبیرستانی نیز آشکار است.

در اوایل قرن نوزدهم، کارل فردریش گاوس، ریاضیدان بزرگ آلمانی، با بیان هم نهشتی ها توانست راهی نو را برای حل بسیاری از مسأله های نظریهٔ اعداد نشان دهد و درواقع راهگشای حل مشکلات فراوان شود. هم نهشتی ها کاربردهای بسیاری در دانش کامپیوتر، از جمله حساب با اعداد صحیح بزرگ، رمزنگاری، فایل حافظهٔ کامپیوتر و ایجاد اعداد شبه تصادفی دارد.

یکی از اساسی ترین و مهم ترین مباحث نظریه اعداد، مبحث مربوط به **اعداد اول** و قضیه ها و احکام آن است.[۱] این اعداد درواقع سنگ بنای شالودهٔ نظریهٔ اعداد را تشکیل می دهند و شاید از بحث انگیزترین و به نوعی جالب ترین اعداد طبیعی اند. اعدادی که تعدادشان بی نهایت است و ممکن است مسأله های بسیاری در رابطه با این اعداد طرح شود که حل آنها

نیاز به سال‌ها تفکر و مطالعه و پژوهش داشته باشد.

د و مسأله که از ابتدا مورد بحث بوده است، یکی یافتن قاعده یا قانونی برای تولید اعداد اول و دیگر چگونگی توزیع آنها بین اعداد طبیعی است. شاید این اعداد را به خاطر این اول می‌نامند که هم اعدادی ساده (از نظر تجزیه) و هم زیربنایی (از نظر تجزیهٔ بقیه اعداد طبیعی به جز یک، به حاصل ضرب آنها) هستند. کار بر روی اعداد، هیچ پیشنیازی نمی‌خواهد، به همین علت برای همه کس قابل فهم و بسیار سرگرم کننده است. توصیف نظریه اعداد را از زبان یکی از ریاضیدانان مشهور انگلیس «هاردی» می‌آوریم:

«نظریه مقدماتی اعداد، باید یکی از مهم‌ترین موضوع‌ها برای تعلیم اولیه ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد و موضوعش ملموس و مأنوس است. طریقه‌های استدلالی که به کار می‌گیرد، ساده، کلی و تعدادشان کم است و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی، در علوم ریاضی مانند ندارد. یک ماه تعلیم فهیمانه در نظریه اعداد، دو بار آموزنده‌تر، دو بار مفیدتر و حداقل ده بار سرگرم‌کننده‌تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسان است.»

برخی از اصول بنیادی نظریه اعداد

پیش از بیان اصول بنیادی نظریهٔ اعداد، به معرفی چند مجموعهٔ اصلی می‌پردازیم.

دنبالهٔ اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شود و هر عضو دیگر آن، با افزودن یک واحد به عدد قبلی به دست می‌آید. با مجموعهٔ اعداد طبیعی:

$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\cdots\}$

و عمل‌های جمع و ضرب آنها و با ویژگی‌های این دو عمل اصلی و نیز با عمل تفریق روی مجموعه اعداد صحیح:

$Z=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$

آشنا شده‌اید.

همچنین هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ مثل P که هیچ مقسوم‌علیه مثبتی جز P و ۱ نداشته باشد، عدد اول است. مجموعهٔ اعداد اول را با $\mathbb{P}$ نمایش می‌دهیم:

$\mathbb{P}=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,\cdots\}$

با کمی دقت، ملاحظه می‌شود که تمام اعداد صحیح مثبت را می‌توان از راه جمع کردن تعداد مناسبی ۱، تولید کرد:

$۱=۱,\ ۲=۱+۱,\ ۳=۱+۱+۱,\ ۴=۱+۱+۱+۱,\ \cdots$

اگر به مجموعهٔ تولید شده توسط واحد، قرینه‌های آنها و عدد صفر را هم اضافه کنیم، مجموعهٔ اعداد صحیح، یعنی Z به وجود می‌آید.

حال که Z (مجموعهٔ اعداد صحیح) را توانستیم تولید کنیم، آمادهٔ بررسی خواص و اصول بنیادی اعضای این مجموعه می‌شویم.

تعریف عضو ابتدا و انتهای یک مجموعه

اگر $A\subseteq\mathbb{R}$ و ($\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی)، در این صورت a عضو ابتدا نامیده می‌شود؛ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases}\text{I) } a\in A\\ \text{II) } \forall x\in A\Rightarrow a\le x\end{cases}$$

به همین ترتیب، عدد b عضو انتهاست؛ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases}\text{I) } b\in A\\ \text{II) } \forall y\in A\Rightarrow y\le b\end{cases}$$

توجه: شرط اول برای عضو ابتدا و انتها یکسان است.

باید توجه داشته باشیم که **شرط اول** بسیار مهم است؛ زیرا برای مثال، مجموعهٔ زیر **عضو انتها** ندارد:

$A=\{x\in\mathbb{R}:x<۲۵\}$

هر چند همهٔ اعضای مجموعهٔ A از ۲۵ کوچک‌ترند؛ ولی چون ۲۵ عضو A نیست ($۲۵\notin A$)، پس ۲۵ نمی‌تواند عضو انتها باشد و بدیهی است که عدد حقیقی قبل از ۲۵ مشخص نیست! (چرا؟)

مثال ۱. عضو ابتدا و انتهای مجموعهٔ زیر را تعیین کنید.

$B=\{x\in Z:-۵<x<۳\}$

حل: ابتدا اعضای مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$B=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

بدیهی است که بین ۵- و ۴- عدد صحیحی وجود ندارد؛ پس عدد ۴- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ B است و درنتیجه عضو ابتداست. همچنین واضح است که بین ۲ و ۳ نیز عدد

صحیحی موجود نیست؛ پس، عدد ۲ بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ B است و درنتیجه عضو انتهاست.

قرارداد: عضو ابتدا و انتهای مجموعهٔ A را که درواقع به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن مجموعه محسوب می‌شوند، با نماد $a = \min A$ (عضو ابتدای A) و $b = \operatorname{Max}A$ (عضو انتهای A) نشان می‌دهند.

مثال۲. برای مجموعهٔ زیر، حاصل $\frac{\min A + \operatorname{Max}A}{۲}$ را بیابید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z}: -۳ \le x < ۶\}$$

حل: با توجه به اعضای مجموعهٔ A، بدیهی است که عضو ابتدا و انتهای A به ترتیب ۳- و ۵- هستند.

بنابراین:

$$\frac{\min A + \operatorname{Max}A}{۲} = \frac{-۳+۵}{۲} = ۱ \ : \ \operatorname{Max}A = ۵$$ (عضو انتهای A) و $\min A = -۳$ (عضو ابتدای A)

مثال ۳. در صورت وجود، عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

I) $A = \{x \in \mathbb{R}: -۲ \le x < ۳\} = [-۲, ۳)$

II) $B = \{x \in \mathbb{Q}: -\sqrt{۵} \le x \le \sqrt{۲}\}$

III) $C = \{x \in \mathbb{Z}: -\sqrt[۹]{۳} \le x \le \sqrt[۳]{۴}\}$

IV) $D = \{x \in \mathbb{N}: -۸۳ \le x < ۱۳۸۴\}$

V) $E = \{x \in \mathbb{R}: -\sqrt[۳]{۳} \le x \le \sqrt[۳]{۴}\} = [-\sqrt[۳]{۳}, \sqrt[۳]{۴}]$

حل:

I) مجموعهٔ A عضو انتها ندارد؛ ولی دارای عضو ابتدای $\min A = -۲$ است.

II) مجموعهٔ B دارای عضو ابتدا و انتها نیست؛ زیرا اگرچه به ظاهر $-\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۲}$ هردو به مجموعهٔ B تعلق دارند و به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعضای این مجموعه هستند، ولی درواقع با توجه به تعریف مجموعهٔ B که شامل اعداد گویای بین $-\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۲}$ است، هیچ‌کدام به Q تعلق ندارند و مجموعهٔ B معادل مجموعه زیر است:

$$B = \{x \in \mathbb{Q}: -\sqrt{۵} < x < \sqrt{۲}\}$$

III) با توجه به $\sqrt[۳]{۴} \approx ۱/۵۸۷$ و $\sqrt[۹]{۳} \approx ۱/۲۴۵۷$، عضو ابتدای مجموعهٔ C برابر $\min C = -۱$ و عضو انتهای آن برابر $\operatorname{Max}C = ۱$ است؛ زیرا:

$$C = \{x \in \mathbb{Z}: -۱ \le x \le ۱\} = \{-۱, ۰, ۱\}$$

IV) با توجه به $x \in \mathbb{N}$، بدیهی است که $\min D = ۱$ و $\operatorname{Max}D = ۱۳۸۳$؛ زیرا مجموعهٔ D معادل مجموعهٔ زیر است:

$$D = \{x \in \mathbb{N}: ۱ \le x \le ۱۳۸۳\}$$

V) با توجه به مجموعهٔ $E = [-\sqrt[۳]{۳}, \sqrt[۳]{۴}]$، بدیهی است که عضوهای ابتدا و انتهای آن به ترتیب $\min E = -\sqrt[۳]{۳}$ و $\operatorname{Max}E = \sqrt[۳]{۴}$ است.

در این‌جا، این سؤال مطرح می‌شود که آیا عضو ابتدا یا عضو انتها در صورت وجود، منحصربه‌فرد هستند؟

پاسخ این سؤال را به توسط قضیهٔ زیر می‌توان داد.

قضیه. اگر $A \subseteq \mathbb{R}$، در این صورت عضوهای ابتدا و انتهای A در صورت وجود، منحصربه‌فرد هستند.

برهان. فرض کنیم $a_۱$ و $a_۲$ هردو عضو ابتدای A باشند، باید ثابت کنیم $a_۲ = a_۱$. چون $a_۱$ و $a_۲$ هر دو عضو ابتدا در نظر گرفته شده‌اند، پس طبق تعریف باید: $a_۱ \in A$ و $a_۲ \in A$؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = \min A,\ a_۲ \in A \Rightarrow a_۱ \le a_۲ \\ a_۲ = \min A,\ a_۱ \in A \Rightarrow a_۲ \le a_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a_۱ = a_۲$$

به همین ترتیب و با روشی مشابه، منحصربه‌فرد بودن عضو انتها نیز اثبات می‌شود.

در این‌جا، دو مفهوم دیگر، یعنی کران پایین و کران بالا در یک مجموعه را بیان می‌کنیم.

کران پایین: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$، عدد حقیقی a را کران پایین مجموعهٔ S می‌نامیم؛ در صورتی که:

$$\forall x \in S \Rightarrow a \le x$$

گوییم مجموعهٔ S از پایین کراندار است و اگر S از پایین کراندار نباشد، می‌گوییم از پایین بی‌کران است.

برای مثال، مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R}: ۳ < x < ۴\}$، دارای کران پایین ۳ است که هر عدد حقیقی کوچک‌تر از ۳ نیز، یک کران پایین برای مجموعهٔ A محسوب می‌شود.

کران بالا: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$، عدد حقیقی b را کران بالای S

می‌نامیم؛ در صورتی که:

$\forall x \in S \Rightarrow x \leq b$

گوییم مجموعهٔ S از بالا کراندار است و اگر S از بالا کراندار نباشد، می‌گوییم از بالا بی‌کران است. برای مثال، مجموعهٔ $B = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < \sqrt{3}\}$، دارای کران بالای $\sqrt{3}$ است که هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از $\sqrt{3}$ نیز، یک کران بالای مجموعهٔ B محسوب می‌شود.

تذکر ۱. اگر به تعریف‌های اخیر دقت شود، متوجه خواهیم شد که دو تفاوت اساسی بین مفهوم‌های فوق وجود دارد؛ یعنی عضو ابتدا که منحصربه‌فرد است و باید عضو مجموعه باشد؛ در مقابل آن کران پایین نه لزومی دارد که عضو مجموعه باشد و نه لازم است که منحصربه‌فرد باشد. به همین ترتیب، کران بالا نیز لزومی ندارد که عضو مجموعه باشد و نه لازم است که منحصربه‌فرد باشد. به‌همین خاطر، می‌توانیم مجموعهٔ کران‌های پایین و مجموعهٔ کران‌های بالا را تعریف کنیم.

تذکر ۲. با توجه به تعریف‌های ارائه شده، می‌توان گفت: I) هر عضو ابتدا یک کران پایین است؛ ولی هر کران پایین، ممکن است عضو ابتدا نباشد. به همین ترتیب، هر عضو انتها یک کران بالاست؛ ولی هر کران بالا، ممکن است عضو انتها نباشد. II) عضو ابتدای یک مجموعه، در صورت وجود، بزرگ‌ترین کران پایین آن مجموعه است و عضو انتهای هر مجموعه، در صورت وجود، کوچک‌ترین کران بالای آن مجموعه است.

مثال ۴. آیا مجموعهٔ زیر عضو ابتدا، عضو انتها، کران پایین و کران بالا دارد؟

$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 2\}$

حل: ابتدا مجموعه D را به صورتی ساده‌تر می‌نویسیم:

$D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq \sqrt{2} \text{ یا } x \leq -\sqrt{2}\}$

$= (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

بدیهی است که مجموعهٔ D از بالا و پایین بی‌کران است؛ پس نمی‌تواند دارای عضو ابتدا و انتها باشد.

مثال ۵. در مجموعهٔ زیر، عضو ابتدا، عضو انتها، بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالا را تعیین کنید.

$S = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 2\}$

حل: ابتدا مجموعهٔ S را به صورتی ساده‌تر می‌نویسیم:

$S = \{x \in \mathbb{R}: -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

اعداد $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ به‌ترتیب عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه S هستند و $-\sqrt{2}$ یک کران پایین S (بزرگ‌ترین کران پایین[2]) و $\sqrt{2}$ یک کران بالای S (کوچک‌ترین کران بالا[3]) محسوب می‌شوند.

در این‌جا، برای ورود به مطلب اصلی، یعنی بخش‌پذیری در Z و بیان قضیهٔ تقسیم، نیاز داریم چند اصل و قضیهٔ مهم در رابطه با مجموعه‌های مرتب و خوش‌ترتیب بیان شود که پس از آن بتوانیم اصلی مهم به نام اصل خوش‌ترتیبی را بیان کنیم.

تعریف مجموعهٔ مرتب: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ S تعریف شده باشد و رابطهٔ R سه خاصیت انعکاسی، پادتقارنی و تعدی را داشته باشد، رابطهٔ R را یک رابطهٔ ترتیب می‌نامند و مجموعهٔ S همراه رابطهٔ R یک مجموعهٔ مرتب است.

مثال ۶. آیا $\mathbb{R}$ همراه رابطهٔ ($\leq$) یک مجموعهٔ مرتب است؟

حل: چون رابطهٔ ($\leq$) در مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)، یک رابطهٔ ترتیب است:

I) $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$ (انعکاسی)

II) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$ (پادتقارنی)

III) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (تعدی)

پس $\mathbb{R}$ همراه ($\leq$) یک مجموعهٔ مرتب است.

تعریف مجموعهٔ خوش‌ترتیب: اگر $S \subseteq \mathbb{R}$ و S همراه رابطهٔ R یک مجموعهٔ مرتب باشد، مجموعهٔ S را خوش‌ترتیب می‌نامیم؛ در صورتی که هر زیر مجموعهٔ ناتهی S دارای عضو ابتدا باشد.

مثال ۷. آیا مجموعهٔ زیر خوش‌ترتیب است؟

$S = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 6\}$

حل: مجموعهٔ S خوش‌ترتیب نیست؛ زیرا $(3, 4) \subseteq S$ و بازهٔ (۳،۴) دارای عضو ابتدا نیست. بنابراین اگر S خودش عضو ابتدا داشته باشد، شرط لازم است؛ ولی کافی نیست.

مثال ۸. آیا مجموعهٔ زیر خوش‌ترتیب است؟

$A = \{x \in Z : x > -۳\}$

حل: مجموعهٔ A خوش ترتیب است ؛ زیرا خودش دارای عضو ابتداست :

$\min A = -۲$

همچنین هر زیرمجموعهٔ آن نیز دارای عضو ابتداست ؛ زیرا $A \subseteq Z$ و از پایین کراندار است .

تبصرهٔ ۱ . قضیه‌ای تحت این عنوان که «اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد صحیح Z و از پایین کراندار باشد ، در این صورت ، A دارای عضو ابتداست» ، ثابت شده است .

تبصرهٔ ۲ . قضیه‌ای تحت این عنوان که «هر زیرمجموعهٔ ناتهی Z که از بالا کراندار باشد ، دارای عضو انتهاست» ، ثابت شده است .

تمرین . آیا مجموعه‌های زیر خوش ترتیب هستند؟

I) $A = \{x \in \mathbb{R} : ۱ \le x \le ۳\}$

II) $B = \{x \in Z : x > -۱\}$

III) $C = \{x \in Z : x \le ۲\}$

اصل خوش‌ترتیبی

هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی ، دارای عضو ابتداست .

به طور کلی ، اگر مجموعه‌ای دارای این خاصیت باشد که تمام زیرمجموعه‌های ناتهی آن عضو ابتدا داشته باشد ، یک مجموعهٔ خوش ترتیب نامیده می‌شود . بنابراین ، اصل خوش ترتیبی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد :

«مجموعهٔ اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) خوش ترتیب است» .

مثال ۹ . کدام یک از مجموعه‌های زیر ، خوش ترتیب است؟

I) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \ge -۵\}$

II) $B = \{x \in \mathbb{R} : ۸ \le x \le ۳۴\}$

III) $C = \{x \in Z : x < -۳\}$

IV) $D = \{x \in Z : x > -۴\}$

حل:

I) مجموعهٔ A خودش دارای عضو ابتداست ؛ ولی زیرمجموعهٔ $(-۴, -۳) \subseteq A$ عضو ابتدا ندارد .

II) مجموعهٔ B دارای عضو ابتدا و انتهاست ؛ ولی زیرمجموعهٔ $(۹, ۱۰) \subseteq B$ عضو ابتدا ندارد .

III) مجموعهٔ C خودش دارای عضو ابتدا نیست .

IV) مجموعهٔ D خودش دارای عضو ابتداست و هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن نیز دارای عضو ابتداست ؛ بنابراین D خوش ترتیب است (عدد ۴- یک کران پایین D و هر زیرمجموعهٔ D است) .

تمرین . کدام یک از مجموعه‌های زیر ، خوش ترتیب است؟

I) $A = \{x \in Z : x \le -۲\}$

II) $B = \{x \in \mathbb{N} : x \ge ۷\}$

III) $C = \{x \in \mathbb{R} : x \ge -۳\}$

IV) $D = \{x \in Q : x > \sqrt{۲}\}$

VI) $E = \{x \in Z : -۳۴ < x \le ۸\}$

V) $F = \{x \in Z : x > ۴\}$

در این جا ، با بیان اصلی به نام «اصل استقرای ریاضی» که در واقع ، با اصل خوش ترتیبی معادل است (به بیان دیگر ، با قبول هریک می‌توان دیگری را ثابت کرد) ، این قسمت را خاتمه می‌دهیم .

اصل استقرای ریاضی[۴]

اگر $S \subseteq \mathbb{N}$ و S دارای دو خاصیت زیر باشد ، آن‌گاه $S = \mathbb{N}$.

I) $۱ \in S$.

II) برای هر K ، اگر $K \in S$ آن‌گاه $(K+۱) \in S$.

می‌توانیم این اصل را به‌عنوان یک قضیه و با استفاده از اصل خوش ترتیبی اثبات کنیم .

برهان . فرض می‌کنیم $S \subseteq \mathbb{N}$ و دو شرط (I) و (II) برقرار باشند . باید ثابت کنیم : $S = \mathbb{N}$. اگر فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) ، پس باید عضوی در $\mathbb{N}$ باشد که آن عضو در S نباشد . به بیان ریاضی $T = \mathbb{N} - S \ne \varnothing$ و چون $T \subseteq \mathbb{N}$ ، طبق اصل خوش ترتیبی باید مجموعهٔ T دارای عضو ابتدا باشد . با فرض این که $t_1 \in T$ ، عضو ابتدای T باشد ، با توجه به (I) یعنی $۱ \in S$ و $T = \mathbb{N} - S$ ، نتیجه می‌شود $۱ \notin T$ ؛ پس $t_1 > ۱$ $(t_1 - ۱ > ۰)$ ؛ بنابراین $(t_1 - ۱) \in \mathbb{N}$ و بدیهی است که

$t_1 > (t_1 - 1)$ و از آن‌جا که t_1 عضو ابتدای T است، پس نتیجه می‌شود که $(t_1 - 1) \notin T$ ؛ بنابراین باید $(t_1 - 1) \in S$ و با توجه به (II) باید $((t_1 - 1) + 1) \in S$ یا $t_1 \in S$ که با $t_1 \in T$ تناقض دارد؛ پس فرض خلف باطل است و درنتیجه حکم برقرار است؛ یعنی $S = \mathbb{N}$.

نتیجهٔ اصل استقرای ریاضی (معادل اصل استقرای ریاضی)

اگر در اعداد طبیعی گزاره نمایی مانند $p(n)$ داشته باشیم و برای آن $p(1)$ درست باشد و به ازای هر k طبیعی از درستی $p(k)$ ، درستی $p(k+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ به ازای هر عدد طبیعی چون n درست است.

تعمیم این مطلب : فرض کنیم $p(n)$ گزاره نمایی در اعداد صحیح (Z) باشد و برای یک $m \in Z$ ، عبارت $p(m)$ درست باشد و هرگاه $n \geq m$ و از درستی $p(n)$ ، درستی $p(n+1)$ نتیجه شود، آن‌گاه $p(n)$ به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ درست است.

تذکر : این نتیجه می‌تواند در اثبات بسیاری از مسأله‌های ریاضی که به صورت گزاره‌نماهایی در $\mathbb{N}$ مطرح می‌شوند، کاربرد داشته باشد. ولی همیشه به این مطلب باید توجه داشت که این نوع استدلال، در کل ناقص است و ممکن است برخی از گزاره‌نماها همهٔ شرط‌های استقرایی را داشته باشند؛ ولی همواره برقرار نباشند؛ یعنی گزاره‌نما برای $p(1)$ درست باشد و همچنین از درستی $p(k)$ ، درستی $p(k+1)$ نیز نتیجه شود؛ ولی در کل $p(n)$ درست نباشد.

درواقع استدلال استقرایی، به طور معمول با مقایسهٔ مشاهده‌ها و نتیجه‌های حاصل از آزمایش‌های محدودی آغاز می‌شود. سپس نتیجهٔ این آزمایش‌ها را به همهٔ پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. در اصل، استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود؛ زیرا مجموعهٔ مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همهٔ پدیده‌ها انجام دهیم. این نوع استدلال، فقط روش خوبی برای حدس‌زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

مثال ۱۰ . با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید :

$$p(n) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل :

$$p(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

فرض استقرا : $p(k) = 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

حکم استقرا : $p(k+1) = 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\text{سمت چپ حکم} = \underbrace{1+2+3+\cdots+k}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$= \frac{k^2+3k+2}{2} = \overbrace{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}^{\text{سمت راست حکم}}$$

مثال ۱۱ . ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $25^n - 1$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

حل : حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم :

$25^n - 1 = 8k$ (حکم استقرا)

$n = 1 : 25^1 - 1 = 24 = 8 \times 3;$

و $n = k : 25^k - 1 = 8k_1$ (فرض)

$n = k+1 : 25^{k+1} - 1 = 8k_2$ (حکم)

اگر دو طرف فرض را در ۲۵ ضرب کنیم، در این صورت :

$25^{k+1} - 25 = 200k_1;$

$25^{k+1} - 1 = 200k_1 + 24 = 8(25k_1 + 3) = 8k_2$

(حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است).

تمرین . به روش استقرا ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عدد $p(n) = 2^{2n} + 15n - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

(ادامه در شمارهٔ بعد)

زیرنویس

۱ . برای اطلاع از آخرین دستاوردها و اکتشافات و تحولات در زمینه نظریه اعداد به سایت نویسنده مقاله رجوع شود.

2. Infimum

3. Supermum

۴ . برای اطلاع بیشتر از این موضوع به شماره‌های (۴۰) و (۴۱) مجله ریاضی رشد برهان متوسطه رجوع شود.

۳۷

حمیدرضا امیری



احتمال شرطی

(قضیه‌ی حاصل‌ضرب، نمودار درختی، افرازها و قضیه‌ی بیز)

برای دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی

اشاره: در شماره‌ی قبل مشاهده شد که با توجه به رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ حاصل شده که به قانون ضرب احتمالات معروف است. حال می‌توانیم با استفاده از استقرای ریاضی تعمیم رابطه‌ی فوق را به‌عنوان یک قضیه (قضیه‌ی حاصل ضرب) به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه‌ی حاصل‌ضرب: اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند خواهیم داشت:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

قضیه‌ی حاصل‌ضرب ما را در حل بسیاری از مسائل احتمال یاری می‌دهد. در زیر به بیان چند نمونه از این مسایل می‌پردازیم:

مسأله‌ی ۱: در جعبه‌ای ۱۱ مهره‌ی سیاه و سفید داریم که ۴ تای آن‌ها سیاه است. ۳ مهره را به تصادف و یکی پس از دیگری (بدون جایگذاری) بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد که هر سه مهره سفید باشند؟

حل: توجه دارید که در حل این مسأله و پس از خارج کردن مهره‌ی اول به نوعی باید از احتمال شرطی استفاده کرد: یعنی احتمال سفید بودن مهره‌ی دوم را بدهیم به شرط آن که اولی سفید باشد و احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم را بدهیم به شرط آن که مهره‌های اول و دوم سفید باشند؛ و به همین دلیل می‌نویسیم: (احتمال سفید بودن مهره‌ی اول و دوم و سوم را به ترتیب A_1, A_2, A_3 فرض می‌کنیم)

$$P(\text{هر سه سفید})=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{14}{66}$$

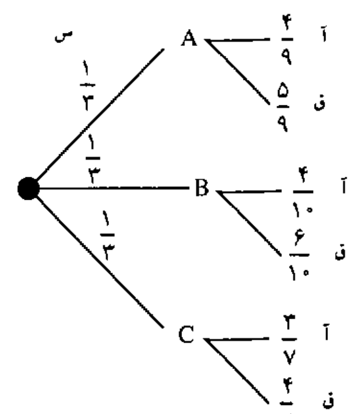
(وقتی می‌خواهیم احتمال سفید بودن مهره‌ی دوم را حساب کنیم فرض می‌کنیم مهره‌ی اول سفید بوده است، پس ۱ مهره از

مهره‌های سفید و ۱ مهره از اعضای فضای نمونه‌ای کم می‌کنیم و برای محاسبه‌ی احتمال سفید بودن مهره‌ی سوم فرض می‌کنیم که دو مهره‌ی اول و دوم سفید بوده‌اند؛ پس شرط سفید بودن مهره‌های اول و دوم برای مهره‌ی سوم فرض شده و به همین دلیل دو مهره از مهره‌های سفید و دو مهره از فضای نمونه‌ای کم کرده‌ایم)

فرآیندهای تصادفی متناهی و نمودار درختی

تعدادی (متناهی) آزمایش که هر کدام از آن‌ها دارای نتایج متناهی با احتمالی معین باشند یک **فرآیند تصادفی متناهی** نامیده می‌شود. نمودارهای درختی، مطابق آنچه در زیر خواهد آمد، روش بسیار خوبی برای تجزیه و تحلیل و تشریح چنین فرآیندهایی به شمار می‌رود. زیرا محاسبه‌ی احتمال فرآیندهای تصادفی از طریق نمودارهای درختی، خطا را به صفر رسانیده و از هر گونه جاافتادگی حالت‌ها یا زیاده‌گویی و تکرار بی‌مورد جلوگیری می‌کند. دقت داشته باشید که محاسبه‌ی احتمال روی هر یک از شاخه‌های نمودار درختی توسط قضیه‌ی حاصل‌ضرب انجام می‌پذیرد.

مسأله‌ی ۲: در سه جعبه‌ی A و B و C به ترتیب ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی؛ ۶ قرمز و ۴ آبی؛ ۴ قرمز و ۳ آبی وجود دارد. یکی از این سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟

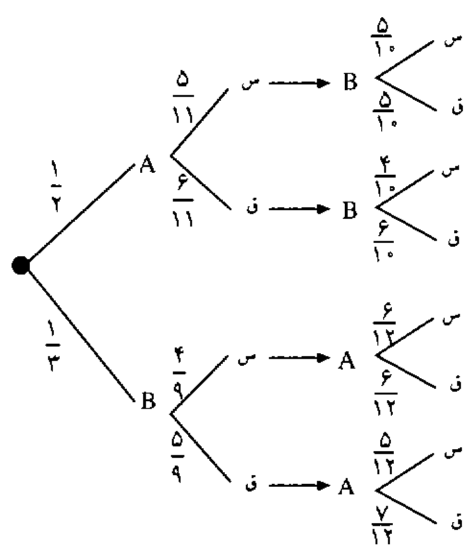


$$P(\text{آبی}) = \frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱}{۳}(\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۱۰}+\frac{۳}{۷})$$

مسأله‌ی ۳: در جعبه‌ی A، ۵ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی قرمز و در جعبه‌ی B، ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. یکی از دو جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج کرده و در جعبه‌ی دیگر می‌گذاریم و سپس از آن جعبه‌ی دیگر مهره‌ای به تصادف برمی‌داریم.

الف: چقدر احتمال دارد مهره‌ی دوم قرمز باشد؟

ب: چقدر احتمال دارد دو مهره همرنگ باشند؟



الف: با توجه به نمودار و این که به طور مثال اگر مهره‌ی سفید از جعبه‌ی A خارج شود و در جعبه‌ی B قرار گیرد ۱ مهره‌ی سفید به مهره‌های سفید و ۱ مهره به فضای نمونه‌ای جعبه‌ی B اضافه می‌شود؛ داریم (روی مسیرها یا شاخه‌هایی حرکت می‌کنیم که به قرمز (ق) منتهی شود):

$$P(\text{قرمز}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۶}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۱۲}$$

ب: برای حل قسمت ب روی مسیرهایی حرکت می‌کنیم که دو سفید یا قرمز وجود داشته باشد.

$$P(\text{دومهره همرنگ}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}$$
$$+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۶}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۱۲}$$

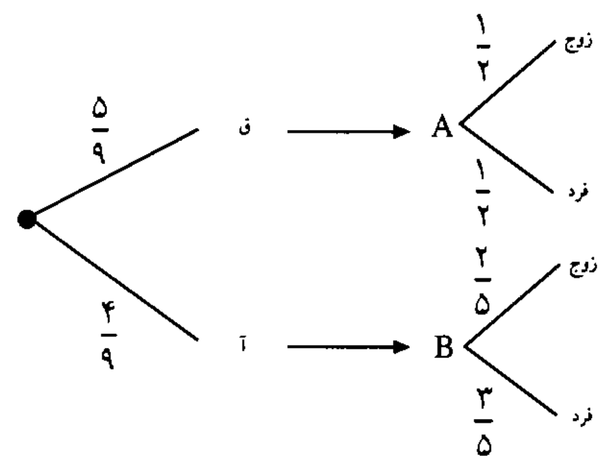






مسأله‌ی ۴ : در جعبه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد و دو مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ مفروضند. یک مهره از جعبه به تصادف خارج می‌کنیم؛ اگر قرمز باشد از مجموعه‌ی A و اگر آبی باشد از مجموعه‌ی B عددی به تصادف برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده فرد باشد؟

حل: نمودار درختی این فرایند تصادفی را رسم می‌کنیم:



$$P(\text{فرد}) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۵}$$

قانون بیز و کاربردهای آن

با توجه به این که $(A \cap B) = (B \cap A)$ و قانون ضرب احتمالات می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \times P(A|B) \\ P(B \cap A) &= P(A) \times P(B|A) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A)$$

در واقع قانون فوق ارتباطی است بین $P(A|B)$ و $P(B|A)$ و این ارتباط در حل بسیاری از مسائل پیچیده‌ی احتمال به کمک ما می‌آید و راه‌حل را قابل فهم و ساده در اختیار ما قرار می‌دهد.

گاهی اوقات شرط و مشروط به گونه‌ای تعریف می‌شوند که ما نمی‌توانیم ارتباط لازم و قابل فهمی بین آن‌ها برقرار کنیم، ولی اگر جای شرط و مشروط را عوض کنیم مسأله به راحتی قابل فهم و حل است؛ به عبارت دیگر ممکن است $P(A|B)$ مفهوم نباشد ولی $P(B|A)$ کاملاً قابل درک باشد. به مسأله‌ی بعد توجه کنید:

مسأله‌ی ۵ : در جعبه‌ی A، ۴ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی B، ۶ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی C، ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر این مهره آبی باشد چقدر احتمال دارد از جعبه‌ی C باشد؟

حل: اگر B را پیشامدی که رخ داده (مهره آبی است) و A را پیشامد مطلوب (مهره از جعبه‌ی C باشد) فرض کنیم باید $P(A|B)$ را به دست آوریم که تا حدودی نامفهوم است (احتمال این که از جعبه‌ی C باشد به شرطی که بدانیم آبی است) ولی اگر جای A و B عوض شود $P(B|A)$ کاملاً مفهوم است یعنی احتمال آن که مهره آبی باشد به شرط آن که بدانیم از جعبه‌ی C انتخاب شده است که برابر است با $\frac{۵}{۸}$، و با توجه به قانون بیز یعنی $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A)$ محاسبه‌ی $P(A|B)$ نیز آسان خواهد بود (توجه دارید که $P(A)$ یعنی احتمال آن که مهره از جعبه‌ی C باشد که $\frac{۱}{۳}$ است و $P(B)$ یعنی احتمال آبی بودن مهره که شبیه مسأله‌ی ۲ و به روش درختی قابل محاسبه است.

$$P(A|B) = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}(\frac{۴}{۸} + \frac{۲}{۸} + \frac{۵}{۸})} \times \frac{۵}{۸} = \frac{\frac{۵}{۸}}{\frac{۱۱}{۸}} = \frac{۵}{۱۱}$$

یک راه‌حل شگفت‌انگیز و بسیار ساده برای مسأله‌ی فوق

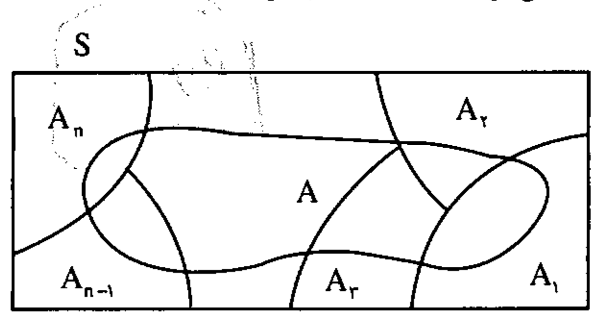
ما می‌خواهیم احتمال این را حساب کنیم که مهره از جعبه‌ی

C باشد به شرط آن که بدانیم مهره‌ی انتخابی آبی است. پس فضای نمونه‌ای را پیشامد رخ داده در نظر می‌گیریم، یعنی تعداد کلّ مهره‌های آبی که تعدادشان ۱۱ عدد است و تعداد مهره‌های آبی در جعبه‌ی C، ۵ می‌باشد، پس احتمال مورد نظر، $\frac{5}{11}$ است!

تذکر بسیار مهمّ: از روش ذکر شده فقط وقتی می‌توان استفاده کرد که تعداد کلّ مهره‌ها در هر جعبه با جعبه‌های دیگر برابر باشد. در مسأله‌ی قبل هر سه جعبه دارای ۸ مهره می‌باشند و در واقع فضای نمونه‌ای هر جعبه با جعبه‌های دیگر همشانس است. حال اگر تعداد مهره‌های جعبه‌ها برابر نباشد، جواب صحیح فقط از طریق قانون بیز قابل محاسبه است.

قضیه‌ی افرازها (قانون احتمال کلّ)

گاهی اوقات پیشامد A از فضای نمونه‌ای S پیشامدی با تعداد حالت‌های بسیار زیاد بوده و لذا عملاً امکان محاسبه‌ی احتمال رخداد آن از طریق نمودار درختی ضعیف است و حجم زیادی از عملیات جبری را به خود اختصاص می‌دهد. حال اگر بتوانیم افرازی مناسب و شناخته‌شده برای پیشامد A در نظر بگیریم، با توجه به قضیه‌ی افرازها یا قانون احتمال کلّ به راحتی می‌توان با راه‌حلّی کوتاه، P(A) را محاسبه کرد.



با توجه به شکل قبل می‌توان نوشت:

$$A = S\cap A = (A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap A$$
$$= (A_1\cap A)\cup\cdots\cup(A_n\cap A)$$

و چون A_iها افرازی برای مجموعه‌ی A هستند لذا همه‌ی $(A_i\cap A)$ها با هم ناسازگارند و می‌توان نوشت،

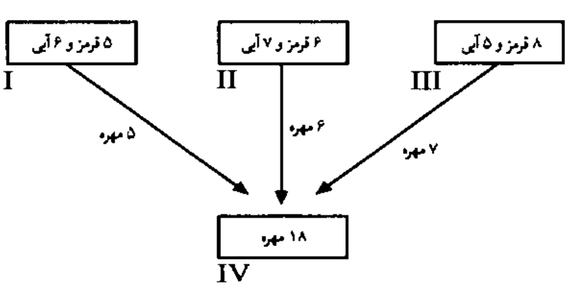
$$P(A) = P(A_1\cap A) + P(A_2\cap A)+\cdots+P(A_n\cap A)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون ضرب}} P(A) = P(A_1)P(A|A_1)$$
$$+P(A_2)P(A|A_2)+\cdots+P(A_n)P(A|A_n)$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

تساوی اخیر به قانون احتمال کلّ معروف است.

مسأله‌ی ۶: در سه جعبه‌ی (I)، (II) و (III) به ترتیب، ۵ قرمز و ۶ آبی، ۶ قرمز و ۷ آبی، ۸ قرمز و ۵ آبی وجود دارد از جعبه (I) ۵ مهره و از جعبه‌ی (II) ۶ مهره و از جعبه‌ی (III) ۷ مهره به تصادف خارج کرده و به صورت دَرهم در جعبه‌ی شماره (IV) که خالی بوده، می‌ریزیم و سپس مهره‌ای از جعبه‌ی (IV) به تصادف برمی‌داریم چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟



همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای ۱۸ مهره‌ای که در جعبه‌ی (IV) قرار گرفته حالت‌های بسیار متنوع و زیادی می‌توانیم در نظر بگیریم. بنابراین به فکر افرازی مناسب برای فضای نمونه‌ای هستیم و اگر پیشامد آبی بودن مهره را A فرض کنیم، بهترین و مناسب‌ترین افراز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$A_1 =$ مهره از جعبه‌ی (I) باشد

$A_2 =$ مهره از جعبه‌ی (II) باشد

$A_3 =$ مهره از جعبه‌ی (III) باشد

در واقع ما مسأله را از آخر به اول نگاه کردیم؛ یعنی گفتیم که اگر از جعبه‌ی (IV) مهره‌ای به تصادف خارج کنیم از این سه

حالت خارج نیست: یا مهره از جعبه‌ی (I) بوده یا از جعبه‌ی (II) و یا جزء هفت مهره‌ای بوده که از جعبه‌ی (III) درون (IV) قرار گرفته است. دقت دارید که افراز فوق کاملاً شناخته شده و مفهوم هستند، یعنی جعبه‌های (I)، (II) و (III) را ما کاملاً می‌شناسیم؛ حال می‌توان نوشت:

$$P(A)=P(A_1)\times P(A|A_1)+P(A_2)\times P(A|A_2)$$
$$+P(A_3)\times P(A|A_3)$$

$P(A_1)$ یعنی احتمال آن که مهره از جعبه‌ی (I) باشد و مقدار این احتمال $\frac{5}{18}$ است زیرا از ۱۸ مهره‌ای که در جعبه‌ی (IV) قرار دارد، ۵ مهره از جعبه‌ی (I) است و $P(A|A_1)$ یعنی احتمال آن که مهره آبی باشد به شرط آن که بدانیم از جعبه‌ی (I) است که مقدار آن برابر است با $\frac{6}{11}$ (۶ آبی در بین ۱۱ مهره‌ی جعبه‌ی (I) وجود دارد) پس به همین صورت برای قسمت‌های بعد می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{5}{18}\times\frac{6}{11}+\frac{6}{18}\times\frac{7}{13}+\frac{7}{18}\times\frac{5}{13}$$

نتیجه‌ی مهم: با توجه به قانون بیز و قانون احتمال کلّ می‌توان نوشت:

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\times P(B|A)$$

(در بعضی از منابع رابطه‌ی فوق را به‌عنوان قضیه‌ی بیز معرفی کرده‌اند)

تذکر مهم: در مسائل احتمال شرطی که رنگ یا نوع یا جنس اشیاء مورد نظر باشد از نمودار درختی استفاده می‌شود ولی اگر رنگ یا نوع یا جنس اشیاء مشخص و مفروض در نظر گرفته شود و منبع آن شیئی مورد نظر باشد از قضیه‌ی بیز استفاده می‌شود.

تذکر: گاهی اوقات در حل مسائل احتمال شرطی از رابطه‌ی اصلی احتمال شرطی استفاده می‌شود، یعنی از رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. به مثال بعد توجه کنید.

مسأله‌ی ۷: در یک کلاس ۲۰٪ دانش‌آموزان در درس ریاضی، ۱۵٪ در درس شیمی و ۱۰٪ در هر دو درس مردود شده‌اند. دانش‌آموزی را به طور تصادفی از این کلاس انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که:

I) در درس ریاضی مردود باشد به شرط آن که بدانیم در شیمی مردود است.

II) در درس شیمی مردود باشد به شرط آن که بدانیم در ریاضی مردود است.

III) در درس ریاضی یا شیمی مردود باشد.

حل: فرض کنیم:

پیشامد مردود بودن در ریاضی = M

پیشامد مردود بودن در شیمی = C

$$\text{I)}\ \ P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

$$\text{II)}\ \ P(C|M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{20}{100}}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$\text{III)}\ \ P(M\cup C)=P(M)+P(C)-P(M\cap C)$$
$$=\frac{20}{100}+\frac{15}{100}-\frac{10}{100}$$
$$\Rightarrow P(M\cup C)=\frac{25}{100}$$

تذکر: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $\overline{A}$ متمم پیشامد A باشد. در این صورت داریم:

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=1-P(A|B)$$
$$\Rightarrow P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$$

۱

ترجمه:
غلامرضا یاسی‌پور

نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها

مقدمه

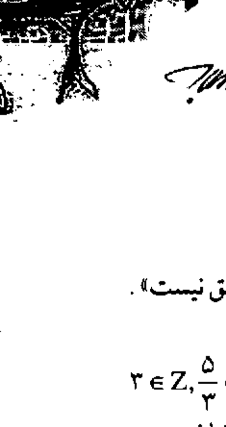
جرج کانتور[۱] در ۱۸۹۵ در آغاز اثرش Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre تعریف زیر را آورده‌است :

منظورمان از **مجموعهٔ** "set" هر گردایهٔ M از اشیای معین، متمایز m از برداشت یا تصورمان (که **عنصرها** "elements" M نامیده می‌شوند) به‌صورت یک کل است .

به این ترتیب، مثال‌های مجموعه‌ها عبارت‌اند از : **Z**، مجموعهٔ جمیع اعداد درست، که در این جا **اعداد صحیح** "integers" نامیده می‌شوند؛ **C,R,Q**، به ترتیب، مجموعه‌های جمیع **اعداد گویا** rational numbers، جمیع **اعداد حقیقی** "real numbers" و جمیع **اعداد مختلط** "complex numbers"، M مجموعه‌ای شامل جمیع قمرهای مریخ و حتی H، مجموعهٔ جمیع اختاپوس‌های دوپایی که اول اردیبهشت گذشته از آبادان دیدن کرده‌اند .

نیاز کانتور برای چنین تعریفی در حدود ۱۸۷۲ از تحقیقاتش درمورد یکتایی ممکن نمایش توابع توسط توابع مثلثاتی برخاسته بود . در موقع خود آشکار شد که تمام ریاضیات را می‌توان بر پایه‌ای مجموعه ـ نظریه‌ای "set - theoric base" مبتنی کرد . به‌خصوص **کانتور و ریچارد دکیند**، در اثرشان **Stetigkeit und irrationale Zahle** (۱۸۷۲)، نشان دادند چگونه **اعداد گنگ** "irrational numbers" تا اندازه‌ای نا‌ملموس(یعنی آن عناصری از **R** که در **Q** نیستند) را می‌توان با استفاده از مفهوم مجموعه‌ها، بر حسب **Q** اعتبار داد . و **گوتلوب فرگه** "Gottlob Frege" (۱۸۸۴) مبرهن کرد چگونه اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ... را می‌توان با عبارت‌های مجموعه ـ نظریه‌ای تعریف کرد . علاوه بر این، مفهوم تابع را نیز می‌توان از لحاظ مجموعه ـ نظریه‌ای تعریف نمود .

بنابراین تعجب آور نیست که امروزه نمادگذاری، اصطلاحات و مفهوم‌های ساده‌تر نظریهٔ مجموعه‌ها، قسمت اصلی زبانی را تشکیل می‌دهند که مباحث ریاضی معاصر بر آن بنا شده‌اند .



مجموعه‌ها

کلمه‌های مجموعه "set"، **گردایه** "collection" و **دسته** "aggregate" را مترادف درنظر می‌گیریم . گاهی عنصرهای یک مجموعه را **عضوها** "members" آن می‌نامیم . اگر A یک مجموعه و شیء a عنصری از A باشد، می‌نویسیم $a \in A$. معمولاً نماد $a \in A$ را به‌صورت "a **متعلق است به** A" می‌خوانیم . اگر a عضو A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$ و می‌گوییم« a به A **متعلق نیست**» .

به این ترتیب می‌توان نوشت :

$$۳ \in Z, \frac{۵}{۳} \notin Z, \frac{۵}{۳} \in Q, \pi \in \mathbb{R}, \pi \notin Q$$

مجموعه‌ها را می‌توان با فهرست کردن عضوهایشان بین دو آکولاد نیز توصیف کرد . البته توصیف مجموعه‌های شامل بی‌نهایت عضو به این طریق غیرممکن است . در چنین مواقعی،

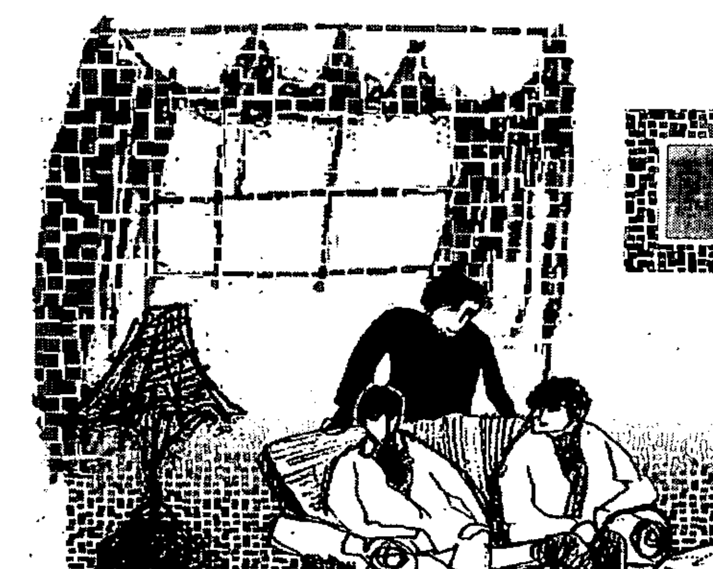
ممکن است وسوسه شده بنویسیم $\{x:P(x)\}$ که در آن $P(a)$ مشخص می‌کند که شیء a دارای ویژگی P است و در نتیجه در مجموعهٔ موردنظر قرار دارد.[۲] به این ترتیب Z^+، مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح مثبت را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$Z^+ = \{x : x \in Z, x > 0\}$$

(این نماد به این صورت خوانده می‌شود Z بعلاوه، مجموعهٔ تمام xها است، به طوری که x به Z تعلق دارد و x بزرگ‌تر از صفر است.) گرچه گاهی نیز نماد:

$$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

به کار می‌رود که سه نقطهٔ آن عبارت مبهم و «غیره» را مشخص



می‌کند. مجموعه‌های متناهی کوچک را می‌توان به چند طریق نمایش داد. فی‌المثل داریم.

M={x : x فوبوس است یا x دیموس است}

یا:

M ={x : x ماه مریخ است}

اگر A و B مجموعه باشند و اگر هر عنصر A به مجموعهٔ B متعلق باشد، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ "subset"ای از B یا A مشمول[۳] "contained"، در B است، و می‌نویسیم $A \subseteq B$ (یا $B \supseteq A$، مورد اخیر به صورت «B شامل A» است. نیز خوانده می‌شود). در حالت خاص به‌ازای هر مجموعهٔ A، $A \subseteq A$ و اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$.

با معلوم‌بودن $A \subseteq B$، اگر بدانیم (و اگر برایمان مهم باشد!) که B شامل عنصرهایی غیرواقع در A است، آن‌گاه می‌نویسیم $A \subset B$ (یا $B \supset A$) یا حتی اگر تأکید بیشتری لازم باشد $A \subsetneq B$ ($B \supsetneq A$). در این صورت A را زیرمجموعهٔ سره "proper subset" B می‌نامیم. به این ترتیب، مطابق با تأکید لازم می‌نویسیم $Z \subset Q, Z \subset Q$ یا $Z \subsetneq Q$.

اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ ($B \not\supseteq A$). توجه داشته باشید که $A \not\subseteq B$ وقتی و تنها وقتی که A شامل حداقل یک عضو باشد که در B نیست.

A و B را برابر "equal" می‌گوییم و می‌نویسیم A=B، وقتی و تنها وقتی که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ همزمان برقرار باشند. نتیجه می‌شود که یکی از طریق‌های مفید اثبات برابری دو مجموعهٔ A و B اثبات $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هردو، است.

اخطار: سعی داشته باشید $\in$ را با $\subseteq$ اشتباه نکنید. به بیانی تقریبی: $\in$ در رابطه با مجموعه با عنصرهایش؛ و $\subseteq$ در رابطه با مجموعه با زیرمجموعه‌هایش به کار می‌رود. در توضیح این مطلب، فرض می‌کنیم:

$$A = \{1, \{1\}, 2, \{3, 4\}, Z\}$$

در این صورت A مجموعه‌ای با پنج عنصر ۱، {۱}، ۲، {۳ ، ۴} و Z است. در نتیجه:

$$1 \in A, 1 \not\subseteq A, \{1\} \in A, \{1\} \subseteq A, \{2\} \notin A, \{2\} \subseteq A$$

$$\{3\} \notin A, \{3\} \not\subseteq A, \{3,4\} \in A, \{3,4\} \not\subseteq A, Z \in A, R \subseteq A$$

(در ضمن، مجموعه‌هایی چون {۲} که شامل دقیقاً یک عنصرند، منفرد "Singleton" نامیده می‌شوند.)

اکنون مجموعه‌های

$$F = \{x : x \in Z, x^2 < 0\}, G = \{\ \}$$

و H پیش از این ذکرشده را در نظر می‌گیریم. آشکار است که هیچ‌یک از آنها اصلاً شامل عضوی نیست. مجموعهٔ بدون عضو را مجموعهٔ تهی "empty set" می‌نامیم.

به‌رغم تفاوت‌های واقع در تعریف H,G,F می‌توان نشان داد

که تنها یک مجموعهٔ تهی وجود دارد. برای اثبات این و چیزی هم بیشتر از آن، فرض می‌کنیم $\varnothing$ مجموعه‌ای تهی و A مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت $A \subseteq \varnothing$، زیرا در غیر این صورت $A \not\subseteq \varnothing$ و بنابراین $\varnothing$ شامل عنصری است که در A یافت نمی‌شود.

اما این احمقانه است؛ زیرا $\varnothing$ دارای عضو نیست. اکنون فرض می‌کنیم $\varnothing_1$ مجموعه تهی دیگری باشد. از آن‌جا که $\varnothing$ تهی است $\varnothing_1 \subseteq \varnothing$. از آن‌جا که $\varnothing_1$ تهی است $\varnothing \subseteq \varnothing_1$. و این دو نابرابری، چون با هم در نظر گرفته شوند، مستلزم $\varnothing_1 \subseteq \varnothing$ اند. به این ترتیب می‌توان از **مجموعهٔ تهی (یکتا)** سخن گفت.

مسأله ۱. اشتباه استدلال زیر در اثبات $A \not\subseteq \varnothing$ چیست؟

در اثبات $B \subseteq A$ باید نشان دهیم هر عنصر B در A نیز موجود است. از آنجا که $\varnothing$ دارای عضوی نیست، نمی‌توان نشان داد که $A \subseteq \varnothing$؛ درنتیجه $A \not\subseteq \varnothing$.

فرض می‌کنیم A و B مجموعه باشند. در این صورت مجموعه‌های:

$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$

$A \cup B = \{x : x \in A$ یا $x \in B$ (یا هر دو)$\}$

را به ترتیب، **اشتراک** "intersection" و **اجتماع** "union" A و B می‌نامیم. به این ترتیب اگر:

$A = \{۳, ۱, ۴\}$

و

$B = \{\pi, ۴,$ الیورکرامول $, ۱\}$

باشد، آن‌گاه:

$A \cap B = \{۱, ۴\}$

در حالی که:

$A \cup B = \{۳, ۱, ۴, \pi,$ الیورکرامول $\}$

بلافاصله نتیجه می‌شود که به‌ازای مجموعه‌های A و B داریم:

$$A \cap A = A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup A = A, \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cup \varnothing = A$$

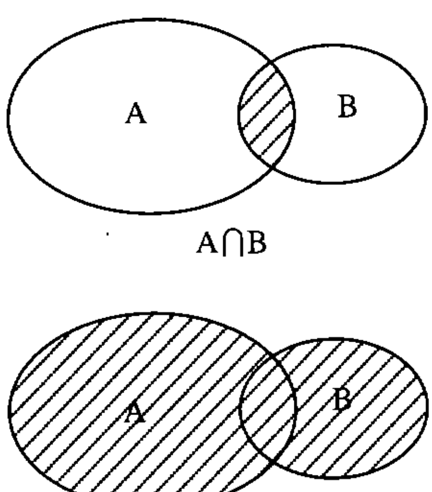
اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها را می‌توان بر حسب ناحیه‌های سایه خوردهٔ واقع در شکل ۱ درنظر گرفت؛ چنین شکل‌هایی را نمودارهای ون "Venn diagrams" می‌نامیم.

اگر مجموعهٔ سوم C‌ای را معرفی کنیم و ناحیهٔ مشترک $A \cup B$ و C را سایه بزنیم (شکل ۲). آشکار می‌شود که مجموعه‌های $(A \cup B) \cap C$ و $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ برابرند.

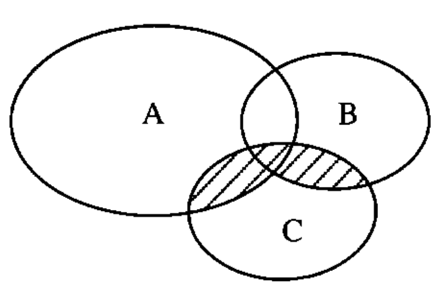
این مطلب را می‌توان با استدلالی که به شکل وابسته نباشد، تحقیق کرد. [شکل می‌تواند فریب‌دهنده باشد. اثبات تصویری موردبحث درصورتی که، مثلاً، $C \cap B = \varnothing$ یا $A \subseteq B$ باشد، چه اعتباری دارد؟

بسط تعریف اجتماع و اشتراک به گردایه‌هایی بزرگ‌تر، اما متناهی، حتی نامتناهی از مجموعه‌ها، بدون اشکال است. به‌عنوان مثال، اگر به‌ازای هر $n \in Z^+$

$$S_n = \left\{x : x \in R, -\frac{۱}{n} < x < \frac{۱}{n}\right\}$$



شکل ۱



شکل ۲ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

را تعریف کنیم، در این صورت، مجموعهٔ عنصرهای مشترک جمیع S_n ها با $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ تعریف می‌شود. در واقع $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ برابر $\{0\}$، مجموعهٔ شامل یک عدد حقیقی ۰ است. در این جا Sهای گوناگون را با عنصرهای مجموعهٔ Z^+ «شاخص‌دار» کرده‌ایم. می‌توانیم عنصرهای $\mathbf{R}^+$ (تمرین ۶ را ملاحظه کنید) یا درواقع عنصرهای هر مجموعه را نیز به‌عنوان مجموعهٔ شاخص "indexing set" به‌کار بریم.

طریق دیگر ساختن مجموعه‌ای جدید از دو مجموعهٔ قدیم A و B تعریف **تفاضل** "difference" آنهاست.

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

در این صورت، در حالت خاص، مجموعهٔ جمیع عددهای حقیقی نا صفر را با $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف بعدی توسط مختصات معرفی شده در صفحهٔ حقیقی مطرح شده است. نقطه‌های واقع در صفحهٔ حقیقی با جفت‌های عددهای حقیقی، و **برعکس**، چنان در نظر گرفته شده‌اند که اگر به نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب، مختصات (a_1, a_2) و (b_1, b_2) داده شوند، آن‌گاه P و Q وقتی و تنها وقتی منطبق می‌شوند که $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$. در حالت خاص (۱ , ۲) و (۲ , ۱) متناظر با نقطه‌هایی متمایزند. از آن‌جا که تنها تمایز بین (۱ , ۲) و (۲ , ۱) ترتیبی است که عددهای ۱ و ۲ طبق آن نوشته شده‌اند به جفت‌های عددهایی چنین به صورت **جفت‌های مرتب** اشاره کنیم.

به صورت عمومی‌تر تعریف زیر را به دست می‌دهیم.

تعریف. فرض می‌کنیم A و B مجموعه باشند. در این صورت $A \times B$ مجموعهٔ **جفت‌های مرتب** به صورت زیر است:

$$\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

$A \times B$ را حاصلضرب دکارتی A و B می‌نامیم. کلمهٔ «مرتب» مستلزم این است که برابری عنصرهای (a,b)، (c,d) ی واقع در $A \times B$، وقتی و تنها وقتی تعریف شود که $a = c$ و $b = d$ هردو برقرار باشند.

(i) مفهوم جفت مرتب را می‌توان به روشی صرفاً مجموعه - نظریه‌ای "set - theoretic" توصیف کرد.

(ii) به طریقی مشابه می‌توان $A \times B \times C$، مجموعهٔ **سه‌تایی‌های مرتب "ordered triples"** (a,b,c) را تعریف کرد که در آن $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$. شخص می‌تواند حتی حاصلضرب دکارتی گردایه‌ای از بی‌نهایت مجموعه را تشکیل دهد.

مثال. اگر $A = \{1, \pi\}$, $B = \{1, e, h\}$، آن‌گاه

$$A \times B = \{(1,1), (1,e), (1,h), (\pi,1), (\pi,e), (\pi,h)\}$$

توجه داشته باشید که $A \times B$ و $B \times A$ هر یک $(6 = 3 \times 2 = 2 \times 3)$ عنصر دارند؛ اما $A \times B \neq B \times A$ [چرا نیست؟]

آخرین سخن دربارهٔ تولید مجموعه‌ها "set prodution":

تعریف. فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای دلخواه باشد. با $\rho_{(A)}$ مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌های A را نمایش می‌دهیم. $\rho_{(A)}$ به مجموعهٔ توانی "power set" A موسوم است.

مثال اگر $A = \{a, b, \gamma\}$، آن‌گاه:

$$\rho_{(A)} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{\gamma\}, \{a, b\}, \{b, \gamma\}, \{\gamma, a\}, \{a, b, \gamma\}\}$$

توجه داشته باشد که A دارای سه عنصر است، در حالی که $\rho_{(A)}$، 2^3 عنصر دارد.

پانوشت ....

۱. جورج کانتور (۳ مارس ۱۸۴۵ - ۶ ژانویهٔ ۱۹۱۸).

۲. شاید شگفت‌انگیز باشد که تعریفی چنین ساده می‌تواند به تناقضاتی بینجامد. درواقع حتی کانتور نیز این موضوع را دریافت، اگرچه بهترین مثال در این مورد از آن ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی برتراند راسل است که p(x) را شرط $x \notin x$ در نظر گرفت. واضح است که $1 \notin 1$؛ $Z \notin Z$، بنابراین $R = \{x : x \notin x\}$ مطمئناً ناتهی است. در این صورت، شخص می‌تواند بپرسد: «آیا R متعلق به R است؟» اگر چنین باشد، در این صورت R به علت این که عضوی از R است، در شرط $(x \notin x)$ صدق می‌کند؛ در نتیجه $R \notin R$. اگر نباشد، آن گاه R در آزمون $x \notin x$ بازمی‌ماند و نتیجه می‌گیریم $R \in R$. به این ترتیب $R \in R$ وقتی که و تنها وقتی که $R \notin R$. اکسیومی سازی‌های گوناگونی از نظریهٔ مجموعه ها (به خصوص اکسیومی سازی تسرملو "zermelo")؛ برای اجتناب از ظهور چنین پارادوکس هایی طرح شده‌اند: جمیع مجموعه‌های تحت‌بررسی ما در طرح تسرملو پذیرفتنی اند).

۳. بعضی از ریاضیدانان برای اجتناب از اشتباه ممکن در کاربرد بعدی «A شامل a است» در توصیف $a \in A$ گنجیده در "included in" را ترجیح می‌دهند. این کاربرد دوگانگی «شامل»، بد، اما معمول است.

قضیه رول و قضیه مقدار میانگین

● میر شهرام صدر



میشل رول[۱] (۱۷۱۹ ـ ۱۶۵۲) ریاضی دان فرانسوی بیشتر ریاضیات را خودآموز فراگرفته بود. کار او در اصل حسابداری بود، ولی هرگاه وقتی پیدا می کرد روی جبر و معادلات دیوفانتی نیز کار می کرد.

ژاک اُزانام[۲] (۱۷۱۷ ـ ۱۶۴۰) یکی از ریاضی‌دانان فرانسوی معاصر با رول بود که مسائل مهمی را در زمینهٔ ریاضیات طرح کرده بود. بعد از این که رول راه‌حل دقیقی را برای یکی از مسائل ریاضیات تفریحی اُزانام ارائه کرد، دولت وقت از تحقیقات ریاضی او حمایت کرد و به همین سبب در سال ۱۶۹۰ رول کتاب آموزشی جبر[۳] را انتشار داد. این کتاب شامل مباحث تازه‌ای درباره‌ی دستگاه اعداد حقیقی و روش‌هایی برای یافتن ریشه‌های معادلات بود. رول سپس در سال ۱۶۹۱ قضیهٔ مشهور خود را منتشر کرد. صورت قضیهٔ او، که به قضیهٔ رول مشهور شده، این است که:

«بین هر دو صفر یک تابع چندجمله‌ای[۴]، نقطه‌ای وجود دارد که مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر است.» در این مقاله به بیان این قضیه و کاربردهای آن می‌پردازیم.

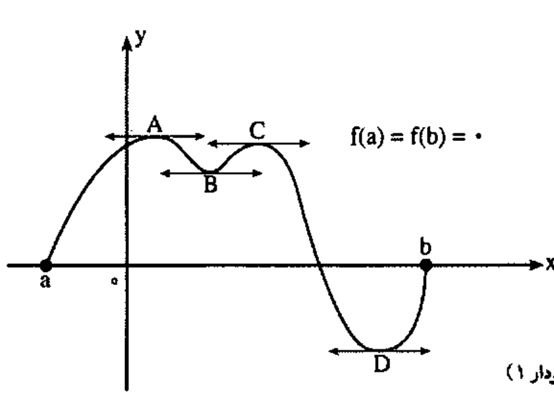
قضیه رول. فرض کنید تابعی مانند f دارای شرایط زیر باشد:

۱) روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد؛

۲) روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد؛

۳) $f(a) = f(b) = 0$.

در این صورت حداقل یک عدد مانند c واقع در بازه (a,b) وجود دارد، به‌طوری که $f'(c) = 0$



(نمودار ۱)

در نمودار ۱ چهار نقطه در بازه باز (a,b) وجود دارد که

مشتق در آن نقاط برابر با صفر است.

مثال. درستی قضیه رول را دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲$ روی فاصله $[۱,۲]$ بررسی کنید.

حل. تابع چند جمله‌ای f روی $[۱,۲]$ پیوسته است، همچنین روی بازه باز $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است. و داریم:

$f(۱)=f(۲)=۰$

در نتیجه نقطه‌ای مانند $c\in(۱,۲)$ وجود دارد، به طوری که $f'(c)=۰$. برای یافتن نقطه c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۴x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{۲+\sqrt{۷}}{۳}\in(۱,۲)\\[2mm] x=\dfrac{۲-\sqrt{۷}}{۳}\notin(۱,۲)\end{cases}$$

در نتیجه $c=\dfrac{۲+\sqrt{۷}}{۳}$.

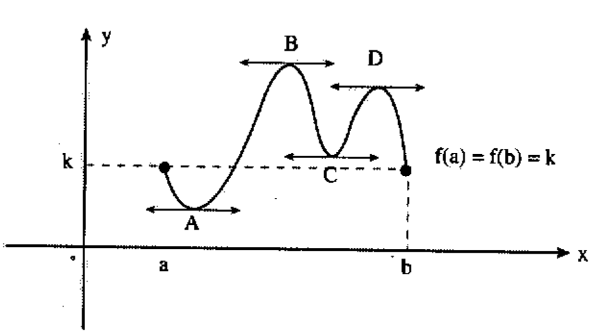
نتیجه قضیه رول. فرض کنید تابعی چون f دارای شرایط زیر باشد:

۱) روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد؛

۲) روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد؛

۳) $f(a)=f(b)=k$ که در آن k عددی ثابت است.

در این صورت حداقل یک عدد مانند c واقع در بازه (a,b) وجود دارد، به طوری که $f'(c)=۰$.



مثال. درستی نتیجه قضیه رول را دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}$ روی بازه $[\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}]$ تحقیق کنید.

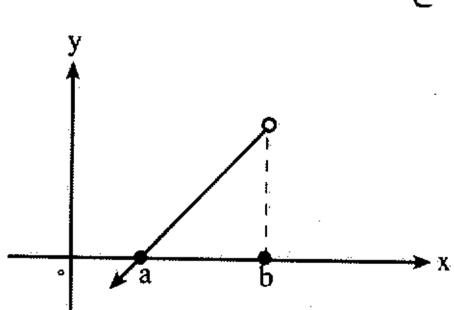
حل. $f(x)=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}$ و $f'(x)=\dfrac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}$ بنابراین $f'(x)$ به ازای همه مقادیر حقیقی x وجود دارد. پس f روی بازه بسته $[\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}]$ پیوسته و بر بازه $(\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳})$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{۳}{۴}$$

در این صورت حداقل یک عدد مانند $c\in(\dfrac{-\sqrt{۳}}{۳},\dfrac{\sqrt{۳}}{۳})$ وجود دارد، به طوری که $f'(c)=۰$.

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}=۰\Rightarrow x=۰\Rightarrow c=۰\in(\frac{-\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

تذکر. در قضیه رول شرط این که f در نقاط $x=a$ و $x=b$ پیوسته باشد، شرطی اساسی است. در شکل زیر، نمودار تابعی نشان داده شده است که بر بازه $[a,b)$ پیوسته است، ولی در b پیوسته نیست و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر می‌باشد. مقادیر تابع در نقاط انتهایی برابر با صفرند یعنی $f(a)=f(b)=۰$ با وجود این، روی نمودار هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که خط مماس بر آن موازی با محور xها باشد، یا مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر باشد.



با استفاده از قضیه رول، یکی از مهم‌ترین قضیه‌های بحث کاربرد مشتق، موسوم به قضیه مقدار میانگین یا قانون میانگین را بیان می‌کنیم.

قضیه مقدار میانگین

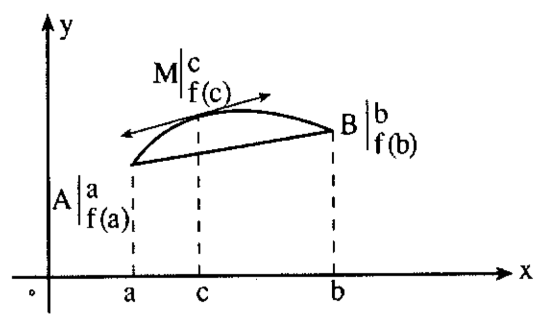
فرض کنید f تابعی با شرایط زیر باشد :

۱) روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد ؛

۲) روی بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد .

در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه باز (a,b) وجود دارد. به‌طوری که :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



به‌طوری که در شکل بالا ملاحظه می‌شود، کسر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ برابر $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ و مساوی ضریب زاویه وتر AB است . بنابراین حداقل یک نقطه به طول c در بازه باز (a,b) وجود دارد که خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه، موازی وتر AB است .

مثال. تابع با ضابطه $f(x)=x^۳+x^۲-x$ را در نظر بگیرید ؛ نشان دهید که تابع مفروض روی بازه $[-۲,۱]$ فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می‌کند. سپس مقادیر مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند .

حل. تابع f روی بازه $[-۲,۱]$ پیوسته و $f'(x)=۳x^۲+۲x-۱$ بر بازه باز $(-۲,۱)$ موجود است و داریم :

$$a=-۲\Rightarrow f(a)=f(-۲)=(-۲)^۳+(-۲)^۲-(-۲)=-۲$$
$$\Rightarrow f(a)=-۲;\quad A(-۲,-۲)$$

$$b=۱\Rightarrow f(b)=f(۱)=(۱)^۳+(۱)^۲-۱=۱\Rightarrow f(b)=۱;\quad B(۱,۱)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{-۲-۱}{-۲-۱}=۱$$

بنابراین نقطه‌ای مانند c واقع در بازه باز $(-۲,۱)$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=۱$:

$$f'(c)=۱\Rightarrow ۳c^۲+۲c-۱=۱\Rightarrow ۳c^۲+۲c-۲=۰$$

که از آن نتیجه می‌شود :

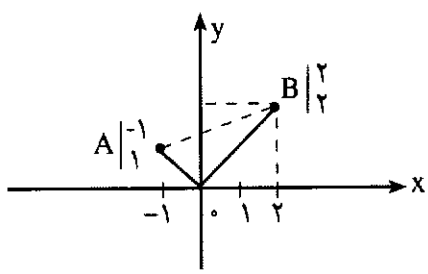
$$c_۱=\frac{-۱+\sqrt{۷}}{۳}\in(-۲,۱)$$ قابل قبول

و

$$c_۲=\frac{-۱-\sqrt{۷}}{۳}\in(-۲,۱)$$ قابل قبول

یعنی اگر از نقاطی با طول های $c_۱$ و $c_۲$ واقع بر منحنی، خطی برآن مماس کنیم، موازی با وتر AB است .

تذکر. در قضیه مقدار میانگین شرط این‌که f بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد، شرطی اساسی است. برای مثال، تابع با ضابطه $f(x)=|x|$ در بازه $[-۱,۲]$ پیوسته و در بازه $(-۱,۲)$ به جز در نقطه ۰ مشتق‌پذیر است .

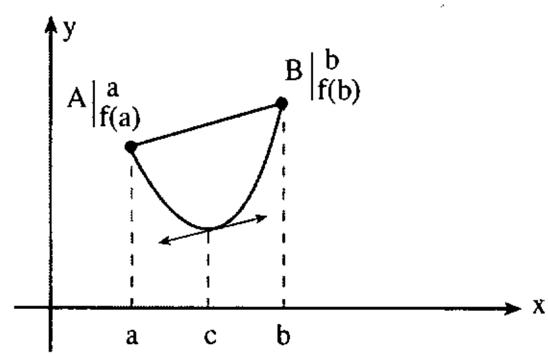


شیب وتر AB را به صورت زیر به دست می‌آوریم :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{۲-۱}{۲-(-۱)}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین شیب وتر AB برابر $\frac{۱}{۳}$ است، اما با توجه به شکل بالا در هیچ‌جا مشتق برابر $\frac{۱}{۳}$ نیست، زیرا همواره شیب OB برابر ۱ و شیب OA برابر ۱- است. درنتیجه اگر شرط مشتق‌پذیری تابع f در بازه باز (a,b) در قضیه مقدار میانگین برقرار نباشد، آن‌گاه حکم قضیه درست نخواهد بود .

مثال. ثابت کنید روی نمودار هر تابع درجه دوم، وتر واصل بین نقاط $x=a$ و $x=b$ واقع بر منحنی، موازی خط مماس بر منحنی در نقطه میانی $x=\frac{a+b}{۲}$ است .



حل. تابع درجه دوم با ضابطهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(m \neq 0) f(x) = mx^2 + nx + h$$

چون f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر است، بنابراین شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. درنتیجه حداقل نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه موازی با وتر AB است. اکنون طول c را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2mx + n$$

$$x = a \Rightarrow f(a) = ma^2 + na + h$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = mb^2 + nb + h$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{mb^2 + nb + h - ma^2 - na - h}{b - a} = \frac{m(b^2 - a^2) + n(b - a)}{b - a}$$

$$= \frac{(b - a)[m(b + a) + n]}{b - a} = m(b + a) + n$$

از $f'(c) = m(b + a) + n$ نتیجه می‌شود:

$$2mc + n = m(b + a) + n \Rightarrow c = \frac{a + b}{2}$$

می‌دانیم اگر c یک عدد حقیقی باشد، مشتق تابع ثابت با ضابطه $f(x) = c$، برابر صفر است. اکنون به کمک قضیه مقدار میانگین می‌توان ثابت کرد که اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) = 0$، آنگاه f روی بازه (a,b) ثابت است (چرا؟). در این صورت به نتیجه مطلوب زیر می‌رسیم:

نتیجه. اگر f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، مشتق f روی بازه (a,b) صفر است اگر و فقط اگر f تابع ثابت باشد.

مسائل

درستی قضیهٔ رول را درباره توابع با ضابطه‌های زیر روی بازه داده شده تحقیق کنید.

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6;\ x \in [2,3]$

2) $f(x) = \sin 2x;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

حل:

۱. تابع چندجمله‌ای f روی $[2,3]$ پیوسته و همچنین روی بازه باز $(2,3)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f(2) = f(3) = 0$$

درنتیجه نقطه‌ای مانند $c \in (2,3)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $f'(c) = 0$. برای یافتن c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \notin (2,3) \\ x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \in (2,3) \end{cases}$$

درنتیجه $c = \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$.

۲. تابع با ضابطه $f(x) = \sin 2x$ روی بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته و همچنین روی بازه باز $(0, \frac{\pi}{2})$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

درنتیجه نقطه‌ای مانند $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ وجود دارد به‌طوری که $f'(c) = 0$. برای یافتن c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

درنتیجه: $c=\frac{\pi}{۴}\in(۰,\frac{\pi}{۲})$.

۳. فرض کنیم $f(x)=x^۴-۲x^۳+۲x^۲-x$. ثابت کنید معادله $۴x^۳-۶x^۲+۴x-۱=۰$ در بازه $(۰,۱)$ حداقل یک ریشه دارد.

حل. تابع چندجمله‌ای f بر بازه $[۰,۱]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر است و $f(۰)=f(۱)=۰$.

پس بنا بر قضیه رول حداقل یک عدد مانند $c\in(۰,۱)$ وجود دارد که: $f'(c)=۰$. درنتیجه داریم:

$$f'(x)=۴x^۳-۶x^۲+۴x-۱$$

$$f'(c)=۰\Rightarrow ۴c^۳-۶c^۲+۴c-۱=۰ \quad (۱)$$

با توجه به معادله ۱، نتیجه می‌شود که حداقل یک عدد مانند $c\in(۰,۱)$ وجود دارد که ریشه معادله $۴x^۳-۶x^۲+۴x-۱=۰$ است.

۴. ثابت کنید اگر معادله $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x=۰$ یک ریشه مثبت $x_۰$ داشته باشد، آنگاه معادله $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1=۰$ ریشه مثبتی کوچک‌تر از $x_۰$ دارد.

حل. تابع با ضابطه $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x$ بر بازه $[۰,x_۰]$ پیوسته $(x_۰>۰)$ و بر بازه $(۰,x_۰)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$f(۰)=۰;\ f(x_۰)=۰$ (چون $x_۰$ ریشه معادله است)

بنابراین داریم:

$$f(۰)=f(x_۰)=۰$$

پس بنابر قضیه رول حداقل یک عدد مانند $c\in(۰,x_۰)$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=۰$ ، درنتیجه:

$$na_nc^{n-1}+(n-1)a_{n-1}c^{n-2}+\cdots+a_1=۰ \quad (۲)$$

با توجه به معادله ۲ نتیجه می‌شود که حداقل یک عدد مثبت مانند $c\in(۰,x_۰)$ $(۰<c<x_۰)$ وجود دارد که ریشه معادله $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1=۰$ است.

تابع‌هایی با ضابطه‌های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید که تابع‌های مفروض روی بازه داده شده، فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می‌کند، سپس مقادیر مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

۵) $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}-۱;\ x\in[۰,۱]$

۶) $f(x)=\sin x;\ x\in[۰,\frac{\pi}{۲}]$

حل:

۵. تابع f روی بازه $[۰,۱]$ پیوسته و بازه $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$a=۰\Rightarrow f(a)=f(۰)=-۱;\ A\begin{vmatrix}۰\\-۱\end{vmatrix}$$

$$b=۱\Rightarrow f(b)=f(۱)=۰;\ B\begin{vmatrix}۱\\۰\end{vmatrix}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{۰-(-۱)}{۱-۰}=۱$$

بنابراین نقطه‌ای مانند $c\in(۰,۱)$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=۱$:

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}};\ f'(c)=۱\Rightarrow\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{c}}=۱$$

$$\Rightarrow c=\frac{۸}{۲۷}\in(۰,۱)$$

۶. چون تابع با ضابطه $f(x)=\sin x$ بر بازه $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ پیوسته و بر بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$a=۰\Rightarrow f(a)=f(۰)=۰;\ A(۰,۰)$$

$$b=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f(b)=f(\frac{\pi}{۲})=۱;\ B(\frac{\pi}{۲},۱)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{۱-۰}{\frac{\pi}{۲}-۰}=\frac{۲}{\pi}$$

بنابراین نقطه‌ای مانند $c\in(۰,\frac{\pi}{۲})$ وجود دارد، به‌طوری که $f'(c)=\frac{۲}{\pi}$.

$$f'(x)=\cos x;\ f'(c)=\frac{۲}{\pi}\Rightarrow\cos c=\frac{۲}{\pi}$$

$$\Rightarrow c=\mathrm{Arc}\cos\frac{۲}{\pi}\in(۰,\frac{\pi}{۲})$$

۷. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نابرابری $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$ را ثابت کنید.

حل. تابع با ضابطه $f(x)=\sin x$ را بر بازه $[a,b]$ در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که f بر $[a,b]$ پیوسته و بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر است و داریم:

$$x=a \Rightarrow f(a)=\sin a;\quad A\left|\begin{matrix}a\\ f(a)\end{matrix}\right.$$

$$x=b \Rightarrow f(b)=\sin b;\quad B\left|\begin{matrix}b\\ f(b)\end{matrix}\right.$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\sin b-\sin a}{b-a}$$

بنابراین نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد، به‌طوری که:

$$\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=f'(c)$$

$$f'(x)=\cos x; \frac{\sin b-\sin a}{b-a}=\cos c$$

از طرفی چون همواره $|\cos c|\le 1$ بنابراین:

$$\left|\frac{\sin b-\sin a}{b-a}\right|\le 1$$

درنتیجه داریم:

$$|\sin b-\sin a|\le|b-a|$$

۸. فرض کنید تابعی چون f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و به‌ازای تمام xهای در (a,b)، $f'(x)=1$. ثابت کنید به ازای هر $x\in[a,b]$، داریم: $f(x)=x-a+f(a)$.

حل. فرض می‌کنیم $x\in[a,b]$ $(a\le x\le b)$، چون تابع f روی $[a,b]$ پیوسته است بنابراین بر بازه $[a,x]$ پیوسته است و چون برای هر $x\in(a,b)$ داریم $f'(x)=1$، بنابراین تابع f بر بازه (a,x) مشتق‌پذیر است، درنتیجه لااقل یک عدد مانند $c\in(a,x)$ موجود است، به طوری که:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

برای هر $c\in(a,x)$، داریم: $f'(c)=1$، درنتیجه:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=1 \Rightarrow f(x)=x-a+f(a)$$

مسائل تکمیلی

درستی قضیهٔ رول را درباره تابع‌ها با ضابطه‌های زیر، روی بازه داده شده تحقیق کنید.

۱) $f(x)=x^2-4x+3;\ x\in[1,3]$

۲) $f(x)=3\cos^2 x;\ x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

۳) $f(x)=4x^3-9x;\ x\in[0,\frac{3}{2}]$

۴. به کمک قضیهٔ رول ثابت کنید که معادلهٔ $x^3+2x+c=0$، که در آن c یک عدد ثابت دلخواه است، نمی‌تواند بیش از یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

تابع‌هایی با ضابطه‌های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید تابع‌های مفروض روی بازه‌های داده شده، فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می‌کند، سپس مقادیر مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

۵) $f(x)=x^3+x^2-x;\ x\in[-2,1]$

۶) $f(x)=2\cos x;\ x\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$

۷) $f(x)=\frac{x^2+4x}{x-7};\ x\in[2,6]$

برای هریک از تمرین‌های زیر، در بازه داده شده هیچ عددی مانند c وجود ندارد که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند. در هر تمرین، تعیین کنید کدام قسمت از فرض قضیه مقدار میانگین برقرار نیست.

۸) $f(x)=\frac{4}{(x-3)^2};\ x\in[1,6]$

۹) $f(x)=3(x-4)^{\frac{2}{3}};\ x\in[-4,5]$

۱۰) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & x<3\\ 15-2x & x\ge 3\end{cases};\ x\in[-1,5]$

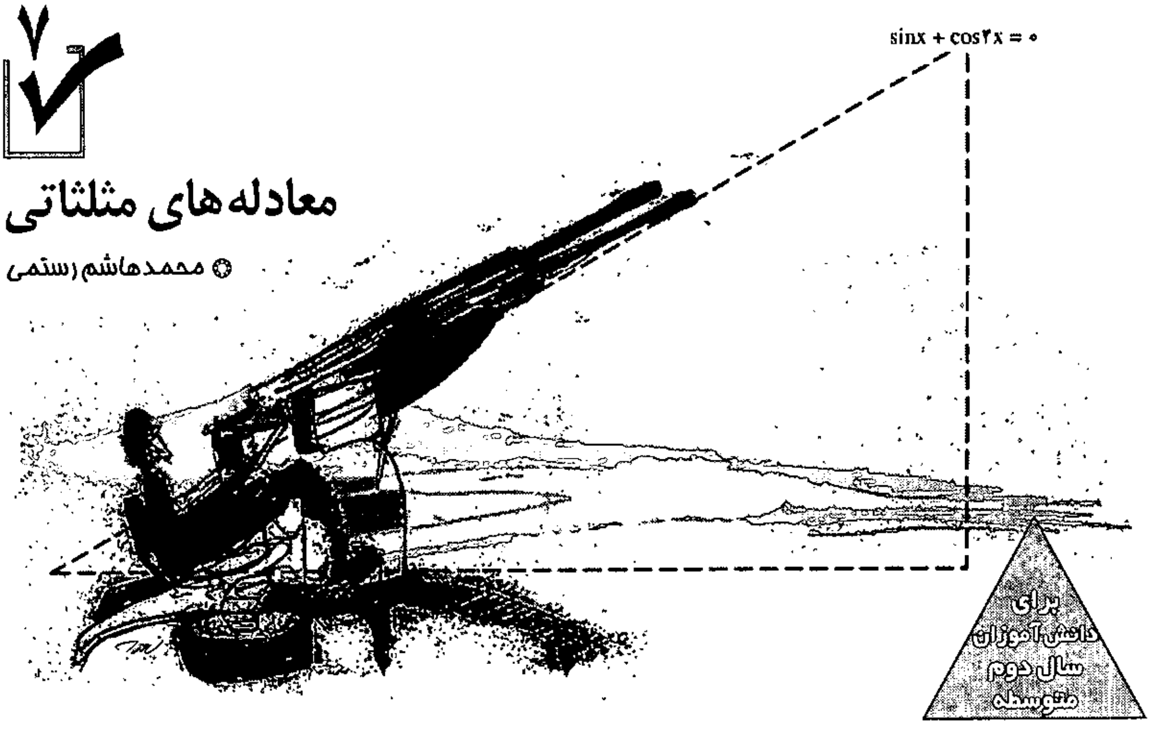
زیرنویس

1. Michel Rolle
2. Jacques ozanam
3. Traité d'algere
4. zeros of a ploynomial function

۷

معادله های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی



حل معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی

هر معادلهٔ مثلثاتی غیر از معادله های چهارگانهٔ $\sin X = a \ , \ (-1 \le a \le 1)$ ؛ $\cos X = b \ , \ (-1 \le b \le 1)$ ؛ $tgX = c \ , \ (c \in \mathbb{R})$ و $\cot gX = d \ , \ (d \in \mathbb{R})$ را معادلهٔ غیرسادهٔ مثلثاتی می‌نامیم؛ مانند:

$\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ و $\sin 2x + 2\sin x = 0$

$\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$ و $tg2x + 2tgx = 0$

$\sin^2 x - \sin x \cos x = 2\cos^2 x$ و $\sin x + 2\cos x = 1$

$x + \sin x = 0$

معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی را به این دو دستهٔ کلی می‌توان تقسیم کرد:

دستهٔ اول. معادله هایی که فرم یا صورت مشخصی ندارند و راه‌حل آن‌ها نیز مشخص نیست. این معادله ها را معادله های مثلثاتی غیرکلاسیک می‌نامند.

دسته دوم. معادله هایی که صورت مشخصی دارند و راه‌حل آن‌ها نیز مشخص است. این معادله ها را معادله های مثلثاتی کلاسیک می‌نامند.

نکتهٔ بسیار مهم آن است که برای حل هر معادلهٔ غیرسادهٔ مثلثاتی اعم از کلاسیک یا غیرکلاسیک، باید آن را به معادله یا معادله های سادهٔ مثلثاتی تبدیل کنیم و سپس این معادله های سادهٔ مثلثاتی را حل کنیم.

نکته. حل معادله های مثلثاتی که شامل کمان مجهول هستند، مانند معادلهٔ $x + 2\sin x = 0$، جداگانه بررسی خواهد شد.

حل معادله‌های مثلثاتی دستهٔ اول

با وجود آن که این معادله های غیرسادهٔ مثلثاتی، صورت و

راه‌حل مشخصی ندارند، امّا می‌توان آن‌ها را به گونه‌ای، به صورت‌های زیر دسته‌بندی کرد:

۱. معادله‌هایی که به صورت $A \times B \times C \times \dots = ۰$ یا قابل تبدیل به این صورت هستند و در آن‌ها $A = ۰$، $B = ۰$، $C = ۰$ و ...است، معادله‌های سادهٔ مثلثاتی‌اند؛ مانند معادلهٔ مثلثاتی

$(۳tgx - \sqrt{۳})(\sin x + ۱)(۲\cos x - ۱) = ۰$

برای حل این معادله‌ها، معادله‌های سادهٔ مثلثاتی $A = ۰$، $B = ۰$، $C = ۰$ و... را حل می‌کنیم. مجموعهٔ جواب‌های کلی این معادله‌های ساده، جواب‌های کلی معادله‌ی داده شده‌اند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال۱. معادلهٔ $(۲\sin x - ۱)(\cos x + ۱)(tgx - \sqrt{۳}) = ۰$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \text{ و } x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \text{ یا } x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}؛$$

$$\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos\pi \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi؛$$

$$tgx - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow tgx = \sqrt{۳} \Rightarrow tgx = tg\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

پس جواب‌های معادلهٔ داده شده عبارت‌اند از:

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad \text{و} \quad x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$$

$$x = ۲k\pi + \pi \quad \text{و} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

مثال۲. معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin(\frac{x}{۲} - \frac{\pi}{۴})\cos\frac{۲x}{۳}(۱ + \cot gx) = ۰$$

حل: داریم:

$$\sin(\frac{x}{۲} - \frac{\pi}{۴}) = ۰ \Rightarrow \frac{x}{۲} - \frac{\pi}{۴} = k\pi \Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}؛$$

$$\cos\frac{۲x}{۳} = ۰ \Rightarrow \frac{۲x}{۳} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۴}؛$$

$$۱ + \cot gx = ۰ \Rightarrow \cot gx = -۱ \Rightarrow \cot gx = \cot g(\frac{-\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ داده شده عبارت‌اند از:

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \text{ و } x = \frac{۳k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۴} \text{ و } x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

مثال۳. معادلهٔ $\sin^۲ x + \sin x\cos x = ۰$ را حل کنید.

حل: به کمک فاکتورگیری از عامل مشترک، معادلهٔ داده شده را به صورت $A \times B = ۰$ تبدیل و سپس معادله‌های سادهٔ مثلثاتی $A = ۰$ و $B = ۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$\sin^۲ x + \sin x\cos x = ۰ \Rightarrow \sin x(\sin x + \cos x) = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x + \cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x = -\cos x = -\sin(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin(x - \frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + x - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \times x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad \text{معادلهٔ غیرممکن}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \pi - (x - \frac{\pi}{۲}) \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$$

پس جواب‌های معادلهٔ داده شده، عبارت‌اند از:

$$x = k\pi \text{ و } x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$$

نکته: معادله‌ی $\sin x + \cos x = ۰$ به روش‌های دیگری نیز قابل حل است.

مثال۴. معادلهٔ $\sin ۳x - \sin ۲x + \sin x = ۰$ را حل کنید.

حل: نسبت‌های مثلثاتی یکسان و زاویه‌های داده شده،

تشکیل تصاعد حسابی داده‌اند: $2x = \frac{3x + x}{2}$؛ بنابراین با استفاده از دستور تبدیل مجموع به حاصل ضرب، $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$، داریم:

$$\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 3x + \sin x - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{3x + x}{2}\cos\frac{3x - x}{2} - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos x - \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ؛$$

$$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

پس جواب‌های معادلهٔ داده شده، عبارتند از:

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{و} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثال ۵. معادلهٔ $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: $\cos 2x$ را بر حسب $\sin x$ می‌نویسیم (با استفاده از دستور $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$). داریم:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(-2\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi ؛$$

$$-2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

آزمون ۱. معادلهٔ زیر در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

$$(2\sin x - 1)(4\sin x - 5)(5\sin x - 9) = 0$$

۱) ۳ ۲) ۶

۳) صفر ۴) ۲

کنکور دانشگاه آزاد ۱۳۸۱

حل: داریم:

$$(2\sin x - 1)(4\sin x - 5)(5\sin x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{یا} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$4\sin x - 5 = 0 \Rightarrow 4\sin x = 5 \Rightarrow \sin x = \frac{5}{4} > 1 \quad \text{جواب ندارد}$$

$$5\sin x - 9 = 0 \Rightarrow 5\sin x = 9 \Rightarrow \sin x = \frac{9}{5} > 1 \quad \text{جواب ندارد}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادلهٔ داده شده، $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ است.

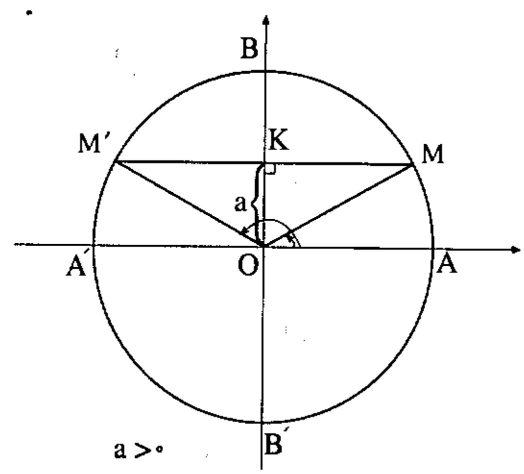
اکنون جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را تعیین می‌کنیم:

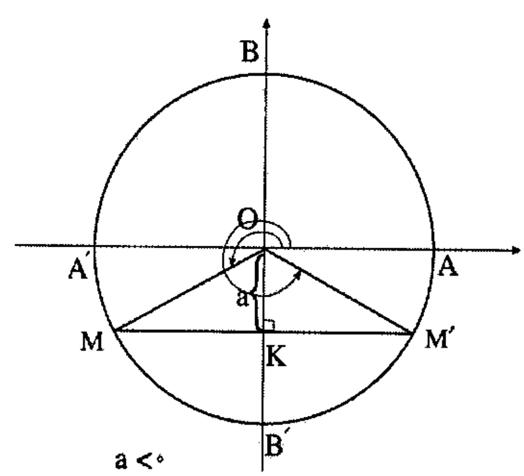
k	x
-1	$\frac{-11\pi}{6} < 0$, $\frac{-7\pi}{6} < 0$
0	$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ جواب
1	$2\pi + \frac{\pi}{6} > 2\pi$, $2\pi + \frac{5\pi}{6} > 2\pi$

همان‌طوری که دیده می‌شود، معادله تنها دو جواب در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارد؛ بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

نکته. معادله داده شده به صورت $A \times B \times C = 0$ است، که در آن $A = 0$ و $B = 0$ و $C = 0$ معادله‌های سادهٔ مثلثاتی‌اند. از بین این معادله‌ها، که $2\sin x - 1 = 0$ ، $4\sin x - 5 = 0$ و $5\sin x - 9 = 0$ هستند، تنها معادلهٔ $2\sin x - 1 = 0$ یا $\sin x = \frac{1}{2}$ جواب دارد. از طرفی می‌دانیم که معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\sin x = a$ $(-1 < a < +1)$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دو جواب خصوصی دارد؛ زیرا اگر روی محور سینوس‌ها $\overline{ok} = a$ را جدا کنیم و از k خطی موازی محور کسینوس‌ها رسم نماییم،

دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ M و ´M قطع می‌کند، که کمان‌های $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ جواب‌های مسأله‌اند؛ یعنی کمان‌هایی هستند که سینوس آن‌ها عدد a است.



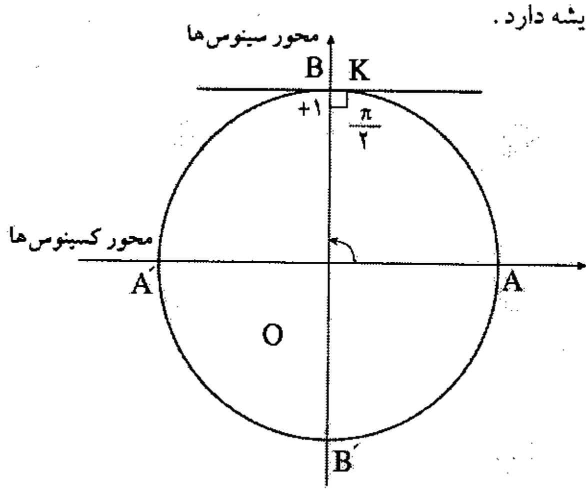


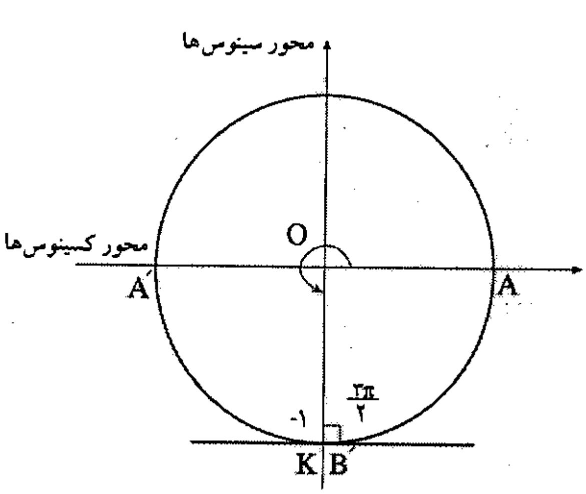
حال اگر $a > 0$ باشد، انتهای کمان‌ها در ربع اول و دوم دایرهٔ مثلثاتی است؛ یعنی کمان‌های جواب مسأله به بازهٔ $[0,\pi]$ تعلق دارند و اگر $a < 0$ باشد، انتهای کمان‌های جواب مسأله در ربع‌های سوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند؛ یعنی کمان‌های جواب مسأله به بازهٔ $[\pi,2\pi]$ یا $[-\pi,0]$ تعلق دارند.

بنابراین بدون حل کردن معادلهٔ $\sin x = \frac{1}{2}$ می‌توان گفت که این معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو ریشه دارد.

در حالت خاص

الف. اگر $a = 1$؛ یعنی $\sin x = 1$ باشد، نقطهٔ k بر نقطهٔ B انتهای کمان $+\frac{\pi}{2}$ منطبق می‌شود و نقطه‌های M و ´M نیز بر این نقطه منطبق می‌شوند؛ یعنی معادلهٔ $\sin x = 1$ ریشهٔ مضاعف $x = \frac{\pi}{2}$ دارد. پس این معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ تنها یک ریشه دارد.





ب. اگر $a=-۱$، یعنی $\sin x=-۱$ باشد، نقطهٔ k بر نقطهٔ B' انتهای کمان $\frac{۳\pi}{۲}$ منطبق می‌شود و نقطه‌های M و M' نیز بر این نقطه منطبق می‌شوند؛ یعنی معادلهٔ $\sin x=-۱$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=\frac{۳\pi}{۲}$ است. پس این معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تنها یک ریشه دارد.

آزمون ۲. معادلهٔ $(۲\sin x+۱)(۳\sin x+۲)=۰$ در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳   ۲) ۲

۳) ۴   ۴) ۱

کنکور پزشکی دانشگاه آزاد ـ ۱۳۸۳

حل: داریم:

$$(۲\sin x+۱)(۳\sin x+۲)=۰\Rightarrow$$

$$۲\sin x+۱=۰\Rightarrow ۲\sin x=-۱\Rightarrow \sin x=-\frac{۱}{۲}$$

$$۳\sin x+۲=۰\Rightarrow ۳\sin x=-۲\Rightarrow \sin x=-\frac{۲}{۳}$$

چون $-۱<-\frac{۱}{۲}<۰$ و $-۱<-\frac{۲}{۳}<۰$ است، پس هریک از این دو معادله در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ دو جواب خصوصی متمایز دارند، پس معادلهٔ داده شده روی‌هم چهار جواب در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ دارد؛ بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

آزمون ۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی زیر کدام است؟

$$\sin ۴x-\sin ۲x=\sin(\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

۱) $\frac{k\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۳}$

۳) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری سال ۱۳۸۱

حل: می‌دانیم که:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+۳x)=\cos ۳x,$$

$$\sin ۴x-\sin ۲x=۲\sin x\cos ۳x$$

با استفاده از دستور زیر داریم:

$$\sin p-\sin q=۲\sin\frac{p-q}{۲}\cos\frac{p+q}{۲}$$

$$۲\sin x\cos ۳x=\cos ۳x\Rightarrow ۲\sin x\cos ۳x-\cos ۳x=۰$$

$$\Rightarrow \cos ۳x(۲\sin x-۱)=۰$$

معادله به صورت حاصل‌ضرب دو عامل مساوی صفر است، پس خواهیم داشت:

$$\cos ۳x=۰\Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\quad (۱)$$

و

$$۲\sin x-۱=۰\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\quad (۲)$$

$$x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \text{ یا } x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\ (۳)$$

جواب کلی (۱) شامل جواب‌های کلی (۲) و (۳) نیز هست؛ بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

آزمون ۴. معادلهٔ $tgx\,tg۲x=\sin x\sin ۲x$ در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴}\right]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱   ۲) ۴

۳) ۲   ۴) صفر

کنکور دانشگاه آزاد ـ ۱۳۸۱

حل. با توجه به این که tgx به ازای ریشه‌های معادلهٔ $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $tg۲x$ به ازای ریشه‌های معادلهٔ $۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ یا $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ تعریف نشده‌اند، داریم:

$$tgx\,tg۲x=\sin x\sin ۲x\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\sin x\sin ۲x$$

$$\Rightarrow \sin x\sin ۲x=\sin x\sin ۲x\cos x\cos ۲x$$

$$\sin x\sin ۲x-\sin x\sin ۲x\cos x\cos ۲x=۰\Rightarrow$$

$$\sin x\sin ۲x(۱-\cos x\cos ۲x)=۰\Rightarrow$$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

$1 - \cos x \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos x \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos x = 1,\ \cos 2x = 1$ یا $\cos x = -1,\ \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos x = 1 = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos 2x = 1 = \cos 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi,$

$\cos x = -1 = \cos \pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi,$

$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \pi \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

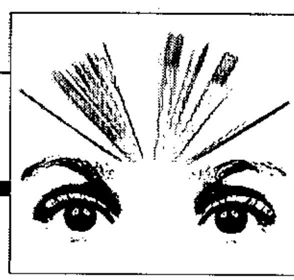
جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2}$ شامل بقیهٔ جواب‌های کلی نیز هست؛ اما این جواب کلی در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ چهار ریشهٔ $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π دارد، که دو ریشهٔ آن، یعنی $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ قابل قبول نیستند (در دامنهٔ تعریف تابع قرار ندارند)، پس تنها دو ریشهٔ قابل قبول $x = \pi$ و $2\pi = \pi$ در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ وجود دارد؛ بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته. معادلهٔ $\cos x \cos 2x = 1$ در صورتی جواب دارد که $\cos x = 1$ و $\cos 2x = 1$ و یا $\cos x = -1$ و $\cos 2x = -1$؛ زیرا اگر قدرمطلق یکی از این دو مقدار کوچک‌تر از ۱ باشد، قدر مطلق دیگری باید بزرگ‌تر از ۱ باشد، که این امکان‌پذیر نیست؛ زیرا مقدارهای $\cos x$ و $\cos 2x$ هر دو به بازهٔ $[-1,1]$ تعلق دارند.

معادلهٔ $\cos x \cos 2x = 1$ را به روش‌های دیگری هم می‌توان حل کرد که بعداً خواهیم دید.

ادامه حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی در شماره‌های آینده مجله خواهد آمد.

معماهای فکری و منطقی



BJane، Janice، Jack، Jasper، و Jem نام‌های پنج یار دبیرستانی است. نام خانوادگی آنان، نه لزوماً به این ترتیب، عبارت است از: Carter , Carver , Clark , Clayton , Cramer

مادر Jasper مرده است.

آقا و خانم Clayton به احترام یک عمهٔ بسیار ثروتمند، هنگامی که ازدواج کردند، قرار گذاشتند اگر صاحب دختری شدند، نام او را Janice بگذارند.

پدر و مادر Jane هیچ‌گاه پدر و مادر Jack را ملاقات نکرده‌اند.

بچه‌های Cramer و Carter در چندین تیم قهرمانی مدرسه هم تیمی‌اند.

Cramer زمانی که شنید Carver قصد دارد در شب جشن اولیا و دانش‌آموزان مدرسه به خارج شهر برود، به خانم Carver تلفن و پیشنهاد کرد از پسر او نگهداری کند؛ اما پدر Jack قبلاً از او خواسته بود برود.

دو خانوادهٔ Clark و Carter، که دوستان بسیار خوب یکدیگرند، زمانی که بچه‌هاشان به نامزدی یکدیگر درآمدند، خوشحال شدند.

نام خانوادگی هر یک چیست؟

رابطه‌های هم‌ارزی - کلاس‌های هم‌ارزی

یکی از مفاهیمی که بسیاری از دانش‌آموزان در شناخت آن دچار مشکل هستند، مفهوم کلاس‌های هم‌ارزی است. در این‌جا سعی می‌کنیم این مفهوم را با زبانی ساده برای شما روشن کنیم. ما در این شماره، مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی را به‌طور دقیق شناسایی می‌کنیم و در شمارهٔ آینده به مفهوم کلاس‌های هم‌ارزی می‌پردازیم.

تعریف رابطه: هر زیر مجموعه از حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B را یک رابطه از A روی B (یا از A در B) می‌نامیم. به عنوان مثال، اگر $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$،

$$A \times B = \{(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۱),(b,۲),(b,۳),(c,۱),(c,۲),(c,۳)\}$$

و چون $A \times B$، ۹ عضو دارد، بنابراین $۵۱۲ = ۲^۹$ زیرمجموعه دارد. به هریک از این ۵۱۲ زیرمجموعه، یک رابطه از A به B می‌گوییم. به‌عنوان مثال، رابطه‌های $R_۱$ و $R_۲$ و $R_۳$ را در نظر بگیرید:

$R_۱ = \{(a,۱),(b,۱)\}$ و $R_۲ = \{(a,۲)\}$ و

$R_۳ = \{(b,۱),(b,۲),(c,۱),(c,۳)\}$

همچنین رابطهٔ R را که از مجموعهٔ A به خودش تعریف شده باشد، رابطه‌ای روی A می‌نامیم. در حالت کلی رابطهٔ R از A به B را با نماد $R: A \longrightarrow B$ نمایش می‌دهیم. در مثال بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} R_۴ : A \longrightarrow B \\ R_۴ = \{(a,۱),(b,۱),(c,۱)\} \end{cases}$$ و

$$\begin{cases} R_۵ : A \longrightarrow A \\ R_۵ = \{(a,a),(a,b),(b,c)\} \end{cases}$$

سؤال: اگر مجموعهٔ A، n عضو داشته باشد، چند رابطه



برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

۷

هوشنگ شرقی

روی A می‌توان نوشت؟ اگر مجموعهٔ B، m عضو داشته باشد، چند رابطه از A در B می‌توان نوشت؟

انواع رابطه‌ها

۱. رابطهٔ انعکاسی

رابطهٔ R روی مجموعهٔ A را انعکاسی می‌نامیم؛ هرگاه:

برای هر $x \in A \Rightarrow xRx((x,x) \in R)$

به زبان ساده R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعهٔ A است؛ هرگاه برای هر عضو x از A، زوج مرتب (x,x) در رابطهٔ R وجود داشته باشد.

مثال. رابطه‌های $R_۱$ و $R_۲$ در مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده‌اند:

$R_۱ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۴,۴)\}$

$R_۲ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۴,۳),(۴,۴)\}$

کدام‌یک از روابط فوق انعکاسی هستند؟

جواب: $R_۱$ انعکاسی نیست؛ زیرا شامل (۳ و ۳) نیست؛ ولی $R_۲$ انعکاسی است.

نتیجه: هر رابطه‌ای که روی مجموعهٔ A از مثال بالا تعریف شده و انعکاسی باشد، باید حتماً شامل چهار زوج مرتب (۱ و ۱) و (۲ و ۲) و (۳ و ۳) و (۴ و ۴) باشد و بدیهی است که می‌توانند شامل هر تعداد زوج مرتب دیگر هم باشد.

سؤال: در مجموعهٔ A (از مثال قبل) چند رابطهٔ انعکاسی می‌توان نوشت؟

جواب: چون A، ۴ عضو دارد، پس $A^۲$، ۱۶ عضو (زوج مرتب) دارد. چهار تا از این زوج‌های مرتب، حتماً باید در رابطه‌های انعکاسی باشند. هریک از ۱۲ زوج مرتب دیگر؛ دو وضع دارند، می‌توانند در رابطهٔ انعکاسی باشند یا نباشند.



بنابراین ترکیب آنها 2^{12} حالت مختلف دارد و 2^{12} رابطه انعکاسی روی A می‌توان نوشت.

تمرین. در حالت کلی، روی یک مجموعهٔ n عضوی چند رابطهٔ انعکاسی می‌توان نوشت؟

مثال. آیا رابطهٔ زیر که در مجموعهٔ اعداد حقیقی نوشته شده، انعکاسی است؟

$$\begin{cases} R: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xRy \Leftrightarrow x + y \leq 2 \end{cases}$$

حل: فرض کنیم R انعکاسی باشد، در این صورت داریم:

$$xRx \Rightarrow x + x \leq 2 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

ولی نابرابری فوق برای همهٔ اعضای $\mathbb{R}$ برقرار نیست. به عنوان مثال، $2R2$؛ زیرا $2 + 2 > 2$ و درنتیجه R انعکاسی نیست. اما با توجه به شرط فوق، اگر دامنه و برد تعریف رابطه را از $\mathbb{R}$ به بازهٔ $(-\infty,1]$ محدود کنیم، یعنی رابطهٔ زیر:

$$\begin{cases} R: (-\infty,1] \to (-\infty,1] \\ xRy \Leftrightarrow x + y \leq 2 \end{cases}$$

یک رابطهٔ انعکاسی خواهد بود.

تمرین ۱. کدام یک از روابط زیر، خاصیت انعکاسی دارند؟

الف) $\begin{cases} R: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xRy \Leftrightarrow xy \geq 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} R: Z \to Z \\ xRy \Leftrightarrow x|y \end{cases}$ ج) $\begin{cases} R: N \to N \\ xRy \Leftrightarrow x + y \leq xy \end{cases}$

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، خاصیت انعکاسی دارد؟

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که مفهوم این رابطه یعنی چه؟ اگر این رابطه را با نماد ریاضی نمایش دهیم، با فرض آن‌که A مجموعه خطوط صفحه باشد، می‌نویسیم:

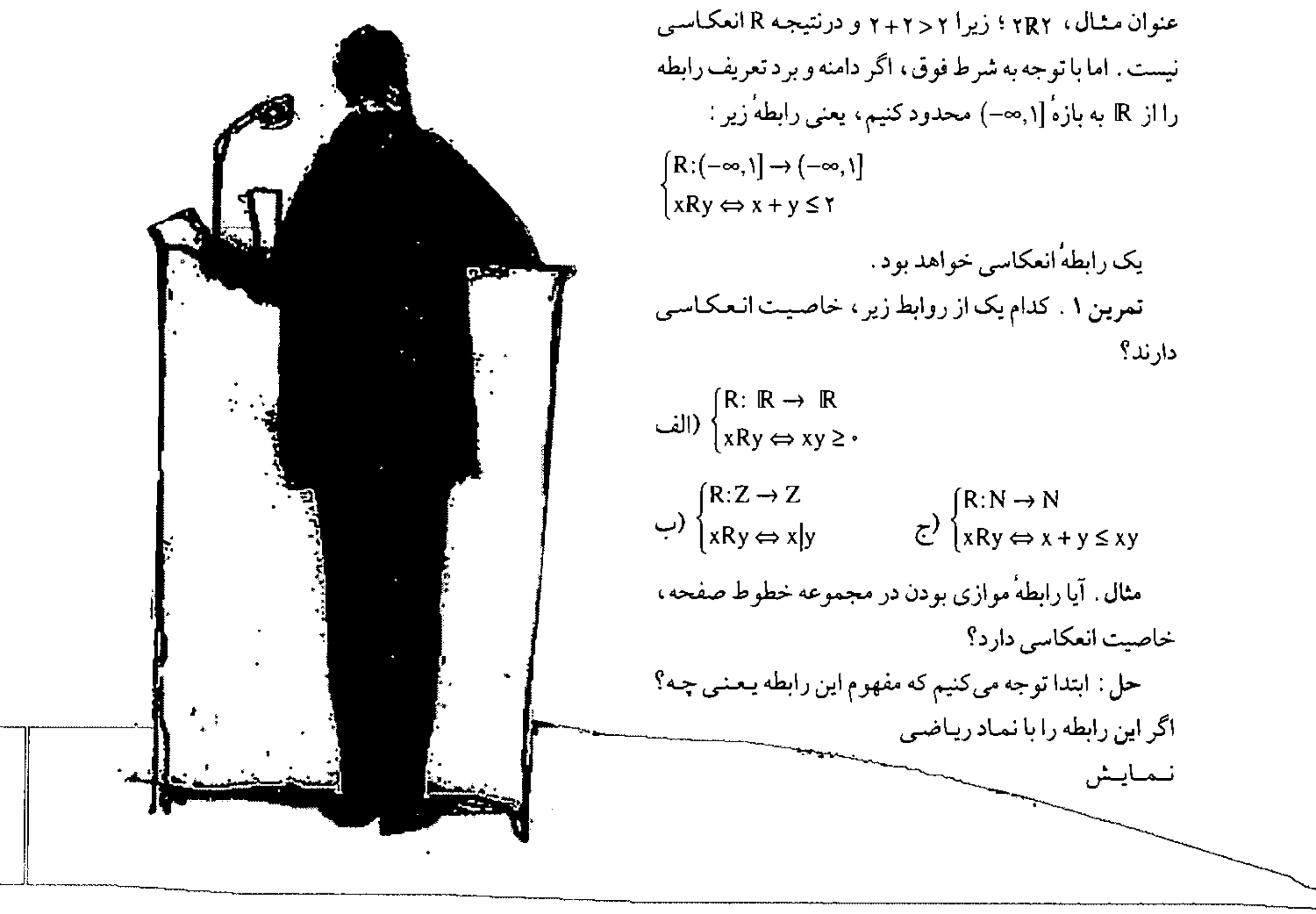
$$\begin{cases} R: A \to A \\ d_1Rd_2 \Leftrightarrow d_1 \| d_2 \end{cases}$$

و این رابطهٔ انعکاسی است؛ زیرا طبق قرارداد، هر خط با خودش موازی است:

$$d_1Rd_1 \Leftrightarrow d_1 \| d_1$$

سؤال. آیا رابطهٔ همشهری بودن در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ انعکاسی است؟

رابطهٔ دوستی چطور؟



۲. رابطهٔ تقارنی

رابطهٔ R در مجموعهٔ A تقارنی است، اگر و فقط اگر از xRy نتیجه شود yRx؛ یعنی داشته باشیم:

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$$

مثال: آیا رابطه‌های R_1 و R_2 که در مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند، تقارنی هستند؟

$$R_1=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3)\}$$
$$R_2=\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$$

حل: R_1 تقارنی نیست؛ زیرا $(2,3)\in R_1$ ولی $(3,2)\notin R_1$، اما R_2 تقارنی است.

مثال. رابطه‌های R_1، R_2، R_3 و R_4 را در مجموعهٔ A از مثال قبل چنان بنویسید که R_1 انعکاسی باشد و تقارنی نباشد، R_2 تقارنی باشد و انعکاسی نباشد، R_3 نه تقارنی باشد و نه انعکاسی، و R_4 هم تقارنی باشد و هم انعکاسی.

حل:

$$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4)\}$$
$$R_2=\{(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$$
$$R_3=\{(1,1),(2,3),(4,1)\}$$
$$R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,2),(2,4),(2,3),(3,2)\}$$

مثال. آیا رابطهٔ R که در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده، تقارنی است؟

$$\begin{cases}R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xRy\Leftrightarrow x+y\geq 2\end{cases}$$

حل. برای بررسی خاصیت تقارنی در مورد روابطی که با ضابطه بیان شده‌اند، نتایج xRy و yRx را می‌نویسیم (یعنی در ضابطه، جای x و y را با هم عوض می‌کنیم). اگر این دو، یکدیگر را نتیجه بدهند، رابطهٔ فوق تقارنی است و در غیر این صورت، تقارنی نیست. به عنوان مثال، در مورد رابطهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$xRy\Leftrightarrow yRx$$
$$x+y\geq 2\Leftrightarrow y+x\geq 2$$

و گزارهٔ دو شرطی فوق، همواره درست است، لذا رابطهٔ R تقارنی است.

مثال. آیا رابطهٔ زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی تقارنی است؟

$$\begin{cases}R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xRy\Leftrightarrow x^2+y^3=9\end{cases}$$

حل.

$$xRy\Leftrightarrow yRx$$
$$x^2+y^3=9\overset{?}{\Leftrightarrow} y^2+x^3=9$$

واضح است که گزارهٔ دو شرطی بالا همواره درست نیست. به‌عنوان **مثال**، اگر $x=1$ و $y=2$ باشد، تساوی سمت چپ درست است؛ ولی تساوی سمت راست درست نیست. پس این رابطه، تقارنی نیست.

تمرین ۲. کدام یک از روابط ذکر شده در تمرین ۱، خاصیت تقارنی دارند؟

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعهٔ خط های صفحه، خاصیت تقارنی دارد؟ رابطهٔ عمود بودن چطور؟

حل: رابطهٔ موازی بودن، خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا: $d_1\parallel d_2\Leftrightarrow d_2\parallel d_1$، و رابطهٔ عمود بودن نیز خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا بدیهی است که: $d_1\perp d_2\Leftrightarrow d_2\perp d_1$.

مثال. آیا رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها، خاصیت تقارنی دارد؟ رابطهٔ برادری چطور؟

حل: رابطهٔ دوستی خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا بدیهی است که اگر x دوست y باشد، y هم دوست x است (دوستی دو طرفه است؛ توجه کنید که رابطهٔ دوستی با رابطهٔ دوست‌داشتن، اشتباه نشود). اما رابطهٔ برادری تقارنی نیست؛ زیرا اگر x برادر y باشد، لزومی ندارد که y برادر x باشد (ممکن است y خواهر x باشد).

۳. رابطهٔ تعدی (تراگذری یا ترایایی)

رابطهٔ R در مجموعهٔ A را تعدی گوییم؛ اگر و فقط اگر هرگاه xRy و yRz، آن‌گاه حتماً داشته باشیم: xRz و یا این‌که: $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$.

از این‌جا روشن است که رابطهٔ تعدی هیچ‌گونه شرطی را به صورت ابتدا به ساکن به رابطه تحمیل نمی‌کند (برخلاف رابطهٔ انعکاسی)؛ بلکه می‌گوید اگر زوج‌های مرتب (x,y) و (y,z) متعلق به R بود (اگر بود)، آن‌گاه حتماً زوج مرتب (x,z) هم باید باشد.

مثال. کدام یک از روابط زیر که روی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده‌اند، دارای خاصیت تعدی هستند؟

$R_1=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳),(۳,۴),(۱,۴)\}$

$R_2=\{(۱,۲),(۲,۱),(۱,۱)\}$

$R_3=\{(۱,۲),(۳,۲),(۴,۴)\}$

$R_4=\{(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲),(۴,۴),(۱,۱)\}$

$R_5=\{(۲,۳)\}$

حل: رابطهٔ R_1 دارای خاصیت تعدی نیست؛ زیرا به عنوان مثال: ۲R۴ و ۳R۴ و ۲R۳ (یک مثال نقض کافی است).

رابطهٔ R_2 نیز تعدی نیست؛ زیرا: ۲R۲ و ۱R۲ و ۲R۱، اما با اضافه شدن زوج (۲ و ۲) این رابطه به رابطه‌ای تعدی تبدیل خواهد شد.

رابطهٔ R_3 تعدی است؛ زیرا چنانچه مشاهده می‌کنید، مؤلفهٔ دوم هیچ کدام از زوج‌های مرتب این رابطه، خود مؤلفهٔ اول زوج‌های مرتب دیگر نیستند؛ یعنی هیچ مثال نقضی برای تعدی بودن رابطهٔ فوق وجود ندارد.

رابطهٔ R_4 نیز تعدی است؛ زیرا برای هر x، y و z که xR_4y و yR_4z داریم: xR_4z درواقع چند زوج مرتب داریم که مؤلفهٔ دوم آنها، مؤلفهٔ اول زوج مرتب دیگر است و در مورد آنها شرط تعدی برقرار است:

$۲R_4۴$ و $۴R_4۲ \Rightarrow ۲R_4۲$ و $۴R_4۲$ و $۲R_4۴ \Rightarrow ۴R_4۴$ و ...

رابطهٔ R_5 نیز تعدی است. (چرا؟)

مثال. روی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ رابطه‌هایی بنویسید که به ترتیب:

۱) تعدی باشد و تقارنی و انعکاسی نباشد.

۲) تعدی و تقارنی باشد و انعکاسی نباشد.

۳) تقارنی باشد و انعکاسی و تعدی نباشد.

۴) انعکاسی باشد و تقارنی و تعدی نباشد.

۵) تعدی و انعکاسی باشد و تقارنی نباشد.

۶) انعکاسی، تقارنی و تعدی باشد.

حل: به ترتیب می‌توان نوشت:

$R_1=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$

$R_2=\{(۱,۳),(۳,۳),(۳,۱),(۱,۱)\}$

$R_3=\{(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۱,۴)\}$

$R_4=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$

$R_5=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۲,۳)\}$

$R_6=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\}$

مثال. کدام یک از رابطه‌های زیر تعدی هستند:

$$\begin{cases}R_1: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xR_1y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y\end{cases}\qquad \begin{cases}R_2: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xR_2y \Leftrightarrow x+y\geq ۲\end{cases}$$

حل: برای تشخیص وجود یا عدم وجود خاصیت تعدی در یک رابطه، به کمک ضابطهٔ آن، مفاهیم xRy و yRz را می‌نویسیم. اگر از ترکیب این دو بتوان نتیجه xRz را گرفت، رابطه مزبور تعدی است؛ مانند رابطهٔ R_1:

$$xR_1y,\ \ yR_1z \overset{?}{\Rightarrow} xR_1z$$

$$+\begin{cases}x^2-y^2=x-y\\ y^2-z^2=y-z\end{cases}$$
$$\overline{x^2-z^2=x-z \Rightarrow xR_1z}$$

ولی در رابطهٔ R_2 چنین نیست:

$$xR_2y,\ \ yR_2z \overset{?}{\Rightarrow} xR_2z$$

$$\left.\begin{matrix}x+y\geq ۲\\ y+z\geq ۲\end{matrix}\right\}\overset{?}{\Rightarrow} x+z\geq ۲$$

بدیهی است که نتیجهٔ بالا درست نیست؛ زیرا مثلاً:

$(۱,۱/۵) \in R_۲(۱+۱/۵ \geq ۲),\ (۱/۵,۰/۷) \in R_۲(۱/۵+۰/۷ \geq ۲),$
$(۱,۰/۷) \notin R_۲(۱+۰/۷ < ۲)$

تمرین. کدام یک از رابطه‌های تمرین ۱ خاصیت تعدی دارند؟

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، یک رابطهٔ تعدی است؟ رابطهٔ عمود بودن چطور؟

حل: رابطهٔ موازی بودن، یک رابطهٔ تعدی است؛ زیرا:

$d_۱ \parallel d_۲, d_۲ \parallel d_۳ \Rightarrow d_۱ \parallel d_۳$

ولی رابطهٔ عمود بودن تعدی نیست؛ زیرا از هندسه می‌دانیم:

$$d_۱ \perp d_۲ \text{ و } d_۲ \perp d_۳ \Rightarrow d_۱ \parallel d_۳$$

(و نتیجه نمی‌شود که: $d_۱ \perp d_۳$)

مثال. آیا رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ تعدی است، رابطهٔ برادری چطور؟

حل: رابطهٔ دوستی تعدی نیست؛ زیرا واضح است که اگر x دوست y و y دوست z باشد، لزومی ندارد که x دوست z باشد؛ ولی رابطهٔ برادری خاصیت تعدی دارد؛ زیرا اگر x برادر y و y برادر z باشد، x برادر z است (z می‌تواند دختر یا پسر باشد).

سؤال. آیا رابطهٔ همشهری بودن در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ تعدی است؟

رابطهٔ هم‌قد بودن یا هم‌وزن بودن چطور؟

اکنون می‌توانیم یک مفهوم اساسی را در ریاضی تعریف کنیم:

رابطهٔ هم‌ارزی

رابطه‌ای که سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را با هم داشته باشد، یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌نامیم. به عنوان مثال، رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خط های صفحه همان‌گونه که دیدیم، هر سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را داشت، یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌باشد؛ ولی رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها چون خاصیت تعدی ندارد، یک رابطهٔ هم‌ارزی نیست.

تمرین ۴. وجود یا عدم وجود هریک از خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را در مورد هریک از روابط زیر تحقیق کنید. روابط هم‌ارزی را در میان این روابط مشخص کنید:

۱) $\begin{cases} R_۱:\{۱,۲,۳,۴,۵\} \longrightarrow \{۱,۲,۳,۴,۵\} \end{cases}$

$R_۱ = \{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۲),(۲,۲)\}$

۲) $\begin{cases} R_۲: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۲y \Leftrightarrow x+y<۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} R_۳: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۳y \Leftrightarrow ۲x+y=۵ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} R_۴: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۴y \Leftrightarrow x^۲+y^۲+xy=۱ \end{cases}$

۵) $\begin{cases} R_۵:\{-۱,۲,۳,۴,۵\} \longrightarrow \{-۱,۲,۳,۴,۵\} \\ R_۵ = \{(-۱,۴),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۵),(۳,۴),(۲,۵),(۲,۴),(-۱,۵)\} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} R_۶: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۶y \Leftrightarrow |x-y|<۱ \end{cases}$

۷) $\begin{cases} R_۷: Z \to Z \\ xR_۷y \Leftrightarrow x-y=۷k \end{cases}$

۸) $\begin{cases} R_۸: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۸y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \end{cases}$

۹) $\begin{cases} R_۹: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_۹y \Leftrightarrow x^۳-y^۳=x^۲-y^۲ \end{cases}$

تمرین ۵. روابطی روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ بنویسید که:

الف) انعکاسی باشد و تقارنی و تعدی نباشد.

ب) تقارن و تعدی باشد و انعکاسی نباشد.

ج) تقارنی و تعدی باشد و انعکاسی نباشد.

د) هم‌ارزی باشد.

اشاره

در شماره قبل مسائلی را عنوان کردیم که برای آن‌ها راه‌حل‌هایی از حساب را آورده بودیم که آن راه‌حل‌ها نسبت به راه‌های جبری جالب‌تر بود و ملاحظه گردید که حساب در برخی حالت‌ها، کارآمدتر از جبر است. اکنون ادامه مطلب را در پی می‌آوریم:

حل برخی معادله‌های نامتعارف

از همان زمانی که با نوشتن کتاب «جبر و مقابله» توسط خوارزمی در سده‌های سوم و چهارم هجری، جبر وارد در ریاضیات شد، به حل معادله‌ها پرداخته شد. خود واژهٔ جبر به معنای جبران کردن و مقابله به معنای رو به رو قرار دادن دو سوی برابری است. نام «جبر» از همان زمان باقی مانده است، تنها وقتی این واژه به اروپا رفت، آن را برای عموم در زبان فرانسوی «آلجبر» خواندند؛ یعنی «آل» که در زبان عربی به اول «جبر» اضافه شده بود و امروز هم در تمام جهان به صورت‌های مختلف همان «الجبر» می‌خوانند. البته سده‌ها طول کشید تا «جبر حرفی» معمول شد و به صورت امروزی درآمد. ولی هستهٔ اصلی جبر همچنان حل معادله‌هاست. اگرچه امروز «جبر جدید» پیدا شده است که به کلی انتزاعی و غیر از «جبر رسمی» است، ولی این افتخار برای ایران باقی مانده است که نامی که خوارزمی روی این دانش گذاشت، به همهٔ جهان به ارث رسیده است.

ولی در جبر رسمی، گاهی با معادله‌هایی رو به رو می‌شویم که تا حدی «نامتعارف‌اند» و ما در این‌جا به برخی از آن‌ها می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱. مقدار تقریبی جواب این معادله را پیدا کنید و دقت تقریب جواب مثبت را معین کنید:

$$۰/۰۰۰۰۰۲x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$$

حل: اگر در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$، ضریب a به سمت صفر میل کند، یکی از ریشه‌ها به سمت $-\frac{c}{b}$ و دیگری از لحاظ قدرمطلق به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین با توجه به کوچک بودن ضریب $x^۲$ نسبت به دو ضریب دیگر (از نظر قدرمطلق)، یکی از ریشه‌ها به $\frac{۱}{۴}$ نزدیک است. می‌توانستیم



معادله و اتحاد

پرویز شهریاری

این طور استدلال کنیم: اگر از جملهٔ درجه دوم معادله، به دلیل کوچکی آن نسبت به $\frac{1}{4}$، صرف‌نظر کنیم، مقدار تقریبی یکی از جواب‌ها به دست می‌آید. بنابراین:

$$x_1 \approx \frac{1}{4} \qquad (1)$$

از طرف دیگر، بنابه رابطه‌ای که بین ریشه‌ها و ضریب‌ها وجود دارد، داریم:

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{0/000002} = -5 \times 10^5$$

و بنابراین:

$$x_2 \approx -2 \times 10^6$$

اکنون ببینیم ریشهٔ مثبت یعنی x_1، با چه دقتی محاسبه شده است؟ برای این منظور اگر (۱) را از معادلهٔ اصلی کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$0/000002x^2 = 4(x_1 - x)$$

سمت چپ این برابری مثبت است، یعنی $x < x_1$، بنابراین مقدار واقعی ریشه از $\frac{1}{4}$ کوچک‌تر است و داریم:

$$4|x_1 - x| < 0/000002 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \; ,$$

$$|x_1 - x| < 2 \times 10^6 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{10^6} \times \frac{1}{32} < \frac{1}{10^7}$$

و همان‌طور که می‌بینیم، دقت در مرز بالایی است.





مسألهٔ ۲ . مقدار تقریبی ریشهٔ این معادله را پیدا کنید .

$$۰/۰۰۰۰۰۱x + ۱ - \sqrt{۱/۰۰۰۰۱} = ۰$$

حل : باید مقدار تقریبی عدد :

$$x = \frac{\sqrt{۱/۰۰۰۰۱} - ۱}{۰/۰۰۰۰۰۱}$$

را پیدا کنیم . محاسبهٔ این کسر را با دو روش می‌توان به انجام رساند . یا به یاری رابطهٔ :

$$\sqrt{۱+a} \approx ۱ + \frac{a}{۲}$$

و یا به یاری این تبدیل :

$$\frac{\sqrt{۰/۰۰۰۰۱} - ۱}{۰/۰۰۰۰۰۱} = \frac{۰/۰۰۰۰۱}{۰/۰۰۰۰۰۱(\sqrt{۰/۰۰۰۰۱} + ۱)} =$$

$$\frac{۱۰}{\sqrt{۱/۰۰۰۰۱} + ۱} \approx \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

مسألهٔ ۳ . از این دو عدد ، کدام بزرگ‌ترند؟

$$A = \frac{۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴}{(۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴)^{۲} + ۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴^{۲}}$$

$$B = \frac{۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲}{(۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲)^{۲} + ۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲}$$

حل : فرض می‌کنیم $\alpha = ۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴$ و $\beta = ۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲$. بنابراین عددهای مسأله به این صورت درمی‌آیند :

$$\frac{۱+\alpha}{۱+\alpha+\alpha^{۲}} \ , \ \frac{۱+\beta}{۱+\beta+\beta^{۲}}$$

چون $\alpha > \beta$ ، پس روشن است که :

$$\frac{۱+\alpha}{\alpha^{۲}} = \frac{۱}{\alpha^{۲}} + \frac{۱}{\alpha} < \frac{۱}{\beta^{۲}} + \frac{۱}{\beta} = \frac{۱+\beta}{\beta^{۲}} \ ,$$

$$\frac{\alpha^{۲}}{۱+\alpha} = ۱ : \left(\frac{۱+\alpha}{\alpha^{۲}}\right) > ۱ : \left(\frac{۱+\beta}{\beta^{۲}}\right) = \frac{\beta^{۲}}{۱+\beta}$$

$$\frac{۱+\alpha+\alpha^{۲}}{۱+\alpha} = ۱ + \frac{\alpha^{۲}}{۱+\alpha} > ۱ + \frac{\beta^{۲}}{۱+\beta} = \frac{۱+\beta+\beta^{۲}}{۱+\beta}$$

و این به معنای $\frac{۱}{A} > \frac{۱}{B}$ و در نتیجه $A<B$ است .

در آغاز تعریفی را به یاد می‌آوریم . در نظریهٔ عددها تابعی که با نماد $[x]$ نشان داده می‌شود و برای همهٔ عددهای حقیقی x معین است ، به معنای بزرگ‌ترین عدد درستی است که از x تجاوز نمی‌کند . این تابع را بخش درست x گویند یا $[x]$ می‌نامند و گاهی $E(x)$ نشان می‌دهند ؛ برای نمونه :

$$[۳/۲] = ۳ \ , \ [۰/۷] = ۰ \ , \ [-۱/۵] = -۲ \ , \ [-\sqrt{۳}] = -۲ \ , \ [۵] = ۵$$

یعنی در هر حال داریم : $[x] \le x < [x] + ۱$.

همچنین نماد $\{x\}$ را برای بخش کسری x در نظر می‌گیرند ؛ یعنی :

$$\{x\} = x - [x] \ \text{یا} \ x = [x] + \{x\}$$

چند نمونه می‌آوریم :

$$\{۲/۳\} = ۰/۳ \ ; \ \{۰/۴\} = ۰/۴ \ ; \ \{-۱/۵\} = ۰/۵$$

چند مثال

مسألهٔ ۴ . درستی این اتحاد را ثابت کنید :

$$[\log_{۲} x - \log_{۲}[x]] = [\log_{۲} x] - [\log_{۲}[x]]$$

حل : برای $x < ۱$ مقدار $[x]$ برابر صفر یا عددی منفی می‌شود و از آن‌جا که لگاریتم صفر یا عدد منفی معنا ندارد ، پس برابری تنها برای $x \ge ۱$ معنا دارد . $x = ۲^{k} \times ۲^{\alpha}$ می‌گیریم ، که در آن k عددی درست و غیر نفی و $۰ \le \alpha < ۱$ است . داریم :

$$\log_{۲} x = k + \alpha \ , \ [\log_{۲} x] = k$$

چون داریم : $[x] \le x$ ، بنابراین :

$$k \le \log_{۲}[x] \le k + \alpha \ , \ [\log_{۲}[x]] = k$$

از آن‌جا :

$$۰ \le \log_{۲} x - \log_{۲}[x] \le \alpha$$

و بنابراین :

$$[\log_{۲} x - \log_{۲}[x]] = ۰$$

$$[\log_{۲} x] - [\log_{۲}[x]] = ۰$$

و درستی اتحاد ثابت می‌شود .

مسألهٔ ۵. {x} را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$\left[x+\frac{3}{8}\right]+[x]=[2x]$$

حل: $x=k+\alpha$ می‌گیریم، که در آن k عددی درست و $0\le\alpha<1$ است. در این صورت برابر فرض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left[\alpha+\frac{3}{8}\right]=[2\alpha]$$

اگر $\alpha<\frac{5}{8}$ باشد، به برابری $[2\alpha]=0$ می‌رسیم که برای $\alpha<\frac{1}{2}$ برقرار است. در حالتی که $\alpha\ge\frac{5}{8}$ باشد، به دست می‌آید: $[2\alpha]=1$، که برای $\alpha>\frac{1}{2}$ یا با توجه به شرط $\alpha\ge\frac{5}{8}$ برقرار است.

پاسخ: $\{x\}=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{5}{8},1\right)$.

مسألهٔ ۶. مسافری x روز در راه بود (x عددی است درست) و هر روز هم x کیلومتر را پیمود تا به مقصد رسید. اگر این مسافر هر روز ۲۰ کیلومتر می‌رفت و بعد از هر ۴۰ کیلومتر، یک روز استراحت می‌کرد، زمان مسافرت او ۳۷ روز بیشتر می‌شد. مسافر چند روز در راه بوده است؟

حل: مسافر x روز در راه بوده و هر روز هم x کیلومتر پیموده است؛ بنابراین فاصلهٔ آغاز حرکت او تا مقصد، برابر x^2 کیلومتر است.

از سوی دیگر، اگر مسافر، بعد از هر ۴۰ کیلومتر یک روز استراحت می‌کرد، تعداد روزهای استراحت او برابر $\left[\frac{x^2}{40}\right]$ می‌شد و به این معادله می‌رسیم:

$$\left(x+27-\left[\frac{x^2}{40}\right]\right)20=x^2$$

که بعد از تبدیل‌های ساده چنین می‌شود:

$$\left[\frac{x^2}{40}\right]=x+37-\frac{1}{20}x^2$$

و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x+37-\frac{1}{20}x^2\le\frac{x^2}{40}<x+38+\frac{1}{20}x^2$$

با حل این دو نامعادله، به این پاسخ‌ها می‌رسیم:

$$\frac{20+22\sqrt{10}}{3}\le x<\frac{20+4\sqrt{310}}{3}$$

مقدار سمت چپ بین ۲۹ و ۳۰ و مقدار سمت راست بین ۳۰ و ۳۱ است:

$$29/000\le x<30$$

پاسخ: $x=30$.

مسألهٔ ۷. پیاده‌ای با سرعت ۵ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. بعد از پیمودن هر ۴ کیلومتر به استراحت می‌پردازد. هر استراحت او، به جز استراحت چهارم، ۱۰ دقیقه طول می‌کشد و در توقف چهارم، یک ساعت استراحت می‌کند. اگر این مسافر، ساعت ۴ صبح راه افتاده و در ساعت ۱۲ ظهر به مقصد رسیده باشد، چه فاصله‌ای را پیموده است؟

حل: فاصله‌ای را که پیاده پیموده است، برابر x کیلومتر می‌گیریم. در این صورت



تعداد توقف‌های او برابر $\left[\frac{x}{۴}\right]$ می‌شود. هر کدام از این توقف‌ها ۱۰ دقیقه (یعنی $\frac{۱}{۶}$ ساعت) طول کشیده است؛ به جز توقف چهارم که مدت آن یک ساعت بوده به این ترتیب، کل زمان استراحت مسافر، بر حسب ساعت، چنین است:

$$\frac{۱}{۶}\left(\left[\frac{x}{۴}\right]-۱\right)+۱$$

بنابراین، زمانی که مسافر در حال حرکت بود، بر حسب ساعت، برابر است با:

$$۸-\left(\left[\frac{x}{۴}\right]-۱\right)\frac{۱}{۶}-۱=۷\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۶}\left[\frac{x}{۴}\right]$$

بنابراین مسافت x برابر می‌شود:

$$x=۵\left(۷\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۶}\left[\frac{x}{۴}\right]\right)=۳۵\frac{۵}{۶}-\frac{۵}{۶}\left[\frac{x}{۴}\right];$$

$$\left[\frac{x}{۴}\right]=\frac{۲۱۵-۶x}{۵}$$

از آن‌جا، به این نامعادله‌ها می‌رسیم:

$$\frac{۲۱۵-۶x}{۵}\le\frac{x}{۴}<\frac{۲۱۵-۶x}{۵}+۱$$

با حل این نامعادله‌ها به دست می‌آید:

$$\frac{۲۱۵}{۲۹}\le x<\frac{۲۲۰}{۲۹}\Rightarrow ۷/۴۰۰۰\le\frac{x}{۴}<۷/۵۰۰۰$$

یعنی $x=۷$ و به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۲۱۵-۶x}{۵}=۷\Rightarrow x=۳۰\ (\text{کیلومتر})$$

مسألهٔ ۸. معادلهٔ $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+[x]^۲=[۲x]+۲$ را حل کنید.

حل: در آغاز یک اتحاد را ثابت می‌کنیم:

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=[۲x]-[x] \qquad (۱)$$

هر عدد x را می‌توان به صورت $x=k+\alpha$ یا $x=k+\frac{۱}{۲}+\alpha$ نوشت که در آن‌ها k عددی درست و $۰\le\alpha<\frac{۱}{۲}$.

برای $x=k+\alpha$ داریم:

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=\left[k+\alpha+\frac{۱}{۲}\right]=k;$$

$$[۲x]=[۲k+۲\alpha]=۲k;\ [x]=[k+\alpha]=k$$

یعنی: $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=[۲x]-[x]$.

برای $x=k+\frac{۱}{۲}+\alpha$ به دست می‌آید:

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=[k+۱+\alpha]=k+۱;$$

$$[۲x]=[۲k+۱+۲\alpha]=۲k+۱;$$

$$[x]=\left[k+\frac{۱}{۲}+\alpha\right]=k$$

و بنابراین $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=[۲x]-[x]$.

برای حل مسألهٔ اصلی، اگر از اتحاد (۱) استفاده کنیم، به این صورت درمی‌آید:

$$[x]^۲-[x]-۲=۰$$

این، یک معادلهٔ درجه دوم نسبت به $[x]$ است که جواب‌های آن ۱- و ۲ است؛ پس:

$$۲\le x<۳\ ,\ -۱\le x<۰$$

مسألهٔ ۹. این دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases}x+[y]+\{z\}=۱/۱\\ y+[z]+\{x\}=۲/۲\\ z+[x]+\{y\}=۳/۳\end{cases}$$

حل: با توجه به اتحاد $[a]+\{a\}=a$، سه معادلهٔ دستگاه را با هم جمع می‌کنیم؛ به دست می‌آید:

$$۲(x+y+z)=۶/۶$$

یا:

$$x+y+z=۳/۳ \quad (۱)$$

مجموع دو معادلهٔ اول و دوم را از معادلهٔ (۱) کم می‌کنیم،

نتیجه چنین می‌شود:

$$[y]+\{x\}=0$$

از این‌جا نتیجه می‌شود: x عددی درست است و $0\le y<1$، به این ترتیب معادلهٔ اول دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$x+\{z\}=1/1$$

از آن‌جا $x=1$ و $\{z\}=0/1$ و معادلهٔ دوم دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$y+\{z\}=3/2$$

درنتیجه: $[z]=2$ ، $y=0/2$.

پاسخ. $x=1$ ، $y=0/2$ ، $z=2/1$.

مسألهٔ ۱۰. معادلهٔ $\left||x|-[x]\right|=\left[|x|-[x]\right]$ را حل کنید.

حل: از آن‌جا که $|x|\ge x\ge [x]$، پس سمت چپ برابری مساوی است با $|x|-[x]$. چون $[x]$ عددی درست است، پس سمت راست معادله برابر $[|x|]-[x]$ می‌شود. به این ترتیب، معادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$|x|=[|x|]$$

این برابری وقتی برقرار است که $|x|$ و در نتیجه خود x عددی درست باشد.

پاسخ. هر عدد درستی جواب معادله است.

مسألهٔ ۱۱. این مسأله، یکی از مسأله‌های المپیاد سراسری روسیه در سال تحصیلی ۱۹۷۹ـ۱۹۸۰ است. در این دنباله، چند عدد مختلف وجود دارد؟

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\left[\frac{2^2}{1980}\right],\left[\frac{3^2}{1980}\right],\dots,\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$$

حل: جملهٔ kام دنبالهٔ مفروض را x_k می‌نامیم.

$$x_k=\left[\frac{k^2}{1980}\right]$$

یادآوری می‌کنیم که دنبالهٔ (x_k) غیرنزولی است. روشن است که:

$$x_1=x_2=\dots=x_{44}=0$$

زیرا برای $k\le 44$ داریم $\frac{k^2}{1980}<1$. به همین ترتیب، به سادگی قابل تحقیق است که:

$$x_{45}=x_{46}=\dots=x_{62}=1$$

زیرا برای $45\le k\le 62$ داریم:

$$1<\frac{k^2}{1980}<2$$

جملهٔ بعد از x_{62} برابر است با ۲؛ یعنی ۱۸ جملهٔ دنباله برابر واحد است.

می‌بینیم، بین ۶۲ جملهٔ اول دنباله، تنها ۲ عدد متفاوت وجود دارد. از طرف دیگر:

$$x_{1980}=\left[\frac{1980^2}{1980}\right]=1980$$

و این، به معنای آن است که در دنبالهٔ x_k، همهٔ عددهای طبیعی از ۰ تا ۱۹۸۰ وجود ندارد؛ یعنی «جاافتادگی‌هایی» در آن پیدا می‌شود.

این تفاضل را در نظر می‌گیریم:

$$y_k=\frac{(k+1)^2}{1980}-\frac{k^2}{1980}=\frac{2k+1}{1980}$$

اگر $y_k>1$، آن وقت عددهای x_k و x_{k+1} مختلف‌اند.

این وضع وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$2k+1>1980\Rightarrow k>\frac{1979}{2}>989$$

بنابراین، همهٔ عددهای x_{990} ، x_{991} ، … ، x_{1980} مختلف‌اند (به تعداد ۹۹۱ عدد).

در حالت $y_k<1$ یا x_k و x_{k+1} بر هم منطبق‌اند و یا یک واحد با هم فرق دارند؛ یعنی «جاافتادگی» وجود ندارد؛ چون:

$$x_{989}=\left[\frac{989^2}{1980}\right]=494$$

یعنی، در مجموعهٔ $\{x_1,x_2,\dots,x_{989}\}$ به همهٔ عددهای درست از ۰ تا ۴۹۴ برمی‌خوریم (روی هم ۴۹۵ عدد).

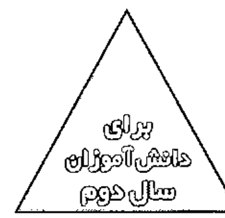
به این ترتیب، تعداد عددهای مختلف در دنبالهٔ مفروض، برابر است با:

$$991+495=1486$$

تصاعد عددی

احسان یارمحمدی





با مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت که در واقع همان مجموعه اعداد طبیعی هستند و به صورت $Z^+ = N = \{۱, ۲, ۳, ...\}$ نمایش داده می‌شود و دارای تعداد نامتناهی عضو است، آشنا هستید.

اگر عضوهای این مجموعه را از داخل آکولاد خارج کنیم و آنها را با همان نظم و ترتیب خاصی که دارند، به صورت متوالی و به دنبال یکدیگر بنویسیم، خواهیم داشت:

۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ ، ...

با اندکی دقت، درمی‌یابیم که اولین عضو، عدد یک است و بقیه اعضا به صورت:

۲=۱+۱

۳=۲+۱

۴=۳+۱

۵=۴+۱

⋮

به دست می‌آیند؛ به عبارت دیگر، برای به دست آوردن هر عضو آتی، عضو قبل از آن را با عدد یک جمع می‌کنیم تا عضو موردنظر حاصل شود.

قرارداد ۱.

پس از این، به جای استفاده از کلمهٔ «عضو» در بحث تصاعد، از کلمهٔ «جمله» برای بیان مقصودمان استفاده می‌کنیم.

اکنون به اعداد زیر توجه می‌کنیم:

۳ , ۹ , ۱۵ , ۲۱ , ۲۷ , ۳۳ , ۳۹ , ۴۵ , ۵۱ ، ...

به سهولت و با استفاده از شهود خود، درخواهیم یافت که جملهٔ اول عدد ۳ و بقیهٔ جمله‌ها حاصل جمع جملهٔ قبل خود به اضافهٔ عدد ثابت ۶ هستند. در ضمن، با مشاهدهٔ جمله‌های این دنباله، به این نتیجه می‌رسیم که جمله‌های این دنباله، در حال بزرگ شدن (از نظر اندازهٔ عددی) و

به اصطلاح پیشروی و پیشرفت هستند؛ بنابراین همین توالی و فراگشت، بهانهٔ خوبی ایجاد می‌کند تا این اعداد طبیعی، را «تصاعد[3]» بنامیم.

عدد ثابتی که در شکل‌گیری بقیهٔ جمله‌ها در این تصاعد به‌واسطهٔ عمل جمع، نقش اساسی را ایفا می‌کند، نام این تصاعد را «تصاعد عددی» قرار می‌دهیم.

قرارداد ۲.

در هر تصاعد عددی، مقدار ثابت و مخالف صفری را که در پیدایش جمله‌های آن تصاعد نقش دارد، «تفاضل مشترک»[5] یا «قدر نسبت» می‌نامیم.

بنابراین با توجه به مطالب ارائه شده، اگر جملهٔ اول یک تصاعد عددی را با x_0 و قدر نسبت آن را با r نمایش دهیم، در این صورت، شکل کلی تصاعد عددی به صورت زیر است:

$$x_0, x_0 + r, x_0 + 2r, x_0 + 3r, \dots, x_0 + (n-1)r$$

می‌دانیم که اگر بخواهیم شناختی دربارهٔ موضوعی به دست آوریم، داشتن یک ضابطه که نشان‌دهندهٔ قانونمندی در آن موضوع است، می‌تواند کمک بسیار ارزنده‌ای را در مورد آشکارسازی مشخصه‌های پنهان در آن موضوع به ما عرضه کند؛ لذا در این قسمت، سعی بر این است که ضابطه‌ای را با عنوان «رابطهٔ بازگشت[6]» در تصاعد عددی مطرح کنیم.

در واقع رابطهٔ بازگشت، یک معادله برای دنباله‌ای از اعداد طبیعی مانند x_n است که می‌توانیم هر جمله از این دنباله را برحسب تعدادی با پایان (متناهی) از جمله‌های قبل بیان و مشخص کنیم؛ بنابراین روابط زیر را عرضه می‌کنیم:

I) $x_n - x_{n-1} = r$

II) $x_n = x_{n-1} + r$

III) $x_{n-1} = x_n - r$

با توجه به سه رابطهٔ بازگشت بالا که هر کدام از دیگری نتیجه می‌شود، می‌توان با داشتن یک جمله و قدر نسبت یک تصاعد عددی، بقیهٔ جمله‌های آن را به دست آورد؛ بدین صورت که اگر قدر نسبت را به جمله‌ای مفروض اضافه کنیم و این عمل را مرتب ادامه دهیم، جمله‌های بعدی تصاعد عددی مشخص می‌شوند؛ و اگر قدر نسبت را از جمله‌ای مفروض کم کنیم و این عمل را به طور متوالی انجام دهیم، جمله‌های قبلی جمله‌ی مفروض تصاعد عددی معین می‌شوند.

لذا با توجه به مطالب گفته شده، درخواهیم یافت که در یک تصاعد عددی با جملهٔ اول x_0 و قدر نسبت r، جملهٔ عمومی به صورت $x_n = x_0 + (n-1)r$ است.

مثال. اگر در یک تصاعد عددی، جملهٔ اول ۱۰ و قدر نسبت r=۵ باشد، پس جملهٔ عمومی این تصاعد به صورت $x_n = 10 + 5(n-1)$ است، اکنون اگر هر جملهٔ این تصاعد را بخواهیم، می‌توانیم با انتخاب یک $n \in N$ دلخواه، جملهٔ موردنظر خود را به دست آوریم. به عنوان مثال، اگر n=۳ را اختیار کنیم، جملهٔ سوم در این تصاعد، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_3 = 10 + 5(3-1) = 20$$

مثال. چند جمله از جمله‌های یک تصاعد عددی، به صورت ۴۴ , ۴۲ , ... ، ۸ , ۶ , ۴ , ۲ است؛ بنابراین مجموع سه جمله بعد از جملهٔ چهارم در این تصاعد، برابر با ۳۶ است؛ زیرا:

۱۰=۸+۲= جمله پنجم

۱۲=۱۰+۲= جمله ششم

۱۴=۱۲+۲= جمله هفتم

همچنین، مجموع سه جملهٔ قبل از جمله ماقبل آخر، یعنی ۴۲، برابر با ۱۱۴ است؛ زیرا:

۴۰=۴۲-۲= جملهٔ بیست و یکم

۳۸=۴۰-۲= جملهٔ بیستم

۳۶=۳۸-۲= جملهٔ نوزدهم

واسطهٔ عددی

قضیه: اگر z,y,x سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد عددی باشند، آن‌گاه $y = \frac{x+z}{2}$ را واسطهٔ این تصاعد عددی می‌نامیم.

برهان

بنابر آن‌چه در محتوای متن ارائه شد، داریم $x = x_n$ ، $y = x_n + r$ ، $z = x_n + 2r$ ؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} y = x_n + r \Rightarrow 2y &= 2(x_n + r) \\ &= 2x_n + 2r \\ &= x_n + x_n + 2r \\ &= x_n + (x_n + 2r) \\ &= x + z \Rightarrow y = \frac{x+z}{2} \end{aligned}$$

مثال. سه عدد $3x+3$ ، $2(x-2)$ و $2x+1$ به ترتیب جمله‌های یک تصاعد عددی هستند، لذا با توجه به قضیه بالا، می‌توان چنین نوشت؛ $2(2x-4) = (3x+3)+(2x+1)$ ، و x را محاسبه کرد که، مقدار x برابر با ۱۲- است.

لذا جمله‌های این تصاعد عددی، با قدر نسبت $r = -5$ ، به‌صورت زیر است.

۲-و ۸-و ۱۳-و ۱۸-و ۲۳-و ۲۸-و ۳۳-و ۳۸-و ۴۳-و ...

مثال. سه عدد $7x^2$ ، $9x^2 - 4$ ، $4x^2 - 1$ به‌ازای $x > 0$ ، به‌ترتیب جمله‌های یک تصاعد عددی هستند، بنابراین، می‌توان نوشت $2(9x^2 - 4) = (4x^2 - 1) + 7x^2$ ، که پس از محاسبه و ساده‌کردن، مقدار x برابر با یک است.

بنابراین جمله‌های این تصاعد عددی با قدر نسبت $r = 2$ ، به‌صورت زیر است:

۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ...

تصاعد عددی یکنوا

به‌دنبالهٔ اعداد زیر که یک تصاعد عددی را تشکیل می‌دهند، دقت کنید.

۱، ۵، ۹، ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۵، ۲۹، ...

جمله‌های این تصاعد در حال بزرگ شدن است؛ دلیل آن چیست؟ دلیل آن قدر نسبت این تصاعد، عدد ۴ است که صعودی‌بودن این تصاعد را نشان می‌دهد.

اکنون به‌دنبالهٔ دیگری از اعداد که بیانگر یک تصاعد عددی است، توجه کنید:

...۱۸ ، ۱۵ ، ۱۲ ، ۹ ، ۶ ، ۳

هنگامی که به جمله‌های این تصاعد عددی دقت می‌کنیم، این مطلب به ذهن ما می‌رسد که جمله‌های این تصاعد در حال کوچک‌شدن است. اگر دلیل آن را بررسی کنیم، متوجه می‌شویم که علت آن، قدر نسبت این تصاعد عددی، یعنی عدد ۳- است که نزولی‌بودن این تصاعد است.

به‌طور کلی در یک تصاعد عددی، اگر قدر نسبت تصاعد عددی مثبت باشد، آن تصاعد را یک تصاعد عددی صعودی می‌نامیم، که در آن، همواره $x_n < x_{n+1}$ برقرار است.

به طور کلی تصاعد عددی صعودی یا نزولی را تصاعد عددی یکنوا می‌گوییم.

اگر قدر نسبت تصاعد عددی منفی باشد، آن تصاعد را یک تصاعد عددی نزولی می‌نامیم که در آن همواره $x_{n+1} < x_n$ برقرار است.

مثال. دنبالهٔ «اعداد طبیعی زوج» که با جملهٔ عمومی $x_n = 2n$ معرفی می‌شوند را، درنظر بگیرید، برای این دنباله به‌ازای $n \in N$ داریم:

۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ...

بنابراین دنبالهٔ اعداد طبیعی زوج یک «تصاعد عددی صعودی»[8] با جملهٔ اول $x_0 = 2$ و قدر نسبت $r = 2$ است.

مثال. دنبالهٔ اعداد صحیح منفی را که با جملهٔ عمومی $x_n = -n$ معرفی می‌شوند را مدّنظر بگیرید. برای این دنباله به‌ازای $n \in N$ داریم:

۱-، ۲-، ۳-، ۴-، ۵-، ۶-، ۷-، ۸-، ۹-، ۱۰-، ...

بنابراین دنبالهٔ اعداد صحیح منفی یک «تصاعد عددی نزولی»[9] با جملهٔ $x_0 = -1$ و قدر نسبت $r = -1$ را تشکیل می‌دهد.

تصاعد عددی باپایان[10] (متناهی)

اگر جملهٔ آخر یک تصاعد عددی مشخص باشد، آن

تصاعد عددی را متناهی می‌نامیم.

درواقع در این چنین تصاعدهایی، جملهٔ آخر به طور کامل مشخص است که ما آن را با L نمایش می‌دهیم؛ لذا شکل کلی یک تصاعد عددی باپایان(متناهی) با جملهٔ اول x_0 و قدر نسبت r و جملهٔ آخر l به صورت زیر است:

$x_0, x_0+r, x_0+2r, \ldots L-2r, L-r, L$

مثال. هریک از تصاعدهای زیر، بیانگر یک تصاعد عددی متناهی هستند.

الف) ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰

ب) ۱۷-، ۱۶-، ۱۵-، ...، ۶-، ۵-، ۴-

ج) ۶-، ۵-، ۴-، ...، ۴، ۵، ۶

مثال. تعداد جمله‌های تصاعد عددی متناهی ۱، ۳، ۵، ...، ۲۹، ۳۱ برابر با ۱۶ است؛ زیرا در این تصاعد عددی متناهی، جملهٔ اول $x_0 = 1$، قدر نسبت $r = 2$ و جملهٔ آخر $L = 31$ است؛ لذا بنابر مطلب ارائه شدهٔ فوق داریم:

$31 = 1 + (n-1)(2) \Rightarrow n = 16$

ارائه چند قضیه برای تصاعد عددی باپایان(متناهی)

«کارل فردریش گاوس»[۱] (۱۸۵۵ـ۱۷۷۷) ریاضیدان شهیر آلمانی، هنگامی که تحصیلات خود را در دبستان سپری می‌کرد، در پاسخ به سؤالی که معلم در کلاس مطرح کرده‌بود، روشی را ارائه کرد که باعث حیرت بسیارفراوان معلم خویش و همکلاسی‌هایش شد.

معلم گاوس به‌عنوان تمرین، از شاگردان کلاس خواسته‌بود که مجموع جمله‌های تصاعد عددی متناهی زیر را به‌دست آورند:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

اگر از حرف S که از ابتدای کلمهٔ Sum و به معنای جمع است، استفاده کنیم، درواقع آن چیزی که مدنّظر معلم کلاس بوده، عبارت است از:

$S = 1+2+3+4+\ldots+97+98+99+100$

محاسبهٔ این جمع، وقت نسبتاً زیادی را لازم داشت و معلم که خود از قبل جواب را محاسبه کرده‌بود، با این کار درواقع می‌خواست که شاگردان کلاس، مشغول به حل این سؤال شوند و از بازیگوشی پرهیز کنند که ناگهان متوجه شد شاگردی(گاوس) جواب سؤال را پاسخ داد.

گاوس روش خارق‌العادهٔ خود را به صورت زیر ارائه کرد.

گاوس مجموع اعداد را S نامید و این اعداد را یک مرتبه از کوچک به بزرگ(از چپ به راست) نوشت و با هم جمع کرد و بار دیگر این اعداد را از بزرگ به کوچک(از راست به چپ) و زیر همان اعداد مرتبهٔ اول نوشت و با هم جمع کرد که چنین شد:

$S = 1+2+3+4\ldots+97+98+99+100$

$S = 100+99+98+97\ldots+4+3+2+1$

سپس گاوس طرفین دو تساوی بالا را با هم جمع کرد؛ لذا:

$$2S = (1+100)+(2+99)+(3+98)+(4+97)+\ldots$$
$$(97+4)+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

گاوس خوب می دانست که حاصل جمع داخل هر پرانتز، برابر با ۱۰۱ است و از طرفی تعداد جمله‌های تصاعد عددی متناهی که معلّم مطرح کرده‌بود، برابر با ۱۰۰ بود؛ بنابراین:

$2S = (101)(100) \Rightarrow S = 5050$

قضیهٔ ۱.

در تصاعد عددی متناهی با جملهٔ اول x_0، قدر نسبت r و جملهٔ آخر L مجموع جمله‌های آن که با S_n نمایش داده می‌شود، برابر است با $S_n = \frac{n}{2}(x_0 + L)$.

برهان

صورت کلی یک تصاعد عددی متناهی، به‌صورت زیر است:

$x_0 + x_0 + r, x_0 + 2r, \ldots, L-27, L-r, L$

بنابراین با استفاده از روش گاوس، مجموع جمله های آن به صورت زیر است:

$$S_n = x_0 + (x_0 + r) + (x_0 + 2r) + \dots + (L - 2r) + (L - r) + L$$

برای ادامهٔ کار نیز از روش گاوس استفاده می کنیم.

$$S_n = x_0 + (x_0 + r) + (x_0 + 2r) + \dots + (L - 2r) + (L - r) + L$$

$$S_n = L + (L - r) + (L - 2r) + \dots + (x_0 + 2r) + (x_0 + r) + x_0$$

اکنون از جمع طرفین دو تساوی بالا داریم:

$$2S_n = (x_0 + L) + (x_0 + L) + (x_0 + L) + \dots$$
$$+ (x_0 + L) + (x_0 + L) + (x_0 + L)$$

چون می‌دانیم که تعداد جمله های این تصاعد عددی متناهی برابر با nاست؛ بنابراین:

$$2S_n = n(x_0 + L) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(x_0 + L)$$

از طرفی چون جملهٔ عمومی در تصاعد عددی متناهی به صورت $L = x_0 + (n-1)r$ است، پس می توان مجموع جمله های تصاعد عددی متناهی را به صورت $S_n = \frac{n}{2}[2x_0 + (n-1)r]$ نیز مطرح کرد.

مثال. مجموع بیست جملهٔ تصاعد عددی ...,1,10,19,28 برابر با ۱۷۹۰ است؛ زیرا:

$$S_n = \frac{20}{2}[2(1) + (20-1)(9)] = 1790$$

قضیهٔ ۲

اگر S_n مجموع جمله های تصاعد عددی متناهی با جملهٔ عمومی x_n باشد، آن گاه:

$$x_n = S_n - S_{n-1}$$

برهان

می دانیم

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \quad (I)$$

$$S_{n-1} = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} \quad (II)$$

اکنون اگر تساوی (II) را از تساوی (I) کم کنیم، داریم:

$$x_n = S_n - S_{n-1}$$

قضیهٔ ۳

اگر S_n مجموع جمله های یک تصاعد عددی متناهی با جمله عمومی x_n و قدر نسبت rباشد، آن گاه:

$$r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

برهان

می دانیم:

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

$$S_{n-1} = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1}$$

$$S_{n-2} = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2}$$

از طرفی چون $r = x_n - x_{n-1}$ و طبق قضیهٔ ۲ داریم: $x_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$؛ لذا خواهیم داشت:

$$r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

آزمون. در یک تصاعد عددی، جملهٔ اول برابر ۷ و جملهٔ ششم برابر ۲۷ است. قدر نسبت این تصاعد عددی کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$x_n = x_0 + (n-1)r \Rightarrow 27 = 7 + 5r \Rightarrow r = 4$$

آزمون. در یک تصاعد عددی با جمله های فرد، قدر نسبت این تصاعد عددی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

جواب: گزینهٔ ۳ صحیح است؛ زیرا ۷ همواره عددی مخالف صفر و $r = x_n - x_{n-1}$ است.

آزمون. در یک تصاعد عددی، مجموع nجملهٔ اول برابر ۱۶۵، مجموع n-1 جملهٔ اول برابر ۱۳۵ و مجموع n-2 جملهٔ اول برابر ۱۰۸است. قدر نسبت این تصاعد عددی کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

جواب: گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$r = r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} \Rightarrow r = 165 - 2(135) + 108 \Rightarrow r = 3$$



نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

○ مرتضی بیات و مهدی حسنی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان

چکیده

تفهیم اعداد گنگ به سادگی بیانشان نیست. بیان نمادهای صوری $\sqrt{2}$، e و π، به مراتب راحت‌تر از درک عمیق آن است که آنها چه نوع اعدادی هستند. در این مقالهٔ کوتاه، کوشش خواهد شد گامی هر چند کوچک در جهت درک بهتر اعداد گویا و گنگ برداشته شود. اشاره به زمینه های تاریخی موضوع نیز به درک بهتر مطالب کمک خواهد کرد و نیز اثبات گنگ بودن اعداد $\sqrt{2}$، e و π به روش کوتاه و جدید و همچنین بررسی قضیه هالموس (صورت سادهٔ مسألهٔ هفتم هیلبرت) و قضیهٔ بیتی، پایان بخش این مقاله خواهد بود.

۱. ملاحظات تاریخی در باب اعداد گویا و گنگ

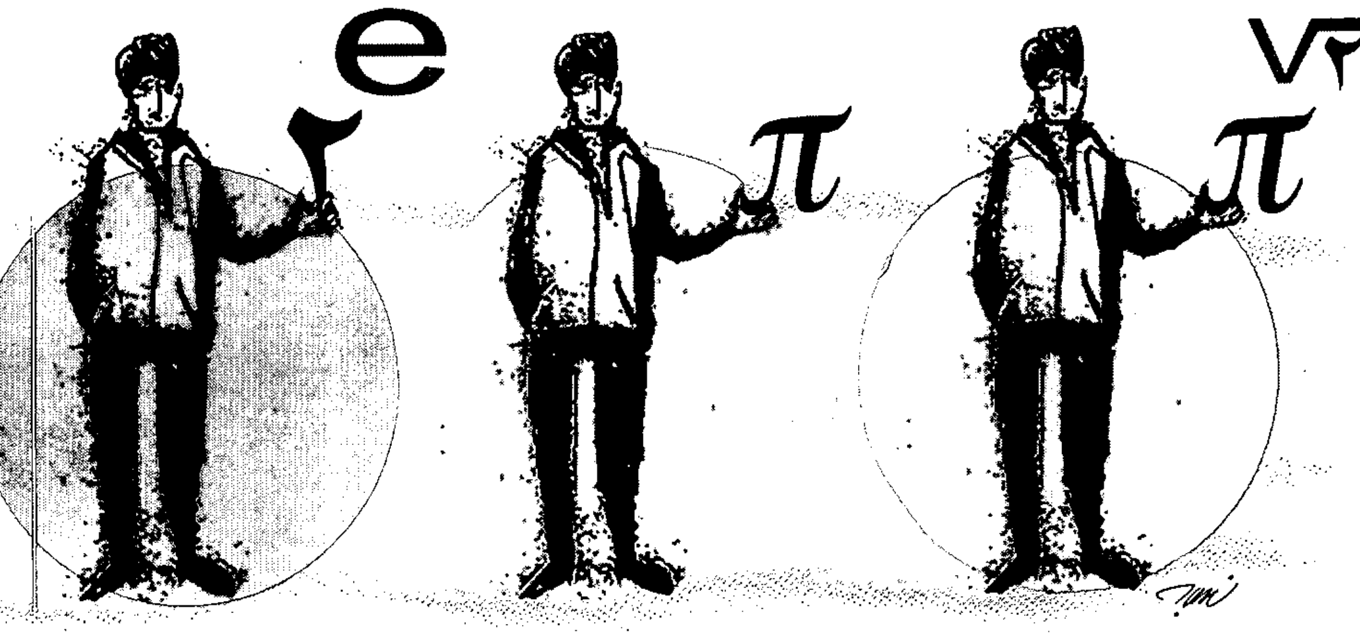
اعداد گویا و گنگ، سابقه‌ای قدیمی دارند. کشف گنگ بودن نسبت قطر مربع به ضلع آن، به فیثاغورثیان منسوب است. تئودوروس (اواخر قرن پنجم قبل از میلاد)، استاد افلاطون در ریاضیات، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه کرده است و گنگ بودن جذر ۳ و سایر اعداد طبیعی غیرمجذور کامل را تا ۱۷ به اثبات رسانید. یونانیان، به جای عدد مجرد، عمدتاً به کمّیات هندسی نظر داشتند. کارهای آنها در زمینهٔ اعداد گنگ در کتاب اصول هندسه، از اقلیدس، به اوج می‌رسد. بحث هندسی از کمّیات گنگ، به تدریج منجر به مفهوم عدد شد و مبحث اعداد گنگ، در کتاب‌های «حساب نظری» قرن ۱۵ م میلادی دیده می‌شود.

یکی از مشهورترین اعداد ریاضی، نسبت محیط دایره به قطر آن است، که از ایّام بسیار قدیم مورد توجه بوده و این عدد از زمان اویلر به بعد، به نام « π » خوانده می‌شود. عدد مشهور دیگر، عدد « e » می‌باشد و سابقه‌اش ظاهراً پس از کشف لگاریتم است. تا اواسط قرن ۱۸ میلادی، کسی نمی‌دانست که این اعداد گویا هستند یا گنگ، تا آن‌که لامبرت در ۱۷۶۱ گنگ بودن آنها را ثابت کرد. گنگ بودن e^2 در ۱۸۴۰ به وسیلهٔ لیوویل به اثبات رسید. امروزه می‌دانیم که همهٔ قوای طبیعی e و π و کثیرالجمله‌های صحیح بر حسب e یا π با ضرایب گویا، اعداد گنگ هستند. گنگ بودن اعداد 2^e، π^e و $\pi^{\sqrt{2}}$، عدد اویلر،

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right),$$

هنوز دانسته نیست، ولی می‌دانیم که اعداد $2^{\sqrt{2}}$ و e^{π} گنگ‌اند.

مسألهٔ جبری یا متعالی بودن یک عدد، خود مسألهٔ دیگری است. در این موضوع، سه مسألهٔ متمایز می‌توان طرح کرد؛ اوّل اثبات وجود اعداد متعالی (بدون الزام به عرضه کردن چنین اعدادی)، دوم عرضه کردن عددی متعالی، سوم ـ که به مراتب مشکل‌تر است ـ اثبات این‌که عدد معینی (نه عددی که بدین منظور ساخته شده است، بلکه اعدادی مانند e، π، و اعداد مشخص دیگر متداول در آنالیز) متعالی



هست یا نه. نخستین ریاضیدانی که دسته‌ای از اعداد متعالی را عرضه کرد، لیوویل است (۱۸۴۴). پس از وی، هرمیت، متعالی بودن e را ثابت کرد (۱۸۷۳)، و سپس، لیندمان متعالی بودن π را به ثبوت رسانید (۱۸۲۲). با اثبات قضیهٔ شگفت‌انگیز کانتور، معلوم شد که ـ به عبارت مجازی ـ تقریباً همهٔ اعداد متعالی هستند. در واقع، اعداد متعالی، اعداد استثنایی نیستند، بلکه اعداد غیرمتعالی اند که جنبهٔ استثنایی دارند.

در کنگرهٔ پاریس (سال ۱۹۰۰) هیلبرت توجه ریاضیون را به بیست و سه مسألهٔ لاینحل جلب کرد. هفتمین آنان، در متعالی بودن اعدادی بود به صورت a^b با مفروضات $a \neq 1$ و $b \neq 1$ جبری بودن a و b و گنگ بودن b. در ۱۹۳۴ ثابت شد که این اعداد جملگی متعالی هستند.

۲. عدد و تعبیر هندسی

در واقع، انسان از آن موقعی که تناظر یک به یک اعداد و نقاط روی یک محور را درک کرد، این قدرت آفرینش در انسان شکوفا شد و اندازه‌گیری طول یک پاره‌خط، شروع این خلاقیت بود. راه طبیعی اندازه‌گیری طول، این است که با خط‌کش که ابزار اندازه‌گیری است، شروع کنیم. اگر تکرار اندازهٔ خط‌کش ممکن باشد، آن را به دنبال هم کنار طولی که باید اندازه‌گیری شود، قرار می‌دهیم. در صورتی که سنجش کامل با چهار خط‌کش صورت گیرد، گوییم طول برابر با ۴ است. اگر سه طول چهار واحدی به دنبال هم قرار گیرند، تعداد ۱۲ خط‌کش اندازه‌گیری برای سنجش کامل تمام طول‌ها، لازم است. ملاحظه می‌کنیم که، اگر طول پاره‌خط، مضرب صحیحی از طول خط‌کش نباشد، با روش فوق اندازه‌گیری طول پاره‌خط امکان‌پذیر نیست. اگر معلوم شود که m واحد اندازه‌گیری برای سنجش n طول مساوی لازم است، در آن صورت طول مطلوب x در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$m = n \times x \qquad (1)$$

متأسفانه اگر بخواهیم اعداد طبیعی را به کار بریم، باید گفت که معادله (۱)، معمولاً جواب ندارد. یونانیان قدیم از این مسأله دوری می‌کردند، به این ترتیب بیان می‌نمودند، طول واحد اندازه‌گیری به نسبت $\frac{m}{n}$ است و این در واقع، نقطهٔ شروع آشنایی آنها با اعداد گویا (مُنطق) بود.

از اعداد می‌توانیم برای اندازه‌گیری طول، یا کمّیت‌های دیگر فیزیکی استفاده کنیم؛ ولی یونانیان می‌دانستند پاره‌خط‌هایی هم وجود دارند که طول آنها را نمی‌توان در «تئوری» دقیقاً با اعداد گویا اندازه گرفت. آنان هندسه‌دانان بزرگی بودند، یکی از قضیه‌های ساده، ولی عمیقشان، قضیهٔ فیثاغورث بود.

فلاسفهٔ مکتب فیثاغورث، البته با قضیهٔ فیثاغورث آشنا بوده‌اند و از استدلال‌هایی استفاده می‌کردند که در آن مساحت‌های اشکال مختلف به کار گرفته می‌شد.

به محض این‌که قضیهٔ فیثاغورث کشف شد، در محدودهٔ کوچکی باید توافق می‌شد که پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$، گنگ است. نتیجه با بهت و حیرت پذیرفته شد؛ حتی سعی گردید تا این «نقض کلّی» را مخفی نگه دارند، ارسطو در کتاب طبیعیات خود در باب عقاید فیثاغورث می‌گوید:



«... لیکن فیثاغورس یا اصحاب اوّلیهٔ او، به آسانی ثابت کرده بودند که مجذور هیچ عدد صحیحی نمی تواند دو برابر مجذور عدد دیگری باشد و به این جهت، طول ضلع یا طول وتر از مقادیر گنگ است؛ یعنی، هر واحد طول را هر اندازه کوچک اختیار کنید، اگر تعداد دفعاتی که واحد در طول ضلع تکرار می شود، بدون کسر باشد، در طول وتر بدون کسر نخواهد بود و بالعکس.»

همهٔ ما با کار پارچه فروشی آشنا هستیم؛ او میله‌ای به اندازهٔ یک متر در اختیار دارد. حال اگر از وی خواسته شود که دقیقاً $\sqrt{۲}$ متر پارچه جدا کند، آیا او قادر به انجام چنین کاری خواهد بود یا نه؟!

حتی اگر وی با وسیله‌ای، طول مترش را به n قسمت مساوی تقسیم کند، باز هم نمی‌تواند این کار را به طور دقیق با $\frac{۱}{n}$ مترش انجام دهد؛ زیرا اگر $\frac{۱}{n}$، مترش را در طول $\sqrt{۲}$ متر پارچه بسنجد، به طور طبیعی تعداد m تا $\frac{۱}{n}$ از طول $\sqrt{۲}$ متر پارچه بیشتر یا کمتر خواهد شد و در غیر این صورت، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{۲} = m \times \frac{۱}{n} = \frac{m}{n}, \qquad (۲)$$

که البته بعداً ثابت می‌کنیم که این تساوی هیچ گاه اتفاق نمی‌افتد. از این جا متوجه می‌شویم که قسمت اضافی یا کسری که در انتهای سنجش $\sqrt{۲}$ متر پارچه به‌وجود می‌آید، باید به طریقی صرف‌نظر شود. این عمل را «تقریب اعداد گنگ به کمک اعداد گویا» می‌گویند. هر قدر مقدار اضافی یا کسری کمتر باشد، «تقریب دقیق‌تر» خواهد بود و از این جاست که «مفهوم حد» ظاهر می‌شود. حال سعی می‌کنیم

ادامه در صفحه بعد

$\sqrt{2}$ را با اعداد گویا تقریب بزنیم. دانش‌آموزان دبیرستانی با محاسبهٔ حد،

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0, \qquad (3)$$

آشنا هستند؛ ولی کاربرد دقیق آن را نمی‌دانند. بگذارید بدون استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را به کمک حد مذکور به دست آوریم. هر گاه تعداد مراحل (یعنی n) بیشتر شود به تقریب بهتری برای $\sqrt{2}$، می‌رسیم:

$$n=1 \to (\sqrt{2}-1)^1 \approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1$$
$$n=2 \to (\sqrt{2}-1)^2 \approx 0 \to 3-2\sqrt{2}\approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1/5$$
$$n=3 \to (\sqrt{2}-1)^3 \approx 0 \to -7+5\sqrt{2}\approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1/4$$
$$n=4 \to (\sqrt{2}-1)^4 \approx 0 \to 17-12\sqrt{2}\approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1/4166$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$، به روش‌های مختلفی در مرجع [۶] بیان شده است؛ اما در این‌جا یک برهان ساده و جدیدی را از [۵] بیان می‌کنیم.

قضیه. $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات. فرض کنیم $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ و $\frac{m}{n}$ کوچک‌ترین کسر باشد، از طرفی دیگر داریم $\sqrt{2}=\frac{2n-m}{m-n}$ و $\frac{2n-m}{m-n}$ کوچکترین کسر می‌باشد، که این یک تناقض است.

(در اثبات قضیهٔ اخیر، سه موضوع حائز اهمیت است، صورت و مخرج کسر دوم به‌ترتیب کوچک‌تر از صورت و مخرج کسر اوّل است و نیز هنوز صورت و مخرج کسر دوم مثبت‌اند؛ در ضمن این دو کسر با هم برابرند).

به همین نحو، می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی k، که مربع کامل نیست، $\sqrt{k}$ گنگ است. برای این کار فرض کنیم که j عددی طبیعی باشد؛ به‌طوری که $j<\sqrt{k}<j+1$، اگر داشته باشیم $\sqrt{k}=\frac{m}{n}$ و $\frac{m}{n}$ کوچک‌ترین کسر باشد، به‌طوری که $m,n\in Z^+$، بنابراین داریم؛ $\sqrt{k}=\frac{kn-jm}{m-jn}$، که $\frac{kn-jm}{m-jn}$ کوچک‌ترین کسر است؛ که این یک تناقض است، پس $\sqrt{k}$ گنگ است.

ادامه دارد...

(دارای مقدمه و پنج باب)، مقاله‌ی دوم در اوقات و طالع هر وقت (در بیست و دو باب) و مقاله‌ی سوم در سیر ستارگان (در سیزده باب)، مقاله‌ی چهارم در دیگر اعمال نجومی (در دو باب).

در این زیج جدول جیب‌ها[3] از صفر تا نود درجه دقیقه به دقیقه با پنج رقم شصتگانی حساب شده و جدول ظل‌های آن از صفر تا ۴۵ درجه، دقیقه به دقیقه و از ۴۵ درجه تا ۷۹ درجه و ۵۰ دقیقه، هر ده دقیقه به ده دقیقه با پنج رقم شصتگانی حساب شده و هر دو جدول دارای ستون تفاضل‌های جدولی نیز هست. این جدول‌ها براساس محاسبه‌ی دقیق جیب یک درجه به وسیله‌ی حل معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax = b + x^3$ که مربوط به تثلیث زاویه است تهیه شده و دقّت آنها تحسین آمیز است. در معادله‌ی فوق x مساوی با جیب یک درجه است. بنا به قول عبدالعلی بیرجندی برای حل معادله‌ی فوق دو روش به کار رفته است که یکی از آنها از خود الغ بیگ و دیگری اثر فکر غیاث‌الدین جمشید کاشانی است. کاشانی این معادله را با روش تکراری فوق‌العاده جالب توجهی حل کرده و از محاسبات او مقدار زیر برای سینوس یک درجه به دست می‌آید:

sin ۱° = ۰.۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۷۱

به علّت اهمیّتی که این زیج دارا بوده بارها گزیده‌های به زبان‌های فرانسوی و انگلیسی و عربی از آن انتشار یافته که معروف‌ترین آن‌ها مقدمات زیج الغ بیگ است که لویی آملی سدّیو در سال ۱۸۴۷ میلادی به زبان فرانسوی انتشار داده است.

نمای بیرونی رصدخانه‌ی سمرقند



نمای داخلی رصدخانه‌ی سمرقند



زیرنویس

۱. شاهزاده بزرگ

۲. زیج گورکانی یا زیج سلطانی نیز گفته می‌شود.

۳. سینوس‌ها

● برگرفته از کتاب ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی / تألیف ابوالقاسم قربانی

فراخوان پنجمین جشنواره کتاب‌های آموزشی رشد

(دوره آموزش متوسطه)
آبان ماه ۱۳۸۴

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

نشانی

تهران ● ایرانشهر شمالی ● ساختمان شماره چهار وزارت آموزش و پرورش (شهید سلیمی) ● پلاک ۲۶۸ ● دفتر انتشارات کمک آموزشی ● طبقه پنجم ● دبیرخانه جشنواره کتاب‌های آموزشی رشد ● صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ ●

تلفن: ۸۳۰۶۰۷۱
۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۳۷۳)

دورنگار: ۸۳۰۱۴۷۸

www.samanketab.com

E-mail:
info@samanketab.com

هدف‌ها

۱. تبیین و انتقال سیاست‌ها، هدف‌ها و برنامه‌های آموزش و پرورش در حوزهٔ انتشار کتاب‌های آموزشی؛
۲. ارزشیابی کتاب‌های آموزشی موجود، به منظور انتخاب و معرفی کتاب‌های برگزیده؛
۳. انتخاب نویسندگان و ناشران برتر در حوزهٔ تألیف و نشر کتاب‌های آموزشی؛
۴. فراهم آوردن امکان تبادل نظر میان پدیدآورندگان کتاب‌های آموزشی؛
۵. شناخت مشکلات و تبیین راهبردهای مناسب برای انتشار کتاب‌های آموزشی.

برنامه‌ها

جشنواره در دو بخش برگزار خواهد شد:

الف) بخش انتخاب، معرفی و تقدیر

در این بخش، مجموعه آثار رسیده بررسی می‌شوند و از میان آن‌ها در هر یک از گروه‌های هفتگانه مربوط به حوزهٔ آموزشی زیر انتخاب، معرفی و تقدیر خواهند شد. متوسطه نظری شامل: «تعلیم و تربیت دینی و قرآن، زبان و ادبیات فارسی، اقتصاد، تاریخ، تربیت‌بدنی و آمادگی دفاعی، جغرافیا، ریاضی و آمار، روانشناسی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، زبان خارجی، شیمی، فیزیک، فلسفه و منطق، علوم اجتماعی، عربی» و فنی و حرفه‌ای و کاردانش شامل حوزه‌های آموزشی: عمران (ساختمان و نقشه‌برداری)؛ مکانیک (نقشه‌کشی، ساخت و تولید، صنایع فلزی، مکانیک خودرو، تأسیسات و صنایع چوب و کاغذ)؛ برق (الکترونیک و الکتروتکنیک)؛ مواد (متالوژی، صنایع شیمیایی، صنایع نساجی، سرامیک، معدن، سیمان)؛ علوم و فنون دریایی (ناوبری، مکانیک موتورهای دریایی، الکترونیک و مخابرات دریایی)؛ هنر (چاپ، نقاشی، طراحی و دوخت، نقشه‌کشی، معماری، صنایع دستی، سینما، نمایش، چاپ دستی، مجسمه‌سازی، موسیقی ایرانی، مرمت آثار فرهنگی، گرافیک، پشتیبانی صحنه و عمومی)؛ حسابداری بازرگانی؛ بهداشت و کودکیاری؛ کامپیوتر (شامل متوسطه نظری هم می‌باشد)؛ مدیریت خانواده و کشاورزی (امور دامی، امور زراعی و باغی، ماشین‌های کشاورزی و صنایع غذایی).

کتاب‌های آموزشی شامل هفت گروه هستند:

۱. دانش‌افزایی دانش‌آموزان؛
۲. پرورش مهارت‌های فرایندی، علمی، پروژه‌ای و هنری دانش‌آموزان؛
۳. دانش‌افزایی، مهارتی و روشی برای معلمان؛
۴. کار و فعالیت‌های یادگیری برای دانش‌آموزان؛
۵. تمرین به منظور تثبیت، تقویت و آموزش جبرانی یادگیری دانش‌آموزان؛
۶. سنجش و ارزشیابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان؛
۷. فعالیت محور در چارچوب هدف‌های برنامه‌های درسی خاص برای دانش‌آموزان

توجه:

تشکل‌ها و انجمن‌های علمی و فرهنگی غیردولتی حوزهٔ تولید کتاب‌های آموز... که تمایل دارند، در داوری جشنواره مشارکت داشته باشند، می‌توانند با معرفی‌نام... جلسه روز سه‌شنبه ساعت ۱۰ صبح مورخ ۸۴/۳/۳ (واقع در طبقه سوم ساختم... دفتر) شرکت نمایند.

ب) بخش فعالیت‌های جنبی

۱. تقدیر از ناشران برگزیده در حوزهٔ تولید کتاب‌های آموزشی
۲. انتشار خبرنامهٔ آینه و ویژه‌نامهٔ جشنواره
۳. برگزاری نمایشگاه کتاب‌های آموزشی، مرتبط با موضوع جشنواره
۴. استقرار غرفهٔ ارزشیابی، مشاوره و اطلاع‌رسانی
۵. برگزاری میزگردهای علمی کاربردی.

توجه:

هیات تحریریهٔ ویژه‌نامهٔ جوانه از صاحب‌نظران دعوت می‌کند، مقالات و آثار خو... در زمینهٔ موضوع‌های مرتبط با هدف‌های جشنواره به آدرس دبیرخانه ارسال کن...

شرایط ارسال آثار

دو نسخه از کتاب‌های آموزشی در فاصله سال‌های ۱۳۸۱ تا ۱۳۸۳ که برای او... بار چاپ شده باشند.

زمان ارسال آثار

مشخصات اثر را بر روی یک برگه مرقوم فرمایید و به همراه هر یک از کتاب‌ها حدا... تا پایان وقت اداری روز سه‌شنبه ۳۱ خردادماه ۱۳۸۴ به دبیرخانهٔ جشنواره ارسال فرمای...

توجه:

مشخصات اثر: نام کتاب، نویسنده، تاریخ چاپ اول، تاریخ آخرین چاپ، گروه س... مخاطب، ناشر، حوزه آموزشی، چکیدهٔ کتاب (معرفی در چند سطر)، این اثر در ک... یک از گروه‌های هفتگانه قرار می‌گیرد؟ و نشانی و تلفن ارسال کننده اثر.

دوره‌ی چهاردهم، شماره‌ی ۴
تابستان ۱۳۸۴، بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان

مجله ریاضی

۴۶

www.roshdmag.org

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

منطق ریاضی

نظریه مقدماتی مجموعه ها

یک مسأله از بهینه سازی و یک پارادوکس



روش ارشمیدس برای محاسبه عدد π

تعیین وضع نقطه و صفحه به هم



اصلا از اصل صاغان (= چغان، قریه ای از مرو و رود خراسان) بود و در بغداد می‌زیست و در ذیقعده ی سال ۳۷۹ در بغداد درگذشت.

وی از منجمان بزرگ و علمای ریاضی و در علم هندسه و هیأت از اساتید مسلّم عصر خود بود و در ساختن اسطرلاب و آلات رصد مهارتی بسزا داشت و در آنها و بخصوص در اسطرلاب تصرفات بدیع و نیکو کرد و به همین مناسبت به اسطرلابی مشهور بود. سال ها در بغداد به تدریس اشتغال داشت و شاگردانی تربیت کرد که هر یک به استفاده از درس وی افتخار می کردند. سلاطین آل بویه و خلفای عباسی وی را محترم می داشتند.

چون شرف الدوله (پسر عضدالدوله) که از ۳۷۶ تا ۳۷۹ حکومت کرد به بغداد رفت و رصدخانه ای بنا کرد و ویجن بن رستم کوهی را به رصدکواکب گماشت، صاغانی یکی از راصدان و علمایی بود که به درستی رصد کوهی شهادت دادند این رصدها به سال ۳۷۸ صورت گرفت.

ابونصر عراق مقاله ای دارد در باب منازعه ای که بین ابوحامد صاغانی و منجمان وی درباره ی اعمال اسطرلاب روی داده بود. در آن مقاله ابونصر نشان داده است که حق با صاغانی بوده است.

و نیز بنا به گفته ی بیرونی در کتاب تحدیدنهایات الاماکن، ابوحامد صاغانی در کتاب قوانین علم الهیئة آورده است که در سال ۳۷۴ با حلقه ای به قطر شش وجب و تقسیم شده به تقسیمات پنج دقیقه ای در محلّی واقع

مشاهیر ریاضی مسلمان

ابوحامد احمدبن محمد صاغانی اسطرلابی منجم و ریاضیدان ایرانی

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مجله ریاضی
رشد برهان متوسطه

دورهٔ چهاردهم، شماره ۴
تابستان ۱۳۸۴
بها: ۲۵۰۰ ریال
تیراژ: ۱۴۰۰۰ نسخه
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۱۱۱۰



یادداشت سردبیر

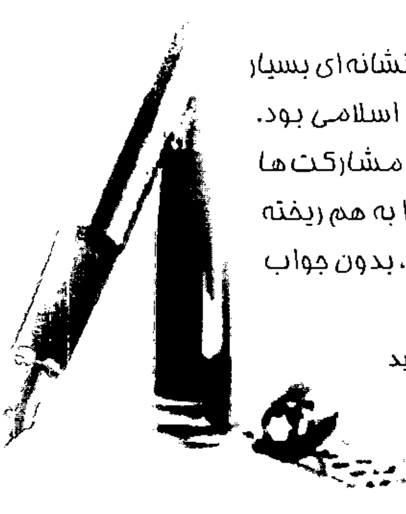
بارها از طرف مقام معظم رهبری و دست اندرکاران مسائل آموزشی و تربیتی بر لزوم توجه به مسائل سیاسی و اجتماعی دانش آموزان و دانش پژوهان ایران اسلامی تأکید شده است. این تأکیدات به این معنی است که شما دانش آموزان می بایست در کنار فعالیت های علمی خود، فعالیت های اجتماعی و سیاسی نیز داشته باشید و مجموعه ی این فعالیت ها را شکل دهنده و سازنده ی شخصیت فردی خود محسوب کنید.

رشد علمی، اگر بدون تهذیب نفس باشد، گرچه ممکن است فرد را به مدارج و مراتب دنیوی بالایی برساند، امّا میوه و ثمره ی آن لزوماً موجب کمال فردی و اجتماعی نخواهد بود.

کتاب آسمانی ما قرآن، پیامبر (ص) و معصومین ما (ع) به ما آموخته اند که فرد نباید فقط انبانی از معلومات و دانستنی ها باشد، بلکه در کنار این علوم و همسو با جامعه ی اسلامی، بایستی فردی مفید و تأثیرگذار در زمینه های اجتماعی و سیاسی باشد و برای سایر نیازهای فطری و روحی خود پاسخی شایسته داشته و بتوانیم اهداف خود را در آینده ترسیم کنیم.

شرکت شما دانش آموزان فهیم در فعالیت هایی همچون بسیج دانش آموزی، انجمن های اسلامی، راه پیمایی ها و بویژه انتخاب اخیر ریاست جمهوری، مبیّن این نکته ی مهّم است که جامعه ی ما، دانش آموزانی اندیشمند، متفکر و آینده نگر دارد.

حضور فراگیر و گسترده ی شما دانش آموزان در این انتخابات نشانه ای بسیار مثبت و تعیین کننده از مشارکت و هم بستگی امّت ایران اسلامی بود. دشمنان اسلام و نظام اسلامی ما روی تک تک این حرکت ها و مشارکت ها معادله ها می بندند و این حضور همه جانبه، معادله های آن ها را به هم ریخته و به آن ها ثابت کرد که دستگاه معادله ی تعدّی به نظام اسلامی، بدون جواب و ریشه است!



مؤید و پیروز باشید

از تاریخ بیاموزیم

مرحلهٔ بالای یگانگی دانش ریاضی
ساز و کار تکامل ریاضیات نظری

۱۹

○ پرویز شهریاری

اشاره

در شمارهٔ قبل دربارهٔ بحران بلوغ ریاضیات نظری و کشف اندازه ناپذیرها (اعداد گنگ) بحث شد، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

دگرگونی دانش نظری ریاضیات، نتیجه‌ای است از فعالیت نظری ذهنی؛ و به همین مناسبت تصادفی می‌باشد و نتیجه‌ای است از رابطهٔ بین دانشمندان و مکتب‌های علمی، علاقه‌ها و بی‌علاقگی‌های شخصی، به ذوق و عادت و به‌طور خلاصه، به انسان بستگی دارد. با وجود این، می‌توان سمت‌گیری لازم تکامل ریاضیات نظری، قانون‌مندی‌های کلی و ساز و کار تکامل شیوهٔ نظری سازماندهی دانش ریاضی را دنبال کرد. برای این‌که کردار این ساز و کار را کشف و میزان تأثیر و امکان عمل آن را مشخص کنیم، باید به تاریخ مراجعه کنیم.

ولی تاریخ در برابر گنجینه‌ای که در اختیار ما می‌گذارد، انتظار دارد به شرایط آن تن دهیم؛ شرایط مشخص کردن از هم‌پاشیدگی‌ها و مرحله‌های «سایدگی» ساز و کار تکامل در تاریخ هر روندی و هر جریانی به صورتی خاص فرامی‌رسد؛ به نحوی که به مکان و زمان خاصی مربوط است. جداکردن حالت‌های عام و آن‌چه عمومیت دارد، این خطر را در بر دارد که حالت‌های خاص را از دست بدهیم و درنتیجه، تنوع اولیه را فراموش کنیم و در آرامش حالت‌های مشابه و بدون اختلاف فرورویم. بسیاری از بررسی‌های کلی نمونه‌ای و مشخصی وجود دارد که نمی‌توان آن‌ها را سرمشق قرار داد.

اگر طرح منطقی ساز و کار تفرق و تجمع دانش نظری ریاضیات را، بدون تطبیق و مقایسهٔ با تاریخ واقعی بدهیم، آن‌وقت، درک موضوع و روش‌های ریاضیات نظری که بر این ساز و کار تکیه دارد، «فربه» می‌شود و مضمون خود را از دست می‌دهد؛ یعنی مفهوم انتزاعی آن برای مطالعهٔ تکامل واقعی ریاضیات «لاغر» می‌شود و به این جا می‌رسد که یا به این انتزاع‌ها، اضافه‌هایی شبیه تصورهای تاریخی جذب شود و به خودش محدود شود. در حالت اول، تاریخ به صورت رشته‌ای از مثال‌ها درمی‌آید و به بیگانه‌ای آزاردهنده برای ما تبدیل می‌شود؛ و در حالت دوم، خودمان را اسیر مجموعه‌ای بی‌حاصل کرده‌ایم که مرزهای غیرقابل عبور خصلت‌های عمده، آن را محدود کرده است.

برای این‌که از صورت واقعی ریاضیات و دگرگونی‌های آن دور نشویم، باید در سطح تاریخ به عنوان یک واحد منطقی توقف کنیم. روش‌شناسی علمی در حوزهٔ تاریخ منطقی کار می‌کند و پژوهشگری که این حوزه را ترک کند و از حوادث واقعی تاریخی اجتناب ورزد و از آن‌ها جدا شود، مثل این است که در لبهٔ پرتگاه قدم می‌زند. ساز و کار دگرگونی شیوهٔ نظری سازماندهی، به این جهت

وجود دارد که طناب حوادث واقعی، آن را نگه می‌دارد و در بیرون آن، نمی‌توان دربارهٔ این ساز و کار حتی فکر کرد. این را هم یادآوری کنیم که، تاریخ منطقی کم‌تر از تاریخ واقعی و حادثه‌ای، واقعی نیست. درواقع؛ در این‌جا حوادث تاریخی را با دید دیگری نگاه می‌کند: حوادث را با توجه به ارزش روش‌شناختی آن‌ها و جنبهٔ منطقی آن‌ها می‌نگرد.

اهمیت ساز و کار تکامل روش نظری سازماندهی دانش ریاضی، در تأثیر متقابل دیالکتیکی روندها و جریان‌های تفرق و تجمع دانش است. ریاضیات نظری از راه اثبات و مناسب بودن درک آن، به نحوی که همهٔ بخش‌های دانش نظری در ارتباط متقابل باشند، تمامیت و یکپارچگی خود را تحقق می‌بخشد. اثبات، وسیلهٔ نیرومندی برای تجمع است، که به یاری آن، شباهت ساختارهای نظری، به طور دائم ظاهر می‌شود؛ به یاری اثبات است که نظریه‌های مختلف ریاضی، در درون یک ریاضیات واحد، تعبیری کلی به دست می‌آورند و به عنوان بخشی یا عنصری از یک ساختار عمیق‌تر فهمیده می‌شوند. با وجود این، همین استفاده از اثبات (و نه با نیروی کم‌تری) دلیلی برای تفرق دانش هم هست؛ آن را بغرنج‌تر می‌کند و گزاره‌ها و حکم‌های ریاضی را به شاخه‌های جداگانه تقسیم می‌کند و اثبات، چه به‌عنوان جمع‌کننده و چه به عنوان متفرق‌کننده، به‌طور دائم «بازسازی» و از تناقضات «پاک» می‌شود. تضاد روش‌شناختی، موجب حرکت روندهای تفرق و تجمع دانش ریاضی است و این وضع، تا وقتی این جریان‌ها در تعادل دینامیکی قرار دارند، تا وقتی «نیروهای محرک» تفرق و تجمع یکدیگر را خنثی می‌کنند، برقرار می‌ماند.

جریان‌های تفرق و تجمع، برعکس و به‌نوبهٔ خود، بر درک ماهیت اثبات اثر می‌گذارند؛ ماهیتی که بسیار «انعطاف‌پذیر» است. از جمله، اگر تفرق نیرو بگیرد، آن وقت اثبات به این معنا گرفته می‌شود که دانش و آگاهی، نوعی متمرکز و دور یک مرکز جمع شود. نظر اثبات بر قیاس قرار می‌گیرد و راه خود را از کلی به جزئی جست‌وجو می‌کند.

□

نخستین هدف ریاضیات نظری، با استفاده از بستگی‌های نظری (رابطه‌های منطقی) تأمین می‌شود. اثبات در آغاز از مفهوم‌های اولیه‌ای که مربوط به بستگی‌های نظری در صورت نخستین آن است، شروع می‌شود. با یاری گرفتن از این رابطه‌های «پایه» که از ریاضیات انتخاب شده است، نقطهٔ مربوط به «گُل‌زدن» نظری ریاضی انتخاب می‌شود. در جریان «بحران‌ها» و «تجدید سازمان‌های» بستگی‌های نظری این «گُل‌زدن»، راه اصلی خود را می‌نمایاند و ساز و کار واقعی تفرق و تجمع مفهوم‌های ریاضی روشن می‌شود و درنتیجه، ساز و کار بستگی‌های نظری را آشکار می‌کند.

آگاهی متفرق و جدا از هم، اغلب در آغاز به صورت به‌هم‌پیوسته، ظاهر می‌شوند. این برتری تفرق اولیه در ریاضیات نظری که یگانگی آن را نقض می‌کند، پیش‌تر کلی بودن خود را در ریاضیات نظری نشان می‌داد. برای نمونه، اگر تا پیش از بحران مربوط به محاسبهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها، مفهوم‌های دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری، براساس مشترکی قرار داشت که دلیل وجودی آن‌ها را با هم توجیه می‌کرد، بعد از بحران، به کمک قضیه‌های تازه، این دو بخش به هم پیوستند و کلی بودن نخستین خود را از دست داد. به‌عنوان مثال، عمل دیفرانسیل‌گیری در R^2، هیچ شباهتی با جست‌وجوی حالت‌ها، ضمن حل مسأله‌های «هم‌پیرامونی» ندارد؛ یعنی رابطهٔ منطقی بین «گسترش» ساختمانی وجود ندارد و به امکان تجدید بنا و استفاده از موضوع‌های تازه بستگی دارد. «خرابی» مفهوم کلی نخستین از نظر ارتباط‌های منطقی، به‌طور مستقیم از حرکت نظام‌های ریاضی بر یکدیگر به دست می‌آید.

این روند را اندکی مفصل‌تر روی نمونهٔ نظریه‌های هندسی بررسی می‌کنیم، که جدا از هم و به‌طور مستقل راه خود را پیش گرفتند تا به مرز خود رسیدند. پس از بحران‌های ریاضی، رابطه‌های منطقی هندسهٔ نظری که در بخش دیفرانسیل به‌وجود آمد (از نظر تاریخی، این روند، در همان محدودهٔ زمانی پیش آمد)؛ «در پایان سدهٔ هجدهم، هندسه به دوران شکوفایی خود افتاد... باید یادآوری کرد که در پیشرفت هندسه، تنها تکامل هندسه‌ای که پیش از آن وجود داشت، مورد نظر نبود، بلکه گسترش مستقل هندسه در جهتی که در نظر اول با هندسهٔ پیشین تفاوت داشت، مورد توجه قرار گرفت. به نظر می‌رسید که به جای «هندسه‌ای» دیگر، «هندسه‌ای» مورد توجه بود که با همان روش‌ها و تعریف‌های هندسی پاگرفته است.»[1] اختلاف نظریه‌های هندسی از یکدیگر، مربوط به مکتب‌های ذهنی

دانشمندان بود که تصورهای «خنده‌داری» از مکتب‌های هندسی داشتند؛ برخی برادران هندسهٔ ترکیبی، هندسه‌دانانی را که در استدلال‌های خود از هندسهٔ متری استفاده می‌کنند، به رسمیت نمی‌شناسند.[۲] تفرق در هندسه در میانه‌های سدهٔ نوزدهم به اوج خود رسید[۳] و فولیکس کلاین در «برنامهٔ ارلانگن» به آن اشاره می‌کند: «... هندسه در ذات خود یگانه است؛ ولی به دلیل پیشرفت تند خود در سال‌های اخیر، به شاخه‌های جدا از هم تقسیم شده است، که همچنان به پیشرفت خود، جدا از یکدیگر و به طور مستقل ادامه می‌دهند.»[۴]



اگر «از بیرون» به تفرق دانش ریاضی نظری بینداریم، لایه‌بندی شدن نظریهٔ دانش ریاضی و طبقه‌بندی شدن ساختمان آن را می‌بینیم؛ ولی اگر «از درون» به آن نگاه کنیم، تکامل این ساختمان دیده می‌شود. بنابراین کافی نیست به بررسی تفرق نظریهٔ ریاضی تنها از بیرون قناعت کنیم، لازم است به رشد نظریه‌های دانش ریاضی، همچون پیشرفت نظریه‌های ریاضی بنگریم. این روش را می‌توان روی نمونهٔ دانش ریاضی و به صورتی که با هندسهٔ مقدماتی برخورد داشتیم به‌کار برد (هندسه به صورتی که در «مقدمات» اقلیدس وجود دارد). به‌ویژه رشد این نظریهٔ ریاضی با نشان دادن اختلاف ریاضیات نظری جدید زمان ما ریاضیات نظری کلاسیک قابل لمس است.

تا پیش از بحران رابطه‌های منطقی ریاضیات نظری دوران ما، تنها روش قیاسی از کلی به طرف جزئی اقلیدس، به عنوان عاملی منفی، در راه پیشرفت ریاضیات کهن خودنمایی می‌کرد. تا پیش از بحران، می‌فهمیدند که تکیه‌گاه ارشمیدس کاستی‌هایی در زمینهٔ بررسی حرکت و پیوستگی دارد؛ ولی هنوز نمی‌توانستند تغییر مناسب را برای اصل موضوع‌های اقلیدس، به‌طور کامل پیشنهاد کنند. بعد از بحران روابط منطقی و مانعی که در سر راه اصل موضوعی کردن به صورت منفی جلوه می‌کرد، به مانعی مثبت تبدیل شد. انتقادهای کلی مربوط به کافی نبودن روابط نظری پیشین، جای بحث‌های مشخص مربوط به عدم استفاده از امکان‌های هندسهٔ مقدماتی را گرفت.

نیکلاس لباچوفسکی در سال ۱۸۲۹ نوشت: «در زمان نیوتن و دکارت، تمامی ریاضیات تحلیلی شده بود و چنان گام‌های تندی به جلو برمی‌داشت که دانشمندانی را که بدون آن می‌توانستند پیش بروند، به کلی عقب گذاشت و همهٔ آن‌هایی را که به «مقدمات» اقلیدس مشغول بودند، کنار زد. بنابراین با وجود قدیمی بودن و ژرف بودن آن‌ها، و با وجود موفقیت‌های درخشانی که در این زمینه پیدا شده بود، تاکنون همان اصل نخستین نگه داشته شده است.»[۵] دشواری اصلی هندسهٔ اقلیدسی، در این بود که به یاری روابط منطقی، نیاز به هندسهٔ هیپر بولیک (هذلولوی) داشت که جانشینی برای هندسهٔ اقلیدسی باشد.[۶] هندسهٔ مقدماتی تحت تأثیر رابطه‌های نظری، مرزهای بنیان‌های هندسهٔ قبلی را شکست و خود را بازسازی کرد. همه چیز برای اصل توازی اقلیدس متمرکز شد و دیدگاه تازه‌ای به ریاضیات رسمی افزوده شد.

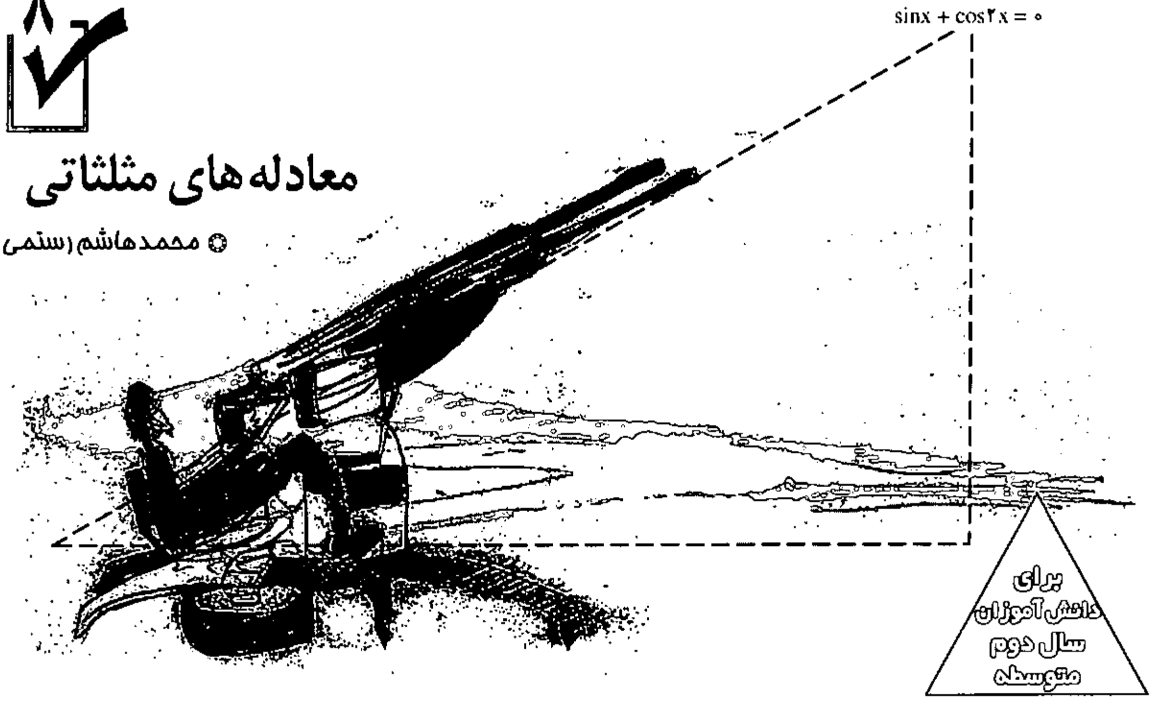
زیرنویس ....

۱. دوسینگ (هـ. ا). «بنیان پیدایش گروه. بررسی تاریخی ریاضی».
۲. فولیکس کلاین. سخنرانی دربارهٔ پیشرفت ریاضیات در سدهٔ نوزدهم.
۳. ویژگین (و. پ). دربارهٔ برنامهٔ فولیکس کلاین. بررسی تاریخی- ریاضی.
۴. فولیکس کلاین. شرح کوتاهی از بررسی‌های هندسی تازه («برنامهٔ ارلانگن»).
۵. لباچوفسکی، میکل ایوانویچ، دربارهٔ «مقدمات» هندسه.
۶. ولی ساختن دستگاه اصل موضوع‌هایی که بتواند آکرناتیو اصل موضوع‌های اقلیدسی باشد، یعنی هندسهٔ هیپر بولیک، تنها بعدها و در جریان تحکیم منطقی رابطه‌ها و در جریان اصل موضوع‌های هیلبرت پدید آمد. هندسهٔ هیپر بولیک تنها در زمان کاربرد نظریهٔ توازی به‌وجود آمد. مفهوم حد هم با به کار گرفتن مفهوم حرکت، با استفاده از استقرای ریاضی پا گرفت.

۸

معادله‌های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی



حل معادله‌های غیرسادهٔ مثلثاتی

اشاره: در شمارهٔ قبل راجع به معادله‌های غیر سادهٔ مثلثاتی بحث کردیم و روش حل معادله‌هایی را بررسی کردیم که به صورت $A \times B \times C \times ... = 0$ قابل تبدیل به این صورت هستند و در آن‌ها $A = 0, B = 0, C = 0$ و... معادله‌های سادهٔ مثلثاتی‌اند، اینک در ادامهٔ مطلب داریم:

۲. معادله‌های غیر سادهٔ مثلثاتی که بر حسب یک نسبت از یک زاویه به شکل معادله‌های جبری قابل حل، مانند معادلهٔ درجهٔ دوم $(ax^2 + bx + c = 0)$، معادلهٔ درجهٔ سوم $(ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$، معادلهٔ دومجذوری $(ax^4 + bx^2 + c = 0)$ و... هستند یا با انجام تغییرات مناسب و مجاز در معادلهٔ مثلثاتی داده شده، قابل تبدیل به معادله‌های جبری قابل حل هستند. برای حل این گونه معادله‌های مثلثاتی، پس از انتخاب مجهول کمکی مناسب و تبدیل آن‌ها به معادله‌های جبری قابل حل، این معادله‌های جبری را حل می‌کنیم، آن‌گاه جواب‌های قابل قبول به دست آمده برای این معادله‌ها را، به جای مجهول کمکی قرار می‌دهیم تا معادله‌های سادهٔ مثلثاتی به دست آیند. با حل این معادله‌های سادهٔ مثلثاتی، جواب‌های معادلهٔ داده شده مشخص می‌شوند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱. معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: به طوری که دیده می‌شود، معادلهٔ داده شده، معادله‌ای درجهٔ ۲ بر حسب $\cos x$ است. بنابراین با فرض $\cos x = y$، خواهیم داشت:

$$\cos x = y \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow y = -1 \; , \; y = \frac{1}{2}$$

چون $-1 \le \cos x = y \le 1$ است، پس هر دو جواب به دست آمده، قابل قبول هستند و داریم:

$y = -1 \Rightarrow \cos x = -1 = \cos \pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi$ یا

$x = 2k\pi + \pi$ یا

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2kn \pm \frac{\pi}{3}$

بنابراین جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی داده شده، عبارتند از:

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi + \pi$

مثال۲. معادله مثلثاتی $2\sin^2(x + \frac{5\pi}{8}) - \cos(x + \frac{\pi}{8}) - 3 = 0$ را حل کنید.

حل: چون $(x + \frac{5\pi}{8}) - (x + \frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{2}$، یعنی تفاضل دو زاویه $\frac{\pi}{2}$ است، پس داریم:

$$\sin(x + \frac{5\pi}{8}) = \cos(x + \frac{\pi}{8})$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$2\cos^2(x + \frac{\pi}{8}) - \cos(x + \frac{\pi}{8}) - 3 = 0$$

فرض می‌کنیم $\cos(x + \frac{\pi}{8}) = y$ باشد، در این صورت داریم:

$$2y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{+1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow y = -1 \text{ و } y = \frac{3}{2} > 1$$

تنها جواب $y = -1$ قابل است؛ بنابراین داریم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{8}) = -1 = \cos\pi \Rightarrow x + \frac{\pi}{8} = 2kn \pm \pi$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{8} = 2kn + \pi \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{7\pi}{8}}$$

پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{8}$ است.

مثال۳. معادله $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cotg} x = 1$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\operatorname{cotg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = kn + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

با توجه به این که دامنهٔ تعریف تابع $x \ne k\pi$ است، جواب بالا قابل قبول است.

مثال۴. معادله   را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ است؛ بنابراین داریم:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-4\sin^3 x + 5\sin x - 1 = 0$$

فرض می‌کنیم $\sin x = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$-4y^3 + 5y - 1 = 0 \Rightarrow 4y^3 - 5y + 1 = 0$$

چون مجموع ضریب‌های این معادله صفر است $(4 - 5 + 1 = 0)$، یکی از جواب‌های این معادله مساوی ۱ است، پس این معادله بر $y - 1$ بخش‌پذیر است؛ از آن‌جا خواهیم داشت:

$$4y^3 - 5y + 1 = (y - 1)(4y^2 + 4y - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ و } 4y^2 + 4y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} & \text{ق ق} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$y = 1 \Rightarrow \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$y = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

مثال۵. معادلهٔ $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ است، بنابراین داریم:

$$\sin^4 x + (1-\sin^2 x)^2 - \frac{5}{8} = 0 \Rightarrow 2\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{8} = 0$$

معادلهٔ بالا یک معادلهٔ دو مجذوری برحسب $\sin x$ است.

بافرض $\sin^2 x = y$ خواهیم داشت:

$$2y^2 - 2y + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{3}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{1}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4} \text{ و } y = \frac{1}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند، پس داریم:

$$y = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}}$$

و $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$ یا $\boxed{x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}}$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}}$$

و $x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}}$

$$y = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}, \boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}}, \boxed{x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}}$$

آزمون ۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $2k\pi + \pi$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

کنکور سراسری رشتهٔ علوم تجربی ۱۳۸۱

حل: بافرض $\cos x = y$ داریم:

$$2y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ و } y = -1$$

جواب $y = \frac{3}{2}$ قابل قبول نیست؛ امّا $y = -1$ قابل قبول است و داریم:

$y = -1 \Rightarrow \cos x = -1 = \cos\pi \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi$ یا $\boxed{x = 2k\pi + \pi}$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

آزمون ۲. معادلهٔ $tg^2 x - 2\cot g^2 x = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۸

کنکور دانشگاه آزاد، ۱۳۸۲

حل: با جایگزینی $\cot gx = \frac{1}{tgx}$ داریم:

$$tg^2 x - \frac{2}{tg^2 x} = 1 \Rightarrow tg^4 x - tg^2 x - 2 = 0$$

(معادلهٔ دو مجذوری)

فرض می‌کنیم $tg^2 x = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ و } y = 2$$

جواب $y = -1$ قابل قبول نیست؛ (زیرا $tg^2 x \neq -1$)

امّا $y = 2$ قابل قبول است و داریم:

$$y = 2 \Rightarrow tg^2 x = 2 \Rightarrow tgx = \sqrt{2} \text{ و } tgx = -\sqrt{2}$$

هریک از معادله‌های $tgx = \sqrt{2}$ و $tgx = -\sqrt{2}$ دربازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای دو جواب‌اند، پس معادلهٔ داده شده دارای ۴ جواب متعلق به این بازه است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

آزمون ۳. معادله $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3+\sin^2 x$ دربازه $[\pi,5\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

کنکور دانشگاه آزاد ۱۳۸۱

حل: راه اول. طرف دوم این معادله، حداقل مساوی ۳ است واین در صورتی است که $\sin x=0$ یا $x=k\pi$ باشد؛ امّا در این صورت لازم است $\cos x=\cos 2x=\cos 3x=1$ باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi \\ \cos 2x=1 \Rightarrow 2x=2k\pi \Rightarrow x=k\pi \\ \cos 3x=1 \Rightarrow 3x=2k\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

جواب‌های خصوصی مشترک دستگاه بالا در بازهٔ $[\pi\ ,\ 5\pi]$ تنها $x=2\pi$ و $x=4\pi$ است.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

راه دوم. می‌دانیم که $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ ، $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ و $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ است، بنابراین داریم:

$$\cos x+2\cos^2 x-1+4\cos^3 x-3\cos x=3+1-\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 4\cos^3 x+3\cos^2 x-2\cos x-5=0$$

با فرض $\cos x=y$ داریم:

$$4y^3+3y^2-2y-5=0$$

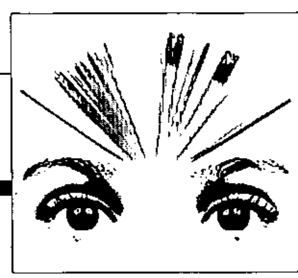
مجموع ضریب‌های این معادله برابر صفر است $(4+3-2-5=0)$؛ بنابراین، معادله بر $y-1$ قابل تقسیم است، از آن‌جا خواهیم داشت:

$$4y^3+3y^2-2y-5=(y-1)(4y^2+7y+5)=0$$

$$\Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \cos x=1=\cos 0 \Rightarrow \boxed{x=2k\pi}$$

و $4y^2+7y+5=0$ ، $\Delta=49-80=-31<0$ ریشه ندارد

پس تنها جواب کلی قابل قبول $x=2k\pi$ است که جواب‌های خصوصی آن در بازهٔ $[\pi,5\pi]$ عبارتند از $2\pi,4\pi$؛ بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.



معماهای فکری و منطقی

در یک قضیهٔ جنایی، شش نفر C، F، G، H، M و W درگیرند. شش نفر مزبور، نه لزوماً به همین ترتیب، عبارت‌اند از قربانی، قاتل، شاهد، پلیس، قاضی و جلاّد. حقایق مربوط به قضیه ساده‌اند. قربانی بلافاصله از زخم تیری که از فاصلهٔ نزدیک شلیک شده، مُرده است. شاهد، صحنهٔ ارتکاب جنایت را ندیده، اما قسم می‌خورد که صدای مشاجره و سپس تیراندازی را شنیده است.

پس از محاکمه‌ای طولانی، قاتل محکوم به مرگ و به دار آویخته شد.

M هم قربانی، قاتل را می‌شناخته است.

در دادگاه، قاضی از M می‌خواهد ماجرای تیراندازی را تعریف کند.

W آخرین نفری بود که F را زنده دیده است.

پلیس گواهی داد که G را در نزدیکی محلی دستگیر کرده که جسد در آن‌جا پیدا شده است.

W و H هیچ‌گاه ملاقات نکرده‌اند.

نقش هریک در این ملودرام ناخوشایند چه بوده است؟

سری $+n\cdots$

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

احمد قندهاری

۱. برخی از خاصیت‌های سیگما

$$1.\ \sum_{i=m}^{n} a=(n-m+1)a$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{n} a_i=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{n} ka_i=k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$4.\ \sum_{i=1}^{n}(ka_i+pb_i)=k\sum_{i=1}^{n} a_i+p\sum_{i=1}^{n} b_i$$

۲. سری

دنباله‌ی $\{a_n\}:a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$

در این صورت، دنباله‌ی $\{S_n\}:S_1,S_2,S_3,\dots,S_n,\dots$ حاصل از مجموع‌های جزئی را سری گوییم و S_n را مجموع جزئی nام سری یا به طور خلاصه مجموع سری می‌گوییم. اگر دنباله‌ی $\{S_n\}$ به عدد حقیقی s همگرا باشد، می‌گوییم سری همگراست و s حدّ دنباله $\{S_n\}$ را مجموع سری می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$s=\lim_{n\to\infty} S_n$$

سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همان $\lim_{n\to\infty} S_n$ است.

اگر دنباله‌ی $\{S_n\}$ به عدد حقیقی s همگرا باشد، می‌گوییم سری همگرا و $s=\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

چنانچه دنباله‌ی $\{S_n\}$ واگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

تذکر: در سری‌ها آن‌چه که مهم است، همگرایی یا واگرایی سری است.

۳. قاعده‌ی ادغام (تلسکوپی)

$$\boxed{S_n=\sum_{k=1}^{n}\big(f(k)-f(k+1)\big)=f(1)-f(n+1)}$$

مثال. $f(k)=\dfrac{2}{k+1}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k+2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\big(f(k)-f(k+1)\big)$$
$$=f(1)-f(n+1)=1-\frac{2}{n+2}$$

۴. تجزیه کسرها

اگر کسری به صورت $\dfrac{P(x)}{(ax-b)(cx-d)}$ داشته باشیم و

$$\sum_{i=1} i = 1 + 2 + 3 + 4 +$$

بخواهیم آن را به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنیم، می‌نویسیم :

$$\frac{P(x)}{(ax-b)(cx-d)} = \frac{A}{ax-b} + \frac{B}{cx-d}$$

پس از مخرج مشترک گیری در سمت راست تساوی بالا، صورت‌ها را متحد قرار می‌دهیم؛ یعنی :

ضریب x دو طرف مساوی با یکدیگر و عددهای ثابت دو طرف مساوی با یکدیگر قرار می‌دهیم.

مثال. کسر $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ را تجزیه کنید.

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k+2} + \frac{B}{k+3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{k(A+B)+3A+2B}{(k+2)(k+3)}$$

$$k(A+B)+3A+2B \equiv 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=1,\ B=-1$$

پس :

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

راه کوتاه تجزیهٔ کسرها : دربارهٔ مثال بالا، راه کوتاه بیان می‌شود.

محاسبهٔ A : مخرج A را از سمت چپ تساوی بر می‌داریم و در بقیهٔ کسر به جای k، (۲-) را قرار می‌دهیم.

محاسبهٔ B : مخرج B را از سمت چپ تساوی برمی‌داریم و در بقیهٔ کسر به جای k، (۳-) را قرار می‌دهیم.

۵. راه‌حل مسائل سری

معمولاً برای یافتن مقدار سری، مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱. عبارت داخل $\sum$ را با استفاده از تجزیه کسرها به صورت تفاضل در می‌آوریم.

۲. S_n را تشکیل می‌دهیم.

۳. $f(k)$ و $f(k+1)$ را می‌سازیم.

۴. قاعدهٔ ادغام را برای S_n به کار می‌بریم.

۵. حدّ S_n را وقتی $n \to \infty$ می‌یابیم.

مسألهٔ ۱. مقدار سری زیر را بیابید.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+3)(2k+5)}$$

حل :

$$\frac{2}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{A}{2k+3} + \frac{B}{2k+5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+3)(2k+5)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5}\right),$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5}\right),\ f(k) = \frac{1}{2k+3}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(f(k) - f(k+1)\right) \overset{\text{قاعدهٔ ادغام}}{\Rightarrow} S_n = f(1) - f(n+1)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{1}{5}$$ مقدار سری

مسألهٔ ۲ . مقدار سری زیر را بیابید .

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$$

حل:
$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{k+1}{k+2}}$$

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\frac{k}{k+1}-\log\frac{k+1}{k+2}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\frac{k}{k+1}-\log\frac{k+1}{k+2}\right),\quad f(k)=\log\frac{k}{k+1}$$

قاعده ادغام $S_n=\sum_{k=1}^{\infty}(f(k)-f(k+1))=f(1)-f(n+1)$

$$S_n=\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{n+1}{n+2}\right)=\log\frac{1}{2}-0=\log\frac{1}{2}$$

مقدار سری

مسألهٔ ۳ . مقدار سری زیر را بیابید .

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

حلّ:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+3}\left(\frac{2}{(k+2)(k+4)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+3}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+3)(k+4)}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+3)(k+4)}\right),$$

$$f(k)=\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}(f(k)-f(k+1))=f(1)-f(n+1)$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}\right)=\frac{1}{12}$$ مقدار سری

۶. سری هندسی

سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_1r^{n-1}=a_1+a_1r+a_1r^2+...+a_1r^{n-1}+...$ را سری هندسی گوییم .

در این سری داریم : $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

الف . اگر $|r|<1$ ، سری همگرا و مقدار آن برابر است با :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-r}}$$

ب . اگر $|r|\geq 1$ ، سری واگرا است .

مسألهٔ ۴ . مقدار سری $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n-1}}{2^{4n-1}}$ را بیابید .

حل:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\pi^{2n})}{\pi(2^{4n})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\times\frac{(\pi^2)^n}{(2^4)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\times\frac{(\pi^2)^n}{16^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^2}{16}\times\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}$$

مقدار سری $=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{\pi^2}{16}}=\frac{2\pi}{16-\pi^2}$

۷. شرط لازم همگرایی سری

شرط لازم همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ آن است که :

$$\lim_{k=\infty} a_k=0$$

مثال. سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{100}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}$ واگرا می‌باشند؛ زیرا شرط لازم همگرایی در آن‌ها برقرار نیست.

۸. سری همساز (هارمونیک)

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را سری همساز (هارمونیک) گوییم.

با این‌که شرط لازم همگرایی برقرار است، ولی سری واگرا است.

۹. سری P

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$ را سری P گوییم.

اگر $P>1$، آن‌گاه سری همگرا و اگر $P\le 1$، آن‌گاه سری واگراست، مثال. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست.

۱۰. نکات سری

۱. سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$، $k\in R$ هم‌رفتارند؛ یعنی هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

۲. مجموع دو سری همگرا، یک سری همگراست.

۳. مجموع یک سری همگرا و یک سری واگرا، یک سری واگرا است.

۴. داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=0!+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e\approx 2/72$$

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1 \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=e \quad , \quad \sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-4)!}=e-2$$

۵. آزمون مقایسه

اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ سری‌هایی با جمله‌های مثبت باشند و از (n)ای به بعد داشته باشیم: $0<a_n\le b_n$

الف. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز همگراست.

ب. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز واگرا است.

❖ **آزمون ۱.** سری $\sum_{n=3}^{\infty}\tan\frac{\pi}{n}$ ...

۱) به صفر همگراست. ۲) به ۱ همگراست.
۳) به $\tan 1$ همگراست. ۴) واگراست.

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$\forall n\in N, n\ge 3\ ;\ \tan\frac{\pi}{n}>\frac{\pi}{n}>0$$

سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ واگراست $\Leftarrow$ سری همساز $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\pi}{n}=\pi\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$

در نتیجه بنا به قسمت (ب) نکته ۵ (نکات آزمون مقایسه) سری $\sum_{n=3}^{\infty}\tan\frac{\pi}{n}$ نیز واگراست.

❖ **آزمون ۲.** سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})$ ...

۱) همگرا به صفر است. ۲) همگرا به (۱) است.
۳) فقط همگراست. ۴) واگراست.

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{1}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}$$

$$\forall n\in N, 0<\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ 0<\sin^2\frac{1}{n}<\frac{1}{n^2}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ سری P است و همگراست پس سری $2\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{2}\frac{1}{n}$ نیز همگراست ؛ بنا به قسمت(الف) نکته ۵ (نکات آزمون مقایسه).

❖ **آزمون ۳** . حاصل $\sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9}\sum_{2}^{7}a$ کدام است؟

۱) $132a$ ۲) $80a$

۳) $182a$ ۴) $184a$

حل : گزینهٔ (۲) صحیح است .

$$\sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9}\sum_{2}^{7}a=\sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9}(7-2+1)a=\sum_{10}^{15}\sum_{5}^{9}6a=$$

$$\sum_{10}^{15}(9-5+1)(6a)=\sum_{10}^{15}30a=(15-10+1)(30a)=180a$$

❖ **آزمون ۴** . حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{(n+3)!}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{48}$ ۲) $\frac{1}{36}$

۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل : گزینهٔ (۳) صحیح است .

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+3)-1}{(n+3)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)$$

$$f(k)=\frac{1}{(k+2)!}$$

$$S_n=\sum_{n=2}^{n}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)=f(2)-f(n+1)=\frac{1}{4!}-\frac{1}{(n+3)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

❖ **آزمون ۵** . مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)^{2}}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است .

$$\forall n\in N\quad 0<\frac{1}{(n+2)(n+3)^{2}}<\frac{1}{(n+2)(n+3)}\ ,$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$ داریم :

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=f(1)-f(n+1)$$

$$S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\ ,\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$$

پس مقدار سری این آزمون از $\frac{1}{3}$ کم‌تر است؛ بنابراین مقدار آن با این گزینه‌ها به $\frac{1}{3}$ نزدیک‌تر است .

❖ **آزمون ۶** . حاصل سری $A=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است .

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

بنابر قاعده ادغام $=1-0+\frac{1}{2}-0=\frac{3}{2}$

❖ آزمون ۷. مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\frac{1}{k}.\cos\frac{1}{k+1}}$ کدام است؟

۱) $\tan 1$ ۲) $\tan 2$

۳) $\tan\frac{1}{2}$ ۴) $\tan\frac{2}{3}$

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}-\cos\frac{1}{k}.\sin\frac{1}{k+1}}{\cos\frac{1}{k}.\cos\frac{1}{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k+1}\right)=\tan 1-0=\tan 1$$

از قاعدهٔ ادغام استفاده شده است.

❖ آزمون ۸. مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}+3^{n}}{4^{n+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{5}{8}$

۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{4^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{4^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$$

❖ آزمون ۹. حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$ با شرط $|x|<1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x}$ ۲) $\frac{1}{x-1}$

۳) $x-1$ ۴) $\frac{1}{1-x}$

حل: گزینهٔ (۶) صحیح است. سری هندسی است با $|r|<1$؛ پس:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+\cdots=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-x}$$

❖آزمون ۱۰. حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{3n}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$

۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است. در آزمون (۹) داشتیم:

$$|x|<1\ ،\ \sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}$$

اگر از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^{2}}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2}}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$$

❖آزمون ۱۱. حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^{n}$ کدام است؟

۱) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

۳) $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ ۴) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(1)(\sqrt{5}-2)^{n-1}$$

سری هندسی است با $|r|<1$،

$$= \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\sqrt{5}+2} = \frac{1}{3-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

❖ آزمون ۱۲ . حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ کدام است؟

۱) $2e-1$ ۲) $2e-2$

۳) $2e-3$ ۴) $2e-5$

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است .

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \right)$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e + e - 1 = 2e-1$$

نکتهٔ (۴) را ببینید .

❖ آزمون ۱۳ . حاصل سری $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

حل : گزینه (۲) صحیح است .

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) ,$$

$$f(k) = \frac{1}{(k+1)!}$$

از قاعدهٔ ادغام استفاده شده است . $A = \frac{1}{2!} - 0 = \frac{1}{2}$

❖ آزمون ۱۴ . اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1-3x)^k}$ همگرا باشد، حدود x کدام است؟

۱) $|x| < 1$ ۲) $0 < x < \frac{2}{3}$

۳) $x > \frac{2}{3}$ یا $x < 0$ ۴) $x > \frac{1}{2}$ یا $x < 0$

حل : گزینه (۳) صحیح است .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1-3x)^k} \; ; \; r = \frac{1}{1-3x}$$

برای آن که سری همگرا باشد، باید $|r| < 1$ یا $\frac{1}{|1-3x|} < 1$

$$\Rightarrow |1-3x| > 1 \Rightarrow |3x-1| > 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1 > 1 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \\ \text{یا} \\ 3x-1 < -1 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

❖ آزمون ۱۵ . حاصل سری زیر کدام است؟

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k+5} + \frac{1}{k+4} \right)$$

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{5}$

۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

حل : گزینه (۲) صحیح است .

$$(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k+5} + \frac{1}{k+4} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+4}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} - \frac{(-1)^k}{k+4} = -\left(\frac{(-1)^k}{k+4} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} \right)$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k+5} + \frac{1}{k+5} \right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k+4} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+5} \right) ,$$

$$f(k) = \frac{(-1)^k}{k+4}$$

بنا به قاعدهٔ ادغام . $A = -\left(\frac{-1}{5} - 0 \right) = \frac{1}{5}$



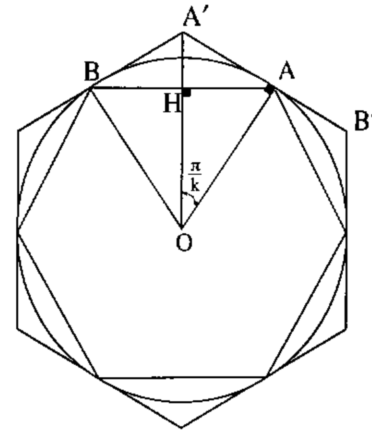
روش ارشمیدس برای محاسبهٔ عدد π

رحیم خیرالله‌زاده،
دبیر ریاضی از
ناحیه‌ی ۲ شهرری

محاسبهٔ منطقی و به روش هندسی برای محاسبهٔ عدد π، به وسیلهٔ ارشمیدس ریاضیدان بزرگ یونانی در حدود ۲۲۰۰ سال پیش ارائه شده است. این روش براساس چندضلعی های منتظم محاطی و محیطی است. در واقع، محیط و مساحت دایره بین محیط و مساحت دو چند ضلعی منتظم قرار می گیرد و با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی ها و محاسبهٔ محیط و مساحت آن‌ها می توان با تقریب دلخواه، عدد π را محاسبه کرد.

در این جا ضمن توضیح این روش به کمک یک برنامهٔ ساده به زبان Qbasic، مقدار π را تا ۶ رقم اعشار محاسبه می کنیم (در حالت معمولی در Qbasic اعداد اعشاری بین ۶ تا ۸ رقم محاسبه می شوند). مطابق (شکل ۱)، دایره‌ای به شعاع واحد در نظر می گیریم و فرض می کنیم که تعداد اضلاع این چندضلعی های منتظم محیطی و محاطی برابر k باشند، که در آن $k = 3 \times 2^{(n-1)}$ و n یک عدد طبیعی است. نصف محیط های دو چندضلعی منتظم محیطی و محاطی را به ترتیب با a_n و b_n نشان می دهیم. به ازای هر مقدار n یک مقدار برای k به دست می آید.

مطابق شکل، در مثلث می‌توان نوشت:



(شکل ۱)

$$\Delta OAA':\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)=\frac{AA'}{OA}=AA'$$

محیط k ضلعی منتظم محیطی $= P'_n = k(2AA') = 2k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$

$$a_n=\frac{P'_n}{2}=k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\boxed{a_n=k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)} \qquad (1)$$

به همین ترتیب، در مثلث OAH داریم:

$$\Delta OAH:\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)=\frac{AH}{OA}=AH$$

محیط k ضلعی منتظم محاطی $= P_n = (2AH)k = 2k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$

$$b_n=\frac{P_n}{2}\Rightarrow b_n=k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\boxed{b_n=k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \qquad (2)$$

حال نشان می‌دهیم: $b_n<\pi<a_n$، برای این کار می‌توان نوشت:

$P_n <$ محیط دایره $< P'_n$

یا: $b_n <$ نصف محیط دایره $< a_n$

$b_n<\pi R<a_n$

و چون $R=1$، پس: $\boxed{b_n<\pi<a_n}$

حال به سادگی دیده می‌شود که با تبدیل n به n+1 در فرمول k، مقدار k به 2k تبدیل می‌شود؛ یعنی:

$$n\to n+1\equiv k\to 2k$$

که با اعمال این نکته در فرمول‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$a_{(n+1)}=2k\tan\left(\frac{\pi}{2k}\right) \qquad (3)$$

و

$$b_{(n+1)}=2k\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right) \qquad (4)$$

اکنون دو رابطهٔ بازگشتی زیر را که در واقع اساس محاسبهٔ عدد π در این روش است، ثابت می‌کنیم:

$$a_{(n+1)}=\frac{2(a_n)(b_n)}{(a_n+b_n)} \qquad (I)$$

$$b_{(n+1)}=\sqrt{(a_{(n+1)}b_n)} \qquad (II)$$

اثبات (I):

$$a_n=k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)\Rightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)}$$

$$b_n=k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\Rightarrow\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}$$

که اگر دو رابطهٔ اخیر را با هم جمع کرده و با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطهٔ (۳)، به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{2}{a_{(n+1)}}$$

که پس از ساده کردن به فرمول (I) می‌رسیم.

اثبات (II): از ضرب دو رابطهٔ (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$(a_{(n+1)}\times b_n)=2k\tan\left(\frac{\pi}{2k}\right)\times k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\Rightarrow(a_{(n+1)}\times b_n)=4k^2\times\sin^2\frac{\pi}{2k}=(b_{(n+1)})^2$$

حال جدولی تشکیل داده و چهار مقدار n,k,a_n,b_n را محاسبه می‌کنیم.

برای این کار، از یک برنامهٔ ساده به زبان Qbasic استفاده می‌کنیم.

البته به ازای $n=1$ خواهیم داشت $k=3$ و نصف محیط‌های سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) محیطی

و محاطی به سادگی به‌دست می‌آیند، که در نوشتن برنامه به عنوان مقادیر اولیه برای شروع برنامه لازم است.

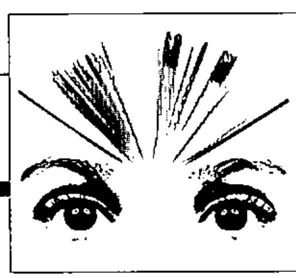
$$n=1 \Rightarrow k=3 \Rightarrow a_1 = 3\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow a_1 = 3\sqrt{3}$$

$$b_1 = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
DIM a(1000), b(1000)
a(1) = (3 * SQR(3))
b(1) = (0.5 * a(1))
CLS
FOR n = 1 TO 15
K = 3 * 2 ^ (n-1)
a(n+1) = (2 * a(n) * b(n))/(a(n)+b(n))
b(n+1) = SQR(a(n+1)*b(n))
PRINT "n ="; n, "k ="; K, "a(n) ="; (a(n)),
"b(n)="; (b(n))
LPRINT "K ="; K, "n ="; n, "a(n)="; (a(n)),
"b(n) ="; (b(n))
NEXT n
STOP
```

k = 3	n = 1	a(n) = 5.196152	b(n) = 2.598076
k = 6	n = 2	a(n) = 3.464102	b(n) = 3
k = 12	n = 3	a(n) = 3.21539	b(n) = 3.105829
k = 24	n = 4	a(n) = 3.15966	b(n) = 3.132629
k = 48	n = 5	a(n) = 3.146086	b(n) = 3.13935
k = 96	n = 6	a(n) = 3.142715	b(n) = 3.141032
k = 192	n = 7	a(n) = 3.141873	b(n) = 3.141453
k = 384	n = 8	a(n) = 3.141663	b(n) = 3.141558
k = 768	n = 9	a(n) = 3.14161	b(n) = 3.141584
k = 1536	n = 10	a(n) = 3.141597	b(n) = 3.14159
k = 3072	n = 11	a(n) = 3.141594	b(n) = 3.141592
k = 6144	n = 12	a(n) = 3.141593	b(n) = 3.141592
k = 12288	n = 13	a(n) = 3.141593	b(n) = 3.141592
k = 24576	n = 14	a(n) = 3.141592	b(n) = 3.141592
k = 49152	n = 15	a(n) = 3.141592	b(n) = 3.141592

معماهای فکری و منطقی



یک عصر زیبای بهاری B، E و T با همسرانشان، که نام‌هاشان نه لزوماً به همین ترتیب، عبارت‌اند از: C، H و M به زمین گلف رفتند و به اتفاق هجده سوراخ، گلف‌بازی کردند.

M، H، G و E به ترتیب، ۱۰۶، ۱۰۲، ۱۰۰ و ۹۴ ضربه زدند. B و T و ۹۸ و ۹۶ ضربه زدند؛ اما برای مدتی نتوانستند مشخص کنند کدام ضربه‌ها را زده‌اند؛ زیرا نام‌های خودشان را بر تابلوی امتیازات نگذاشته بودند.

زمانی که بازیکنان سرانجام کارت‌هاشان را بررسی کردند، مشخص شد دو زوج دارای امتیاز یکسان‌اند.

زن E، زن B را شکست داد.

۲

○ ترجمه:
غلامرضا یاسی‌پور

نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها



روش‌های اثبات

بعضی از روش‌های اثبات

در شمارهٔ قبل مجله قسمت اول این مقاله با اظهاراتی روبه‌رو شدیم که به عنوان قضیه (یا لم[1] یا نتیجه[2]) توصیف شده‌بودند و پس از آن‌ها توضیحاتی است که مدعی «اثبات» بودن هستند. دراین مورد، درست همان‌گونه که رهیافتی شهودی را به مفهوم مجموعه پذیرفتیم، شهودمان را آزاد می‌گذاریم تابه این موضوع مهم که توضیح داده شده، منطقاً پذیرفتنی است یا خیر رهنمون شود. تنظیم مفهوم پذیرفتنی بودن به حوزهٔ بسیار دوری، موسوم به منطق‌نمادی[3] می‌کشد. از طرف دیگر، روش‌های معدودی موجودند که غالباً در تشکیل اثبات‌ها به کار می‌روند، و از آن‌جا که گاهی برای دانش‌آموز اشکال تولید می‌کنند، توجه به آن‌ها شاید سودمند باشد. این کار را از طریق چند مثال نقض[4]، که برای ملاحظهٔ اصل منطقی‌ای که در آن‌هاست، به قدر کفایت ساده‌اند، انجام می‌دهیم.

به عنوان نمونه، چگونگی اثبات اظهار زیر را درنظر می‌گیریم:

(۱) اگر x عددی صحیح و فرد باشد، آن‌گاه x^2 نیز عددی صحیح و فرد است.

احتمالاً خواهید گفت: «بافرض فرد بودن x به ازای $n \in Z$ مناسبی بنویسیم:

$$x = 2n + 1$$

در این صورت:

$$x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

که واضحاً فرد است.»

در این جا مستقیماً از این فرض که x فرد است، به این نتیجه که x^2 فرد است، رفته‌ایم. چنین اثباتی را **اثبات مستقیم** می‌نامیم.

برای مثال دوم، اظهار زیر را درمورد عددهای صحیح x و y در نظر می‌گیریم:

(ii) اگر $x^2 \neq y^2$، آن‌گاه $x \neq y$ (۱)

اثبات مستقیم ممکن است: از $x^2 \neq y^2$، نتیجه می‌گیریم که:

$$(x-y)(x+y) \neq 0$$

نتیجه می‌شود که: $x - y \neq 0$ و دراین صورت $x \neq y$.

اما اثباتی که احتمالاً اغلب شما خواهید داد چنین است :

اگر $x = y$ ، آن‌گاه $x^2 = y^2$. (۲)، تناقض

و از آن نتیجهٔ مورد نظر به دست می‌آید.

رهیافت فوق، با استفاده از روش اثبات **غیر مستقیم**[5]، چند نکتهٔ منطقی را آشکار می‌کند. دو نکته‌ای که می‌خواهیم توجه شما را به آن‌ها جلب کنیم، به ساده‌ترین صورت بر حسب عبارت‌های منطقی بررسی می‌شوند. فرض می‌کنیم A و B ، به ترتیب، به جای «$x^2 \neq y^2$» و «$x \neq y$» قرار داشته باشند. باز فرض می‌کنیم A~ و B~ نقیض ها[6]ی آن‌ها را نمایش دهند. به این ترتیب A~ عبارت است از «$x^2 = y^2$» و B~ عبارت از «$x = y$». در این صورت، (۱) اظهار زیر است :

اگر A ، آن‌گاه B. این اظهار را به طور مختصر به صورت $A \Rightarrow B$ نوشته به صورت «A مستلزم B است» می‌خوانیم. از طرف دیگر (۲)، که درظاهر منطقاً با (۱) هم ارز است، اظهار $\sim A \Rightarrow \sim B$ است. در واقع، درمنطق مقدماتی، نشان داده می‌شود که اظهارهای $A \Rightarrow B$ و $\sim B \Rightarrow \sim A$ نیز جفت $B \Rightarrow A$ و $\sim A \Rightarrow \sim B$ ، هم ارزند. آنچه که واضحاً (درحالت کلی) هم ارز نیستند، اظهارهای $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow A$ اند. [اظهار اخیر، برحسب مثال ملموسمان به صورت $x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2$ خوانده می‌شود، که آشکارا دروغ است؛ در حالی که (۱) (آشکارا) راست است.] اظهار $B \Rightarrow A$ به عکس[7] اظهار $A \Rightarrow B$ موسوم است.

به طور خلاصه : برای اثبات این که نتیجهٔ اظهار شدهٔ B از فرض A حاصل می‌شود، شخص می‌تواند مستقیماً عمل کند یا به طور هم ارز، ثابت کند A~ از فرض B~ استنتاج پذیر است. این نوع اثبات غیر مستقیم به **اثبات با استفاده از عکس نقیض**[8] موسوم است و $\sim B \Rightarrow \sim A$ **عکس نقیض**[9] $A \Rightarrow B$ است.

روش غالباً پذیرفته شدهٔ دیگر، **برهان خلف**[10] یا **اثبات بااستفاده از تناقض**[11] است. دراین مورد نشان می‌دهیم نقیض نتیجهٔ مورد نظر به **تناقض** (یا باطل بودن[12]) می‌انجامد. شاید اولین استفاده از این روش، در اثبات قضیهٔ زیر بوده باشد :

قضیه. اگر $x \in \mathbf{R}$ و $x^2 = 2$ ، آن‌گاه $x \notin \mathbf{Q}$ ؛ به عبارت دیگر، $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست.

اثبات. فرض می‌کنیم $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ ، بنابراین می‌توان نوشت $x=m/n$ ، که درآن $m, n \in \mathbf{Z}$ و $n \neq 0$.

واضحاً می‌توان فرض کرد m ، n در $\mathbf{Z}$ مقسوم علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند؛ مقسوم‌علیه مشترکی چنین را می‌توان پیش از آغاز کار حذف کرد. در این صورت از $x=m/n$ نتیجه می‌گیریم $m^2 / n^2 = 2$ ؛ یعنی :

$$m^2 = 2n^2$$

نتیجه می‌گیریم m^2 و درنتیجه m ، زوج است. با نوشتن $m = 2l$ به دست می‌آوریم :

$$4l^2 = 2n^2$$

یعنی $2l^2 = n^2$. اما دراین صورت ـ و در نتیجه n ، زوج است. به این ترتیب، فرضمان، یعنی $\sqrt{2} = x = m / n \in \mathbf{Q}$ ، به این تناقض (باطل بودن) انجامیده است که عددهای m و n بدون مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ ، هر دو، زوج‌اند. در نتیجه $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

اکنون به بررسی دو اظهار زیر می‌پردازیم.

(i) هر عدد صحیح و مثبت، مجموع مربع‌های چهار عدد صحیح (مثبت) است.

(ii) هر عدد صحیح و مثبت، مجموع مکعب‌های هشت عدد صحیح و مثبت است.

بررسی این موضوع که (i) به طور قطع به ازای هر مثبت $n \leq 100$ برقرار است، خیلی مشکل نیست. به عنوان مثال :

$$75 = 8^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$$

$$86 = 9^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2$$

اما باید توجه داشته باشیم که (i) حتی اگر به ازای جمیع عددهای صحیح و مثبت، مثلاً تا 10^{50000} نیز بررسی شود، همچنان به ازای **هر عدد صحیح و مثبت** n به اثبات نرسیده است؛ در واقع، با توجه به تمام این اطلاعات، باز هم ممکن است (i) به ازای $n = 10^{50000} + 1$ برقرار نباشد. آری، برای

اثبات (i) باید اثباتی به دست دهیم که جمیع عددهای صحیح و مثبت n را بپوشاند.

درواقع، (i) راست است و برای اولین بار توسط **لاگرانژ**[13] در ۱۷۷۰ به اثبات رسید. از طرف دیگر (ii) دروغ است؛ چنین نیست که جمیع عددهای صحیح و مثبت را بتوان به صورت اظهار شده بیان کرد. به عنوان نمونه، ۲۳۹ نمی‌تواند چنین بیان شود و به این ترتیب ۲۳۹ **مثال نقض**[15] ی به اظهار (ii) است. در واقع، تنها یک عدد صحیح و مثبت دیگر وجود دارد که به صورت مجموع هشت مکعب بیان پذیرفت. آیا می‌توانید آن را بیابید؟ این عدد کوچک‌تر از ۵۰ است: نکته در این جاست که هر چند تنها دو عدد از بی‌نهایت عدد صحیح و مثبت در (ii) صدق نمی‌کنند، وجود **حتی یک** چنین عدد صحیح «ناجوری» برای از بین بردن درستی اظهار (ii) کفایت می‌کند. در این حالت، یافتن عدد صحیح «ناجور» دیگر چیزی را تغییر نمی‌دهد و مسأله مزبور تنها برای تفریح مطرح شد.

کار را با یکی، دو تبصره در مورد اصطلاحات ونمادنویسی خاتمه می‌دهیم. قبلاً ملاحظه کردیم اظهار «اگر A، آن‌گاه B» به صورت $A \Rightarrow B$ نوشته و «A مستلزم B است» خوانده می‌شود و نیز می‌گوییم «A **شرط کافی**[15] برای B است» (زیرا A، به خودی خود، برای استنتاج B کافی است) یا «B **شرط لازم**[16] برای A است» (زیرا B لزوماً ـ و خواهی نخواهی ـ از A نتیجه می‌شود). ریاضیدانان به طریق دیگر می‌گویند «B **اگر** A» یا «A **تنها اگر** B». اگر بدانیم $A \Rightarrow B$ و $B \Rightarrow A$، می‌گوییم «A **اگر و تنها اگر** B»؛ اظهاری که آن را به طور مختصر به صورت $A \Leftrightarrow B$ می‌نویسیم.

درمنطق نمادی، استفادهٔ زیادی از نشانه‌های $\exists$ (**وجود دارد**[17]) و $\forall$ (**به ازای هر**[18]) به عمل می‌آید؛ هر چند در این جا اغلب آن‌ها را به کار نمی‌بریم. به عنوان مثال، توجه داشته باشید که یکی از ویژگی‌های رابطهٔ برابری بر **Z**، را می‌توان به ایجاز به صورت زیر بیان کرد:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x=y \Rightarrow xz=yz)$$

سرانجام توجه کنید که نقیض $(\exists x)(p(x))$، یعنی $\sim((\exists x)(p(x))$، عبارت است از $(\forall x)(\sim p(x))$ و مشابهاً؛

$$\sim((\forall x)(p(x))) \Rightarrow (\exists x)(\sim p(x))$$

تمرین‌ها

۱. کدام یک از اظهارات زیر راست است؟

(الف) $\frac{3}{5} \in \mathbf{Z}$ ؛ (ب) $(\pi+i)^2 \in\subseteq \setminus \underline{R}$

(پ) $e-\pi \notin \underline{R}^+$ (ت) $(e-\pi)^2 \in \underline{R}\setminus\underline{R}^+$

(ث) $\pi^e - e^\pi \in \underline{R}^+$

۲. فرض می‌کنیم: $A=\{\phi,\{\phi\},1,\{1,\phi\},7\}$

کدام یک از موارد زیر راست است؟

(i) $\phi \in A$ (ii) $\{\phi\} \in A$

(iii) $\{1\} \in A$ (iv) $\{7,\phi\} \subsetneq A$

(v) $7 \subseteq A$ (vi) $\{7\} \not\subseteq A$

(vii) $7 \subsetneq A$ (viii) $\{7,\{1\}\} \not\subseteq A$

(ix) $\{\phi,\{\phi\},\{1,\phi\}\} \subseteq A$ (x) $\{\{\phi\}\} \subseteq A$

۳. فرض می‌کنیم: $A=\{x: x \in \underline{R}^+, x^2>7\}$

$B=\{1,2,3,4\}$

$C=\{3,$ لوئیز کارول $\}$

موردهای زیر را بیابید:

$A\cap B, B\cap C, A\cap B\cap C, A\cup B, (A\cup B)\cap C,$
$(A\cap C)\cup(B\cap C)$

نمودار ونی شامل A، B و C را رسم کنید.

۴. فرض می‌کنیم:

$A=\{(x,y): x\in R, y\in R, x^2+y^2=1\}$

$B=\{(x,y): x\in R, y\in R, y^2=4x\}$

$C=\{(x,y): x\in R, y\in R, y^2=x^3\}$

اشتراک‌ها و اجتماع‌های سؤال شده در تمرین ۳ را بیابید.

۵. (الف) در مورد مجموعه‌های A و B نشان دهید $A\cup B=B$، اگر و تنها اگر $A\subseteq B$ و $A\cap B=A$، اگر و تنها اگر $A\subseteq B$.

ب) به ازای مجموعه‌های A، B و C ثابت کنید:

(i) $(A\cup B)\cap C \subseteq (A\cap C)\cup(B\cap C)$

(ii) $(A\cap C)\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap C$

نتیجه بگیرید که (iii) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

۶. به ازای هر $r \in R^+$ و هر $n \in Z^+$ قرار دهید:

$$T_r = \left\{x: x \in R, -\frac{۱}{۲} \le x \le \frac{۱}{۲}\right\}$$

$$R_n = \left\{x: x \in R, -\frac{۱}{n} < x \le n\right\}$$

و پیدا کنید: $\bigcap_{r\in R^+} T_r$ ، $\bigcup_{n=۱}^{\infty} R_n$ ، $\bigcap_{n=۱}^{\infty} R_n$.

۷. فرض می‌کنیم U مجموعه‌ای با زیر مجموعه‌های A و B باشد. تعریف می‌کنیم $A^C = U \setminus A$ و غیره. نشان دهید:

(i) $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$

(ii) $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$

(iii) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(iv) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

((iii) و (iv) به **قوانین دمورگن**[19] موسوم‌اند.)

۸. [a,b] را به صورت مجموعهٔ $\{\{a\},\{a,b\}\}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $[a,b]=[c,d]$ اگر و تنها a=c و b=d .

۹. (i) نشان دهید اگر A و B ناتهی باشند، آن‌گاه $A \times B = B \times A$ ، اگر و تنها اگر A=B . (ii) فرض می‌کنیم $S \subseteq A \times B$. آیا نیاز هست که S به صورت $C \times D$ باشد، که در آن $C \subseteq A$ و $D \subseteq B$ ؟

۱۰. p(A) چند عنصر دارد؛ اگر: (i) A دارای ۱۰ عنصر باشد؟ (ii) $A = \phi$ ؟

۱۱. فرض می‌کنیم $m \in Z$. ثابت کنید: اگر $m^۲$ زوج باشد، آن‌گاه m زوج است.

۱۲. مثالی دیگر از اظهارات A و B به دست دهید که در آن‌ها $A \Rightarrow B$ راست؛ اما $B \Rightarrow A$ دروغ باشد.

۱۳. ثابت کنید: $e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots$

چنان‌که می‌آید، گنگ است. فرض می‌کنیم $e = \frac{m}{n}$ ،

آن‌گاه: $t = n!(e - ۱ - \frac{۱}{۱!} - \frac{۱}{۲!} - \ldots - \frac{۱}{n!}) \in Z$

اما: $t = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)(n+۲)} + \ldots \le \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)^۲} + \ldots = \frac{۱}{n}$

که تناقض است. در این مورد چه نوع اثباتی به کار برده‌ایم؟

۱۴. در اثبات این‌که به ازای هر مجموعهٔ A ، $\phi \subseteq A$ چه نوع اثباتی به کار برده‌ایم؟

۱۵. فرض می‌کنیم: $x, y, z \in Z$

نشان دهید $x^۲ + y^۲ + z^۲$ نمی‌تواند به صورت $۸k + ۷$ باشد؛ وقتی که: (i) دقیقاً یکی از موارد x ، y و z فرد باشد؛ و (ii) هر سه مورد x ، y و z فرد باشند. نشان دهید هیچ عدد صحیح به صورت $۸k + ۷$ به صورت مجموع مربعات سه عدد صحیح قابل بیان نیست. در این جا از چه روش اثباتی استفاده کرده‌ایم؟

۱۶. اظهار زیر را، که در آن $x, y, z \in Z$ ، با استفاده از کلمات بنویسید: $(\forall x)(\forall y)(\exists x)(xy = z^۲)$

آیا این اظهار راست است؟ به صورت نمادی بنویسید: به ازای هر x و y واقع در Z^+ که درمورد آن‌ها x<y ، zی چنان وجود دارد که x+z=y .

۱۷. اظهارهای زیر را، که در آن‌ها $x, y, z \in Z$ ، با استفاده از کلمات بنویسید:

(i) $(\forall x)(\exists x)(y > x)$ (ii) $(\exists x)(\forall x)(y > x)$

نتیجه بگیرید که بدون ایجاد خطر تغییر معنی، نمی‌توان لزوماً جای ∀ و ∃ را با هم عوض کرد.

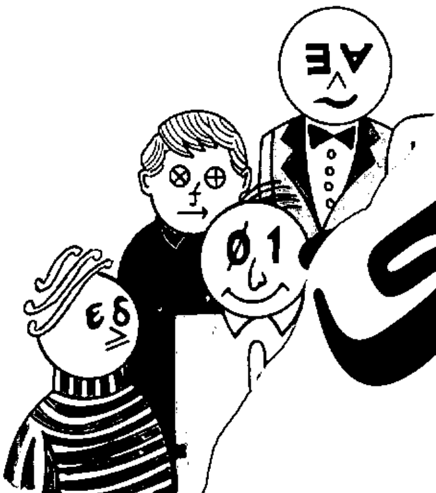
زیرنویس

* R^+ مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت را نمایش می‌دهد.

* آگوستوس دمورگن، Augustus de Morgan (۲ ژوئن ۱۸۰۶ ـ ۱۸ مارس ۱۸۷۱)

1. Lemm
2. corollary
3. symbolic logic
4. counter example
5. indirect proof
6. negations
7. converse
8. proof by contraposition
9. contra positive
10. reductioad absurdum
11. proof by contradiction
12. absurscty
13. lagrange
14. counterexample
15. sufficient condition
16. necessary condition
17. there exists
18. for all
19. De morgan's Laws

منطق ریاضی



حمید رضا امیری

جبر گزاره‌ها

آیا تاکنون به کلمه و بهتر بگوییم ترکیب «منطق ریاضی» برخورده‌اید؟ چقدر راجع به این موضوع یا مبحث از ریاضیات تحقیق کرده‌اید؟ اگر ادعا کنیم که «ریاضیات یک زبان است و منطق ریاضی، دستور این زبان» آیا باور می‌کنید؟ در این صورت چگونه می‌توانیم زبانی (ریاضی) را یاد بگیریم، بدون آن که دستور آن زبان را آموخته باشیم؟ مگر آن که همچون زبان مادری، تنها با تکرار و تمرین، آن زبان را فقط در حد رفع نیازهای شفاهی و روزمره یاد بگیریم. در مورد ریاضی هم اگر بخواهیم بدون یادگیری منطق ریاضی به یادگیری علم ریاضی بپردازیم، ناچاریم خیلی از مفاهیم ریاضی را فقط حفظ کنیم و حتی روابط بین آنها، را از طریق حفظ کردن به خاطر بسپاریم. و این اتفاقی است که متأسفانه در آموزش ریاضی ما در کتاب‌های درسی رخ داده است و به دلیل این که منطق ریاضی [در نظام جدید آموزش متوسطه] به صورت رسمی از برنامه‌ی درسی حذف شده است، در مواردی ناچاریم مباحثی را مطرح نکنیم یا به صورتی مطرح کنیم که برای دانش‌آموز در حد دانسته‌هایش قابل درک باشد.

در این مقاله سعی می‌کنیم شما را با مبانی منطق ریاضی آشنا کنیم و کاربردهای آن را در مباحث ریاضی و کتاب‌های درسی به شما نشان دهیم تا عمق فهم شما از این مطالب بیشتر شده و سرانجام بتوانید مباحث خود را با استدلال منطقی همراه کنید. اکنون سعی کنید به هر یک از سؤال‌های زیر که در حوزه‌ی معلومات شماست با استدلال، منطقی پاسخ دهید:

I) آیا تُهی تابع است؟

II) اگر عضوی در اجتماع دو مجموعه نباشد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

III) آیا گزاره‌ی شرطیِ «اگر ۲ عددی فرد است آن‌گاه شما ۱۰۰ سال دارید» درست است؟

IV) چرا برهان خلف را به عنوان یک اثبات ریاضی می‌پذیریم؟

V) اگر مجموعه‌ای از بالا کراندار نباشد، چگونه مجموعه‌ای است؟

VI) اگر $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$، در این صورت تعریف حد در نقطه‌ی α به چه صورتی در می‌آید؟

VII) آیا رابطه‌ی $R = \{(۲,۴),(۶,۸)\}$ روی $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ خاصیت تعدّی دارد؟

IIX) اگر A زیر مجموعه‌ی B نباشد، چه می‌توان گفت؟

جبر گزاره‌ها

معمولاً واژه‌ی «گزاره» با کلمه‌ی «خبر» یا «جمله‌ی خبری» در ذهن تداعی می‌شود که البته زیاد هم با تعریف گزاره در منطق ریاضی فاصله ندارد.

در منطق ریاضی، گزاره به **جمله‌ای خبری** گفته می‌شود که دارای فقط و فقط یکی از دو ارزش **درست** (راست) و یا **نادرست** (دروغ) است. به عنوان مثال، جمله‌های «آیا هوا آفتابی است؟» و «چه گُل زیبایی!» هیچ‌کدام خبری نبوده و گزاره محسوب نمی‌شوند؛ و نیز جمله‌ی «a^n عددی مثبت است» نمی‌تواند گزاره باشد زیرا ارزش آن گاهی درست و گاهی نادرست است.

در منطق ریاضی، معمولاً گزاره‌ها را با حروف کوچک، $p, q, r, s, \ldots$ نشان می‌دهند. حال اگر دو گزاره‌ی p و q هم ارزش باشند (هر دو درست یا هر دو نادرست) می‌نویسند $p \equiv q$ و می‌خوانند p هم‌ارز با q است. اگر گزاره‌ای مانند p دارای ارزش درست باشد می‌نویسیم p?T و اگر نادرست باشد می‌نویسیم p?F.

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن گزاره‌ای است منحصر به فرد که با (p~) نشان داده می‌شود (p~ را نقیض p یا چنین نیست که p می‌خوانیم) چند گزاره و نقیض آنها را در این‌جا مشاهده می‌کنید:

۱) نقیض گزاره‌ی «$\sqrt{2}$ عددی مثبت است» به صورت «$\sqrt{2}$ عدد مثبتی نیست» بیان می‌شود. در واقع نمی‌توان گفت که نقیض این گزاره به صورت «$\sqrt{2}$ عددی منفی است» بیان می‌شود، چون می‌تواند عددی که مثبت نیست منفی و یا صفر باشد.

۲) نقیض گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» به صورت «۲ عددی فرد نیست» بیان می‌شود (البته در اعداد صحیح اگر عددی فرد نباشد زوج است»

۳) نقیض گزاره‌ی «توکیو پایتخت ترکیه است» گزاره‌ی «توکیو پایتخت ترکیه نیست» خواهد بود.

۴) «۸ بر ۴ بخش‌پذیر است» گزاره‌ای است که نقیض آن به صورت «۸ بر ۴ بخش‌پذیر نیست» بیان می‌شود.

۵) اکنون بگویید نقیض گزاره‌ی «عدد ۱۰ زوج است و بر ۵ بخش‌پذیر است» چطور بیان می‌شود؟ کمی جلوتر با قانون نقیض کردن این گونه گزاره‌ها که آنها را **گزاره‌های مرکّب** می‌گویند آشنا خواهید شد ولی فعلاً همین را بدانید که نقیض گزاره‌ی فوق به صورت «عدد ۱۰ فرد است یا بر ۵ بخش‌پذیر نیست» بیان می‌شود.

همان‌طور که مشاهده کردید اگر p گزاره‌ی درست باشد آن‌گاه p~ نادرست و اگر p نادرست باشد آن‌گاه p~ درست است. باید به این نکته توجه داشته باشید که نقیض گزاره‌ی p گزاره‌ای منحصر به فرد است و مثلاً اگر p گزاره‌ای درست باشد، هر گزاره‌ی نادرست نمی‌تواند p~ باشد. در واقع هر گزاره‌ی مانند p دارای بی‌شمار گزاره‌ی متضاد (از نظر ارزشی) است ولی فقط یکی از آنها p~ (نقیض) محسوب می‌شود.

اکنون ببینیم ارزش دو گزاره یا سه گزاره یا ... یا n گزاره نسبت به هم چیست؟ باید دانست که در حالت کلّی، n گزاره نسبت به یکدیگر دارای 2^n حالت ارزشی هستند. در جدول‌های زیر برای ۲ و ۳ گزاره و همین‌طور برای هر گزاره و نقیضش حالت‌های ارزشی مشخص شده است:

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

p	~p
T	F
F	T

(برای سه گزاره، $8 = 2^3$ حالت ارزشی حاصل می‌شود که برای p به تعداد $4 = \frac{8}{2}$ حالت T و ۴ حالت F و برای گزاره‌ی q، $2 = \frac{4}{2}$ حالت T و ۲ حالت F و... و برای گزاره‌ی r، $1 = \frac{2}{2}$ حالت T و ۱ حالت F و ... نوشته می‌شود که این قانون قابل تعمیم است.)

تعریف:

قرارداد: اگر جمله‌ای خبری دارای متغیر n باشد آن را گزاره‌نما می‌گوییم و با $p(n)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین وقتی می‌نویسیم $p(x)$ یا $p(x,y)$ یعنی گزاره نماهایی برحسب x یا برحسب x و y. (در شماره‌های بعدی به طور مفصل درباره‌ی گزاره‌نما بحث خواهیم کرد)

مثال. x عددی فرد است، گزاره نمایی برحسب x است، یا $y = x + 1$ گزاره نمایی برحسب x و y است.

نکته: اگر $p(x)$ یک گزاره‌نما باشد در این صورت:
(M مجموعه‌ی جواب $p(x)$ است)

$$k \in M \Leftrightarrow p(k) \equiv T$$

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها، به ۴ صورت یا توسط ۴ رابط می‌توان از گزاره‌های ساده، گزاره‌هایی مرکب تشکیل داد. در واقع به ۴ صورت می‌توان گزاره‌ها را با هم ترکیب کرد که عبارتند از:

۱ـ ترکیب فصلی (یا): هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را بالفظ «یا» با هم ترکیب کنیم می‌نویسیم: $(p \vee q)$ و آن گزاره‌ای است که به شکل (p یا q) خوانده می‌شود. ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند و در سه حالت دیگر درست است؛ مطابق جدول زیر:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

به عنوان مثال گزاره‌های «عدد ۲ فرد است یا ۵ عدد اول است»، «$1 < 2$ یا $4 > 1$» و «۱۱ عدد اول است یا $\sqrt{2}$ منفی است» همگی درست‌اند ولی گزاره‌ی «$\sqrt{5} < \sqrt{3}$ یا $2^5 = 4^2$» نادرست است.

۲ـ ترکیب عطفی (و): هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ (و) با هم ترکیب کنیم می‌نویسیم $(p \wedge q)$ و این گزاره‌ای است که به صورت (p و q) خوانده می‌شود. ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره‌ی p و q درست باشند؛ مطابق جدول زیر،

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تمرین: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

I) «۲ عددی زوج و $2^4 = 4^2$» ← درست

II) «۳ عددی زوج و توکیو پایتخت ژاپن است» ← نادرست

III) «$\frac{1}{x^2+1} > 0$ و $\frac{x^2+1}{x-1} \neq 0$» ← درست.

ان‌شاءالله در شماره‌ی بعد با بقیه‌ی ترکیب‌ها آشنا می‌شویم و بلافاصله با یادگیری قوانین حاکم بر ترکیب گزاره‌ها وارد بحث جالب هم‌ارزی‌ها و کاربردهای آنها خواهیم شد.



برای
دانش‌آموزان
دوره‌ی پیش‌دانشگاهی
ریاضی و تجربی

بازتابندگی مقاطع مخروطی

میر شهرام صدر

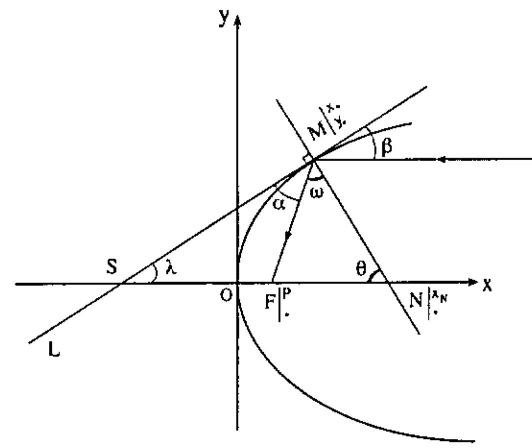
در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی با هندسه تحلیلی و مقاطع مخروطی آشنا شده‌اید، از ویژگی‌های جالب و کاربردی مقاطع مخروطی، ویژگی‌های بازتابندگی سهمی‌ها، بیضی‌ها و هذلولی‌ها هستند. در این مقاله سعی داریم با اجتماع هندسه و جبر (یعنی به روش تحلیلی) این ویژگی‌ها را تجزیه و تحلیل و اثبات کنیم.

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

در صورتی که یک سهمی را حول محور تقارنش دوران دهیم و سطح بیرونی آن را نقره‌اندود کنیم، یک آینه سهمومی (شلجمی) پدید می‌آید.

هرگاه یک منبع نورانی را در کانون یک آینه سهمومی (مانند چراغ قوه) قرار دهیم، پرتوهای نورانی که از کانون به سهمی می‌تابند، پس از شکست، موازی با محور تقارن سهمی منعکس می‌شوند و برعکس، پرتوهایی که موازی با محور تقارن به سطح سهمی می‌تابند پس از انعکاس در کانون سهمی جمع می‌شوند. به‌عنوان مثال از این ویژگی برای ساخت کوره‌های آفتابی استفاده می‌کنند.

در شکل ۱، پرتو نوری موازی با محور تقارن به سطح سهمی (آینهٔ شلجمی) برخورد کرده است، می‌خواهیم ثابت کنیم که این پرتو نور پس از شکست از کانون سهمی عبور می‌کند. برای این منظور، فرض کنیم سهمی به معادله‌ی $y^2 = 4px$ باشد و خط L را در نقطه $M(x_0, y_0)$ بر سهمی مماس می‌کنیم، اکنون ثابت می‌کنیم که $\alpha = \beta$.



شکل ۱

ابتدا معادله خط قائم بر سهمی به معادله $y^2 = 4px$ را در نقطه $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ واقع بر سهمی می‌نویسیم:

$$y^2 - 4px = 0 \Rightarrow y' = -\frac{-4p}{2y} = \frac{2p}{y}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{مماس}}{m} = \frac{2p}{y_0} \Rightarrow \underset{\text{قائم}}{m'} = -\frac{y_0}{2p}$$

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{2p}(x - x_0)$$ معادله خط قائم

با توجه به شکل ۱، ملاحظه می‌کنید که خط قائم محور xها را در نقطه N قطع می‌کند، بنابراین مختصات نقطه $N\left|\begin{matrix}x_N\\0\end{matrix}\right.$ باید در معادله این خط صدق کند، پس داریم:

$$N\left|\begin{matrix}x_N\\0\end{matrix}\right. \Rightarrow 0 - y_0 = -\frac{y_0}{2p}(x_N - x_0) \Rightarrow x_N = 2p + x_0$$

اکنون داریم: $N\left|\begin{matrix}2p + x_0\\0\end{matrix}\right.$ و $F\left|\begin{matrix}p\\0\end{matrix}\right.$ درنتیجه $FN = p + x_0$.

همچنین داریم: $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ و $F\left|\begin{matrix}p\\0\end{matrix}\right.$ و $y_0^2 = 4px_0$ درنتیجه:

$$MF = \sqrt{(x_0 - p)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{(x_0 - p)^2 + y_0^2}$$

$$= \sqrt{(x_0 - p)^2 + 4px_0} = \sqrt{x_0^2 + p^2 + 2px_0}$$

$$= \sqrt{(x_0 + p)^2} = (x_0 + p) \Rightarrow MF = x_0 + p$$

در مثلث $F\hat{M}N$ داریم: $FN = MF = x_0 + p$، پس این مثلث متساوی‌الساقین است، درنتیجه داریم:

$$\omega = \theta$$

چون مثلث $S\hat{M}N$ در رأس M قائم‌الزاویه است، بنابراین داریم:

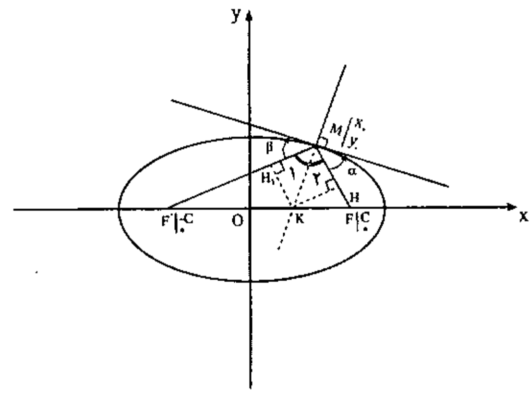
$$\left.\begin{matrix}\lambda + \theta = 90^\circ, \theta = \omega \Rightarrow \lambda + \omega = 90^\circ\\ \alpha + \omega = 90^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = \alpha$$

چون دو زاویه β و λ متبادل هستند درنتیجه: $\lambda = \beta$، از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\lambda = \alpha\\ \lambda = \beta\end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

ویژگی بازتابندگی بیضی

در صورتی که یک بیضی را حول قطر بزرگش دوران دهیم، یک بیضی‌وار پدید می‌آید. با نقره‌اندود کردن درون رویه‌ی بیضی‌وار یک آیینه بیضوی پدید می‌آید. در یک آیینه بیضوی، اگر منبع نوری را در یک کانون قرار دهیم؛ پرتو نوری که از آن منبع بر آیینه می‌تابد، در امتداد خطی که از کانون دیگر آن می‌گذرد، منعکس می‌شود. از این خاصیت بیضی‌ها در بعضی از سالن‌های سخنرانی یا سینما استفاده می‌کنند به طوری که سقف آن‌ها دارای مقاطعی به شکل قوس‌های بیضی با کانون‌های مشترک است. بنابراین، شخصی که در کانون F قرار دارد، می‌تواند صدای شخص دیگری را بشنود که در کانون F' صحبت می‌کند. چون امواج صدای شخص صحبت‌کننده در کانون F' به سقف برخورد می‌کنند، به وسیله سقف منعکس شده و به شنونده در کانون F می‌رسند. مطابق شکل۲، نشان می‌دهیم که خطوط گذرنده از نقطه M (واقع بر بیضی) و دو کانون آن، با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می‌دهند؛ یعنی ثابت می‌کنیم که $\alpha = \beta$.



شکل ۲

حل. با توجه به شکل ۲، می‌دانیم که معادله این بیضی به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است، اکنون در نقطه M خطی بر بیضی عمود می‌کنیم که معادله‌ی این خط عمود به صورت زیر است:

$$\frac{a^2x}{x_0}-\frac{b^2y}{y_0}=c^2$$

چون این خط محور xها را در نقطه K قطع می‌کند، بنابراین مختصات نقطه K به صورت زیر است:

$$y=0\to\frac{a^2x}{x_0}=c^2\Rightarrow x=\frac{c^2x_0}{a^2}\Rightarrow K\left|\begin{matrix}\frac{c^2x_0}{a^2}\\0\end{matrix}\right.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که MK نیمساز زاویه F'MF است، بنابراین ثابت می‌کنیم که: $KH_1=KH$.

$$MF: y-0=\frac{y_0-0}{x_0-c}(x-c)\Rightarrow(x_0-c)y-y_0x+cy_0=0$$

(معادله‌ی ضلع MF)

$$MF': y-0=\frac{y_0-0}{x_0+c}(x+c)\Rightarrow(x_0+c)y-y_0x-cy_0=0$$

(معادله‌ی ضلع MF')

برای این‌که ثابت کنیم $KH_1=KH$، از فرمول فاصله‌ی نقطه از خط، استفاده می‌کنیم:

$$KH=\frac{\left|-y_0\times\frac{c^2x_0}{a^2}+cy_0\right|}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}\Rightarrow KH^2=\frac{c^2y_0^2(\frac{cx_0}{a^2}-1)^2}{(x_0-c)^2+y_0^2}\quad(1)$$

چون نقطه $M\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ واقع بر بیضی است، پس مختصات M در معادله بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\Rightarrow y_0^2=b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}\quad(2)$$

با جایگزینی رابطه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$KH^2=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{x_0^2-2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}$$

$$=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{x_0^2(1-\frac{b^2}{a^2})+(b^2+c^2)-2cx_0}$$

می‌دانیم که در این بیضی: $a^2-c^2=b^2$، بنابراین داریم:

$$KH^2=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{\frac{c^2x_0^2}{a^2}+a^2-2cx_0}=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^4}}{\frac{(cx_0-a^2)^2}{a^2}}$$

$$=\frac{c^2y_0^2}{a^2}\Rightarrow\boxed{KH^2=\frac{c^2y_0^2}{a^2}}\quad(3)$$

به همین ترتیب می‌توان KH_1 را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$KH_1=\frac{\left|-y_0\times\frac{c^2x_0}{a^2}-cy_0\right|}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}}$$

$$\Rightarrow KH_1^2=\frac{c^2y_0^2(\frac{cx_0}{a^2}+1)^2}{x_0^2+c^2+2cx_0+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow KH_1^2=\frac{c^2y_0^2(\frac{cx_0}{a^2}+1)^2}{x_0^2(1-\frac{b^2}{a^2})+a^2+2cx_0}=\frac{c^2y_0^2\frac{(cx_0+a^2)^2}{a^4}}{\frac{c^2x_0^2}{a^2}+a^2+2cx_0}$$

$$\Rightarrow KH_1^2=\frac{c^2y_0^2\,\frac{(cx_0+a^2)^2}{a^4}}{\frac{(cx_0+a^2)^2}{a^2}}=\frac{c^2y_0}{a^2}$$

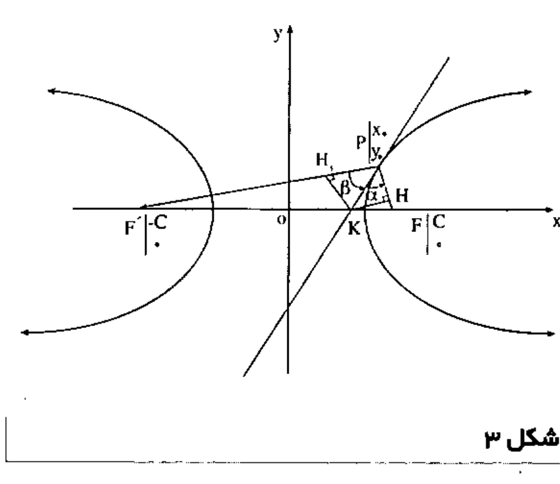
$$\Rightarrow \boxed{KH_1^2=\frac{c^2y_0}{a^2}} \qquad (۴)$$

با مقایسه دو رابطه (۳) و (۴) ملاحظه می‌کنیم که $KH_1 = KH$ ؛ در نتیجه نقطه K واقع بر نیمساز زاویه $F'MF$ است، بنابراین $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ ؛ در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}\alpha+M_2=90^\circ\\ \beta+M_1=90^\circ\\ M_1=M_2\end{cases}\Rightarrow \alpha=\beta$$

ویژگی بازتابندگی هذلولی

در صورتی که یک هذلولی را حول قطر حقیقی آن دوران دهیم، یک هذلولی‌وار پدید می‌آید. با نقره اندود کردن درون رویه‌ی هذلولی‌وار، یک آینه‌ی هذلولی پدید می‌آید. در یک آینه هذلولوی، اگر منبع نوری را در یک کانون قرار دهیم؛ پرتو نوری که از آن منبع بر آینه می‌تابد، در امتداد خطی که از کانون دیگر می‌گذرد، منعکس می‌شود. از این خاصیت انعکاسی در طراحی برخی از تلسکوپ‌ها و سیستم‌های مهم دریانوردی استفاده می‌شود. در شکل شماره ۳ PF و PF′ شعاع حامل‌های نقطه P و خط PK بر هذلولی مماس است. اکنون ثابت می‌کنیم که: $\alpha=\beta$.



شکل ۳

حل. با توجه به شکل، ملاحظه می‌کنیم که معادله این هذلولی به صورت $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ است و خط PK بر هذلولی مماس است، معادله خط PK در صورتی که مختصات $P\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ (واقع بر هذلولی) باشد، به صورت زیر است:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

چون این خط محور xها را در نقطه K قطع می‌کند، بنابراین مختصات K به صورت زیر است:

$$y=0\Rightarrow \frac{xx_0}{a^2}=1\Rightarrow x=\frac{a^2}{x_0}\Rightarrow K\begin{vmatrix}\frac{a^2}{x_0}\\0\end{vmatrix}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که PK نیمساز زاویه $F'PF$ است، بنابراین ثابت می‌کنیم که: $KH_1 = KH$

$$PF:\ y-0=\frac{y_0-0}{x_0-c}(x-c)\Rightarrow (x_0-c)y-y_0x+cy_0=0$$

(معادله خط PF)

$$PF':\ y-0=\frac{y_0-0}{x_0+c}(x+c)\Rightarrow (x_0+c)y-y_0x-cy_0=0$$

(معادله خط PF')

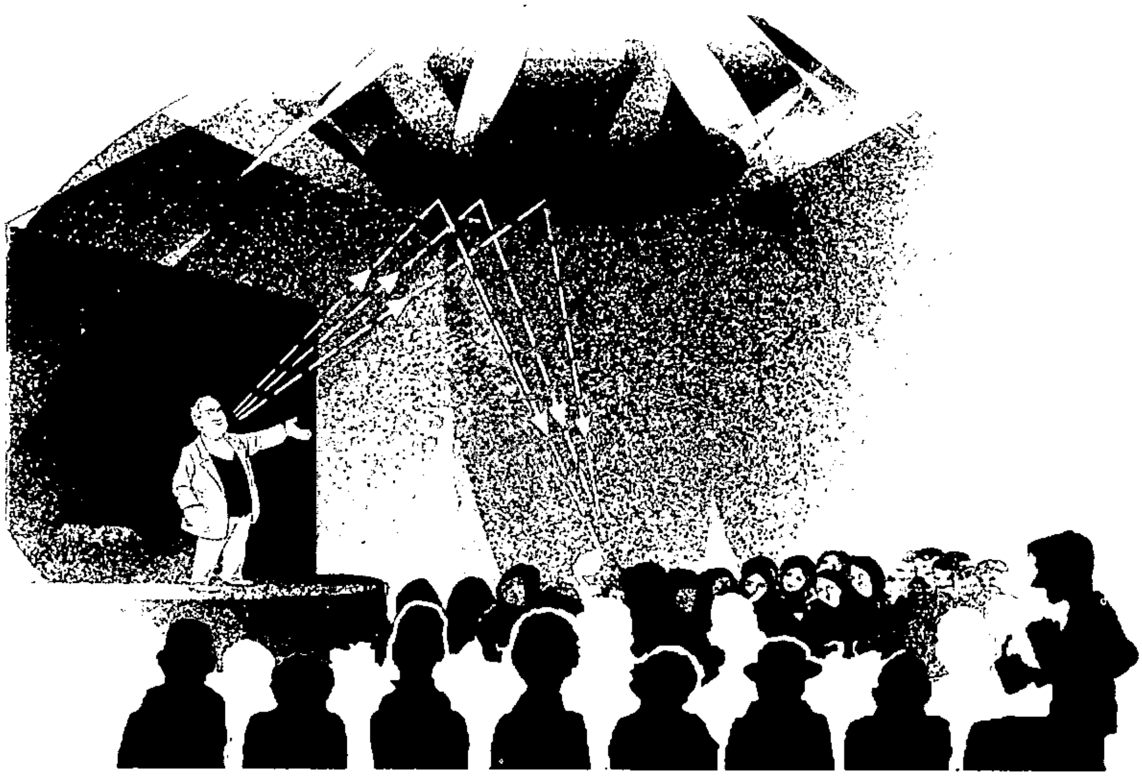
برای این‌که ثابت کنیم $KH_1 = KH$ ؛ از فرمول فاصله نقطه از خط، استفاده می‌کنیم:

$$KH=\frac{\left|-y_0\times\frac{a^2}{x_0}+cy_0\right|}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}\Rightarrow KH^2=\frac{y_0^2\left(c-\frac{a^2}{x_0}\right)^2}{(x_0-c)^2+y_0^2} \quad (۱)$$

چون نقطه $P\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ واقع بر هذلولی است، پس مختصات P در معادله‌ی هذلولی صدق می‌کند:

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1\Rightarrow y_0^2=\frac{b^2x_0^2}{a^2}-b^2 \qquad (۲)$$

با جایگزینی رابطه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:



$$KH^2=\frac{y_0^2\dfrac{(cx_0-a^2)^2}{x_0^2}}{x_0^2-2cx_0+c^2+\dfrac{b^2x_0^2}{a^2}-b^2}$$

$$=\frac{y_0^2\dfrac{(cx_0-a^2)^2}{x_0^2}}{x_0^2(1+\dfrac{b^2}{a^2})+(c^2-b^2)-2cx_0}$$

می‌دانیم که در این هذلولی: $a^2+b^2=c^2$ ، پس داریم:

$$KH^2=\frac{y_0^2\dfrac{(cx_0-a^2)^2}{x_0^2}}{\dfrac{c^2x_0^2}{a^2}+a^2-2cx_0}=\frac{y_0^2\dfrac{(cx_0-a^2)^2}{x_0^2}}{\dfrac{(cx_0-a^2)^2}{a^2}}=\frac{y_0^2}{a^2x_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{KH^2=\frac{y_0^2}{a^2x_0^2}} \qquad (3)$$

به همین ترتیب می‌توان KH_1 را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$KH_1=\frac{\left|-y_0\times\dfrac{a^2}{x_0}-cy_0\right|}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}}\Rightarrow KH_1^2=\frac{y_0^2(\dfrac{a^2}{x_0}+c)^2}{(x_0+c)^2+y_0^2}$$

$$\Rightarrow KH_1=\frac{y_0^2\dfrac{(a^2+cx_0)^2}{x_0^2}}{x_0^2+2cx_0+c^2+y_0^2}$$

$$=\frac{y_0^2\dfrac{(a^2+cx_0)^2}{x_0^2}}{x_0^2+2cx_0+c^2+\dfrac{b^2x_0^2}{a^2}-b^2}$$

$$\Rightarrow KH_1=\frac{y_0^2\dfrac{(a^2+cx_0)^2}{x_0^2}}{x_0^2(1+\dfrac{b^2}{a^2})+(c^2-b^2)+2cx_0}$$

$$=\frac{y_0^2\dfrac{(a^2+cx_0)^2}{x_0^2}}{\dfrac{c^2x_0^2}{a^2}+a^2+2cx_0}$$

$$\Rightarrow KH_1=\frac{y_0^2\dfrac{(a^2+cx_0)^2}{x_0^2}}{\dfrac{(cx_0+a^2)^2}{a^2}}=\frac{y_0^2}{a^2x_0^2}$$

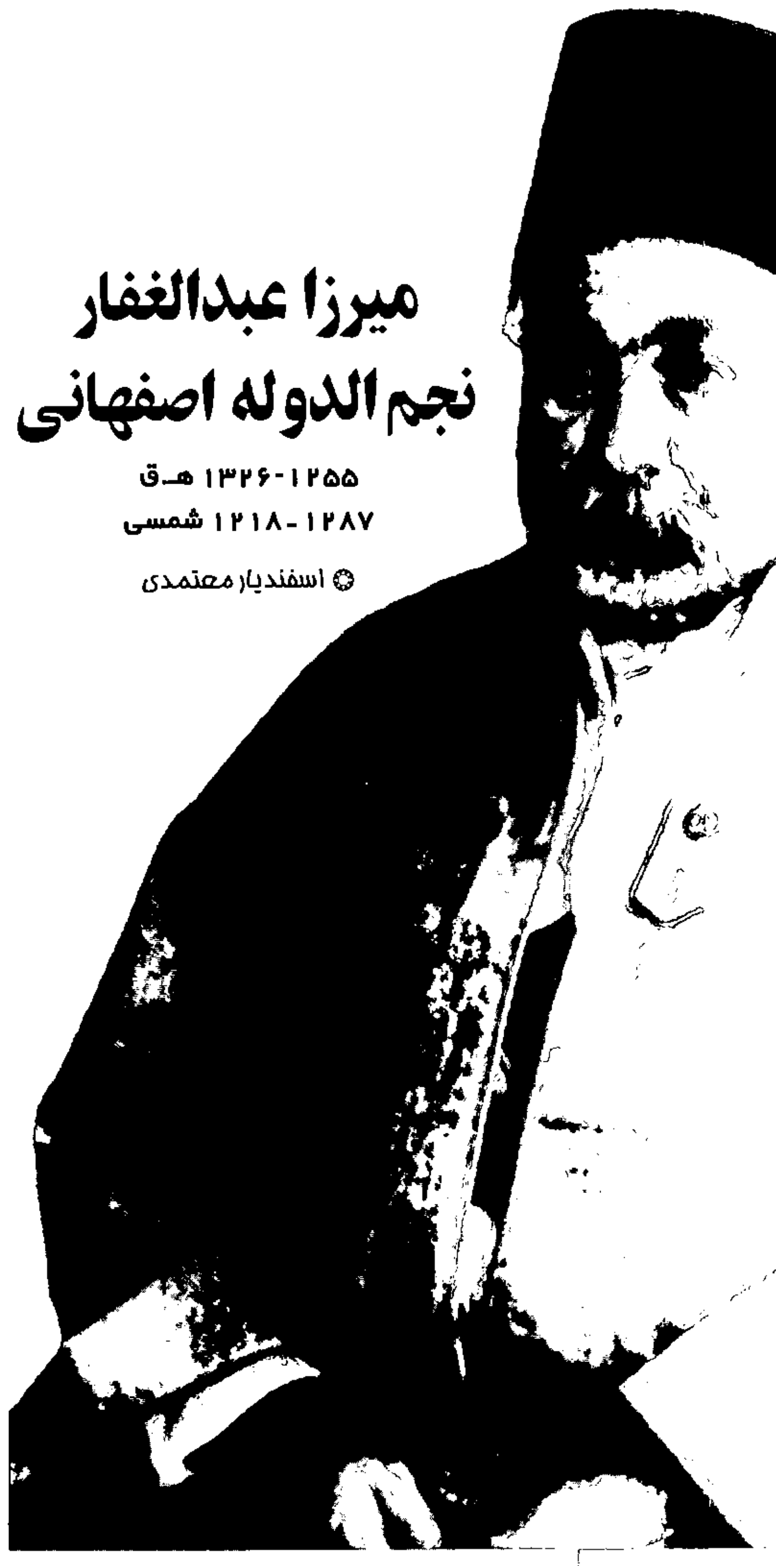
$$\Rightarrow \boxed{KH_1=\frac{y_0^2}{a^2x_0^2}} \qquad (4)$$

با مقایسه دو رابطه (۳) و (۴) ملاحظه می‌کنیم که $KH_1=KH$ ؛ در نتیجه نقطه K واقع بر نیمساز زاویه $F'\hat{P}F$ است، بنابراین $\alpha=\beta$.

میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله اصفهانی

۱۳۲۶-۱۲۵۵ هـ.ق
۱۲۸۷-۱۲۱۸ شمسی

اسفندیار معتمدی



میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله معلم ریاضی دارالفنون، مولف، مترجم و تقویم‌نویس بود. او دومین پسر آخوندملاعلی محمد اصفهانی است.[۱] در ربیع‌الاول سال ۱۲۵۵ هـ. ق. در اصفهان به دنیا آمد. پدرش یکی از استادان بزرگ ریاضی زمان خود بود که در سال ۱۲۷۴ هـ. ق. به دعوت شاهزاده علی‌قلی میرزا اعتضادالسلطنه از اصفهان به تهران رفت و در دارالفنون به تدریس ریاضی و تألیف و ترجمه پرداخت.[۲] ملاعلی محمد در علوم قدیم صاحب‌نظر بود و با ریاضیات جدید هم آشنایی داشت.

عبدالغفار تحصیلات مقدماتی را در زادگاه و نزد پدر دانشمند خود آموخت و بر بسیاری از دانش‌های قدیم مسلط شد. پس از آن خانوادهٔ او به تهران منتقل شد و پدرش در دارالفنون مشغول به کار شد. او نیز نزد معلمان خارجی دارالفنون، به تحصیل زبان انگلیسی و فرانسه پرداخت و در ارتباط با آن‌ها علوم طبیعی، ریاضی و هیئت و نجوم را فرا گرفت؛ به‌طوری که در حدود سن بیست سالگی در دارالفنون، به رتبهٔ معلمی کل علوم ریاضی نائل شد.

میرزا عبدالغفار با تمام وجود به شغل معلمی عشق می‌ورزید و با مایه‌ای که از علوم قدیم و جدید داشت، توانست با سرعت خود را به عنوان یک معلم موفق معرفی کند.

به نوشته‌ی میرزا ابوالحسن خان فروغی، نجم‌الدوله «با همان اهتمام و

متانت که موروثی او بود، اوقات شریف خود را به مشاغل علمی شریف‌تر می‌نمود. روز و شب یا تدریس می‌کرد و یا تألیف می‌فرمود و چنان‌که اقتضای نظم این جهان و حکمت خداوند منّان است، از تخم‌ها که پدر والاگهر در مزرع عمل کشته بود، ثمرهای نیکو بر می‌داشت؛ یعنی هر روز در طریق عزت و آبرو قدمی تازه می‌گذاشت. گذشته از مقامات علمی و اعتبار در مدرسهٔ دارالفنون و دستگاه محترم وزارت علوم معروف پیشگاه ناصرالدین شاه بود، به عنوان منجمی مخصوص سلطنت اختصاص و در خدمت آن پادشاه منزلتی خاص داشت. به امرش ترجمه و تألیف کتب و رسایل می‌کرد و بی‌منّت وسائل به الطاف خسروی سرافراز می‌شد، بلکه چندی پادشاه ذیجاه رقبه‌ی شاگردی او قبول کرد و سر تاجدار به تمکین در حضرت علم فرود آورد. به این منوال در سال ۱۲۹۵ دانشمند به لقب نجم‌الملکی مفتخر شد و از آن پس در فنون فضائل چون آفتاب مشتهر گردید.»[۳]

میرزا عبدالغفار یک سال پس از دریافت لقب نجم‌الملکی، به زیارت مکه رفت و به حاج عبدالغفار نجم‌الملک شهرت یافت...

حاج عبدالغفار پسر نداشت و در عوض به تربیت برادرزاده‌اش «**میرزا محمودخان**» و خواهرزاده‌اش **میرزا علی‌خان** همت گماشت.[۴]

«آن مرد بزرگوار، تنها کسی بود که در دورهٔ خود، جامع علوم ریاضی، نجوم، هیئت قدیم و جدید و علوم طبیعی و غیره گردید. با قید آشنایی به اصطلاح ایرانی و اروپایی و چون به نظر آرند که جامعیت آن عالم ماهر در این نبوده که تنها اطلاعی سطحی از علوم مذکوره حاصل کرده باشد، بلکه اغلب فنون را به کمال می‌دانسته و در هر شعبه، دارای رسایل و تألیفات عالیه است، خواهند دانست که مقدار دانش دانشمند عظیم بوده و حضرتش را دارای مقامی منیع می‌نموده. بزرگ‌تر از همه آن که علم خود را بی‌حاصل و ثمر نگذاشته، حاصلی را از یکدست درو کرده و از دست دیگر کاشته، از یک جهت مدتی از عمر خویش را مصروف تدریس علوم ریاضی از مقدمات تا درجات عالیه آن نموده، به‌طوری که هر کس در این بلاد، اطلاعی مختصر یا مفصل از علوم ریاضی دارد، شاگرد با واسطه یا بی‌واسطه حاجی نجم‌الدوله می‌باشد.»[۵]

نجم‌الدوله و تقویم

حاج میرزا عبدالغفار در مقدمه‌ی کتاب بدایة‌الجبر که در سال ۱۳۱۹ قمری تألیف و منتشر کرده، می‌نویسد:

«از هفتاد سال قبل، هر کس در اصفهان یا تهران، فنون ریاضی و نجوم ایرانی و فرنگی و فنون غریبه آموخته باشد، منشأ و مولد و سرچشمه‌اش در خانوادهٔ مرحوم والد بوده و از این محل کسب نموده، بی‌واسطه یا با واسطه.»

نخستین کسی که از این خانواده به استخراج و تنظیم تقویم دست زد، میرزا عبدالوهاب منجم‌باشی، عموی نجم‌الدوله بود. او منجم مهدعلیا، مادر ناصرالدین شاه بود و تا سال ۱۲۸۹ که وفات یافت، به چاپ تقویم مشغول بود. پس از آن، این کار متوقف شد تا آن که میرزا عبدالغفار اقدام به استخراج و چاپ تقویم کرد و آن را به نام میرزامحمود منتشر کرد. ماه آخر در سال ۱۲۹۰ به لقب نجم‌الملکی و منصب منجم‌باشی‌گری مخصوص دربار همایون اعلی مفتخر شد. او امر تقویم را از ۱۲۸۹ تا ۱۳۳۷ قمری برابر ۱۲۵۱ تا ۱۲۹۸ خورشیدی (تا یازده سال پس از مرگ خود) استخراج کرد.[۵]

حاج میرزا عبدالغفار که با منابع خارجی آشنا بود، همه ساله در استخراج تقویم، نوآوری‌هایی می‌کرد و بر میزان دقت خود می‌افزود، به‌طوری که توانست حکم «اختصاص طبع تقویم» را از شاه به صورت زیر [خطاب به وزیر داخله] دریافت کند:

سواد دستخط مطاع مقدس

عین‌الدوله، وزیر داخله!

تقویم معمول قدیم با خود حاجی نجم‌الدوله است و تقویم تازه که خودمان دستورالعمل داده و پاره‌ای تصرفات در آن شده است، با نجم‌الملک است. شهر شعبان ۱۳۲۱»

دستخط فوق که از طرف مظفرالدین شاه صادر شد، به دنبال بعضی اعتراض‌ها بود که به تقویم نجم‌الدوله

می‌شد. در نمرهٔ ۲۹۳ روزنامهٔ تربیت به تاریخ پنجشنبه شانزدهم رجب ۱۳۲۱، چنین آمده است:

«زحمات و خدمات چهل سالهٔ جناب مستطاب معظّم، حاجی نجم‌الدوله، معلم کل علوم ریاضی که صاحب مؤلّفات جلیله کثیره می‌باشد، منظور نظر مهر اثر اعلیحضرت قوی شوکت اقدس همایون شاهنشاهی خلدالله ملکه و سلطانه شده. نیز نظم و انتظام عمل تقویم و سدباب اختلاف و اغتشاش آن را مهم دانسته. در این اوان، به اقتضای زمان، دستخط مطاع ملوکانه دربارهٔ آن جناب خطاب به نواب مستطاب اشرف ارفع والاعین‌الدوله، وزیر داخله و حکمران دارالخلافه باهره و مضافات ادام‌الله اجلاله العالی شرف صدور یافته و صورت آن از این قرار است:

صورت دستخط مطاع مقدس
عین‌الدوله، وزیر داخله

تقویم‌های حاجی نجم‌الدوله به‌عرض رسید. امتیاز تقویم‌ها با خود حاجی نجم‌الدوله است و هیچ کس مداخله نخواهد کرد. فقط تقویم روزانه را حکم فرموده‌ایم که نجم‌الملک بدهد چاپ بکنند؛ والاّ تقویم معمولی باز با خود حاجی نجم‌الدوله است، لاغیر.
فی شهر رجب ۱۳۲۱»

در شمارهٔ ۲۹۹ همین روزنامه آمده است:

«تقاویمی که جناب مستطاب حاجی نجم‌الدوله استخراج می‌کند و منتشر می‌سازد، پنج قسم است، اول، تقویم رمزی معمول، دوّم تقویم فارسی معمول، سیم تقویم وقت‌نامهٔ کوچک معروف به بغلی، چهارم تقویم توقیع نامه که دو، سه سال بود ترک شده بود و مجدداً برای سال نو طبع شده، پنجم تقویم دیوارکوب سیصد و شصت ورقی معروف به تقویم الخواص، و این هر پنج قسم در صحن مسجدشاه نزد حاج ابوالحسن به‌فروش می‌رسد و به‌علاوه بعضی کتب و رساله در تطبیق تاریخ هجری شمسی که برای دو هزار سال به‌طبع رسانیده و تجار و مترجمین و اجزای وزارت خارجه از آن ناگزیرند و مبلغی فایده می‌برند.»

میرزا عبدالغفار و جغرافیا

میرزا عبدالغفار، پیشقدم آموزش جغرافیا در دارالفنون است. او **نقشهٔ شهر تهران را تهیه و جمعیت تهران را** سرشماری کرد. [۶]

«نخستین بار در سال ۱۲۸۶ قمری بود که عبدالغفار و جعفرقلی‌خان نیّرالملک رئیس مدرسه دارالفنون به یاری ۲۰ نفر از شاگردان مهندسی، نقشهٔ اراضی جدید شهر را در مدت هشت ماه کشیدند و به‌طوری که روزنامهٔ دولت علّیهٔ ایران در ۲۶ محرم ۱۳۸۷ می‌نویسد، به شاه دادند و به سه هزار تومان انعام سرافراز شدند. از این پس، عبدالغفار کار نقشه‌برداری از تهران را همچنان ادامه داد تا در اواسط سال ۱۳۰۵ کار به انجام رسید و نقشه‌ای ساخته شد «خیلی صحیح و دقیق...که چنان دقیق است که می‌توان خانه‌ها و املاک را با کمال دقت بروی مساحت نمود.» با این حال، چون عمل به این‌جا رسید، ملاحظه نمودند که زمین شهر افقی نیست... مناسب دید که محیط شهر را تسویه نماید. (پس دور شهر را به دقت تسویه و تراز نمود و حاصل عمل را در نقشه نقل کرد... پس این نقشه مطابق است با وضع شهر دارالخلافه در تاریخ محرم سنه ۱۳۰۹.» [۷]

میرزا عبدالغفار به مدت ۲۳ سال روی نقشه‌تهران کار کرد و توانست راهنمای دقیقی از شهر تهران فراهم آورد. [۸]

در سال ۱۲۸۴ ناصرالدین شاه امر به سرشماری تهران می‌دهد و نجم‌الدوله را مأمور این کار می‌کند. نجم‌الدوله با کمک هشت تن از شاگردان بزرگ و معقول و مؤدّب و باهوش دارالفنون، از شانزده رمضان ۱۲۸۴ تا دوازدهم ذی‌قعده، همان سال، یعنی در مدت ۵۵ روز از جمعیت تهران سرشماری می‌کند. گزارش کامل این سرشماری را نجم‌الدوله در رساله‌ای به نام تشخیص نفوس دارالخلافه به اعتضادالسلطنه وزیر علوم داده است.

نجم‌الدوله جمعیت تهران را صدوپنجاه و پنجهزار و هفتصد و سه‌وشش (۱۵۵۷۳۶) نفر سرشماری کرده است. از این جمعیت ۱۴۷۲۵۶ نفر رعیت، ۸۴۸۰ نفر سپاهی (۵۵۰۸ سرباز، ۱۱۴۰ نفر غلام پیشخدمت، ۷۰۰ نفر توپچی، ۴۲۰ نفر سواره‌ی نصرت) ۳۰۰ نفر سواره نظام، ۱۵۰ نفر زنبورکچی، ۱۳۳ موزیکچی و ۱۲۰ نفر غلام مخصوص بوده است.

میرزا عبدالغفار نقشهٔ شهرهای قم،

کاشان، بروجرد، خرم‌آباد، شوشتر، دزفول و فلاحیه، و نقشهٔ توپوگرافی از طهران الی عراق و خوزستان و شط العرب و بختیاری و اصفهان را ضمن مأموریت‌هایی که از جانب شاه شهید ناصرالدین شاه داشته، برداشته است.[9]

میرزا عبدالغفار، مؤلّف و مترجم

نجم‌الدوله از معدود معلمانی است که برای پیشرفت ایران در همه زمینه‌های آموزشی و پرورشی قدم برداشته است. او مسؤولیت معلمی خود را خوب درک کرده و دانش‌آموزان را عملاً به کار و تلاش و فعالیت گروهی کشانده است. نمونهٔ موفق این کار را در تهیهٔ نقشهٔ تهران و سرشماری نفوس آن مشاهده می‌کنیم.

نجم‌الدوله در مقام مؤلّف و مترجم هم صاحب نام است. او به تألیف و ترجمه کتاب‌های ریاضی (هندسه، جبر، حساب، مثلثات) نجوم، فیزیک، شیمی، جغرافیا و عمران (پل‌سازی، راه‌سازی، قلعه‌سازی) دست زد و به همّت و پشتکار او کتاب‌هایی در موضوع‌های کشاورزی چاپ شد. علاوه بر آن، توجهی به آثار نظم و نثر گذشتگان داشت.[10] نجم‌الدوله در هر یک از کتاب‌ها، مقدمه‌های جامعی نوشته که معرّف علاقهٔ او به موضوع کتاب و پیشرفت علم و انتشار معارف و ترقی کشور بوده است.

زیرنویس ....

۱. برادر بزرگتر میرزا عبدالغفار موسوم به میرزا عبدالوهاب (۱۲۵۰-۱۲۸۹ ق) بوده و او نیز راه دانش نجوم و کواکب برفته؛ چنان‌که مشهور به «منجم‌باشی» شده و استخراج تقویم به او اختصاص یافته. لیکن میرزا عبدالوهاب منجم‌باشی در اواخر عمر پدر دانشور، یعنی در سال ۱۲۸۹ جهان فانی را وداع گفت و یادگار عزیزی از خود باقی گذاشت، و آن، پسر هوشیاری بود موسوم به میرزا محمودخان، که به حکم تقدیر، بایستی بعدها به همت عم خلیق تربیت یابد و به علت بد عهدی زمانه و تندی هوش و خیال به موقع هلاک شتابد.» فرهنگ ایران زمین جلد ۲۰، ۱۳۵۳ ص ۳۸۶

۲. از جمله کتاب‌های ترجمهٔ ملاعلی محمد اصفهانی، ترجمهٔ یک فصل از آثارالباقیه، تألیف ابوریحان بیرونی است. این فصل کتاب، با همکاری علی قلی میرزا اعتضادالسلطنه، نخستین وزیر علوم در ایران ترجمه شده و به کوشش استاد اکبر دانا سرشت جزو سلسله انتشارات انجمن آثار ملی در سال ۱۳۵۲ در تهران چاپ و منشر شده است.

۳. فرهنگ ایران زمین، جلد ۲۰، ص ۳۸۶، نوشتهٔ میرزا ابوالحسن خان [فروغی].

۴. میرزا محمودخان، پسر میرزا عبدالوهاب «منجم‌باشی» بود. او برای آن‌که به جانشینی پدر برگزیده شود، به علوم ریاضی و نجوم و هیئت روی نمود و چون استعداد کافی داشت، به‌زودی در مراتب علمی از مقام پدر بالاتر رفت و در علوم ریاضی، طبیعی و فن عکاسی به کمال رسید و در مدرسه دارالفنون به تدریس علوم ریاضی پرداخت. در سال ۱۳۱۳ لقب نجم‌الملکی از میرزا عبدالغفار به میرزا محمود منتقل شد و حاج عبدالغفار ملقب به نجم‌الدوله شد. میرزا محمودخان نجم‌الملک، فقط یک سال به استخراج تقویم پرداخت. لیکن نجم‌الدوله تقویم را استخراج و به نام برادرزاده خود منتشر می‌کرد.
میرزا علی‌خان به تشویق دایی خود به تحصیل علم طب پرداخت و در طب و جراحی مهارت یافت. «جناب مستطاب دکتر میرزا علی‌خان ناصر الحکما، امروز ملقب به اعلم‌الملک می‌باشد و نزد همه کس معروف است.» (مأخذ پیشین)

۵. فرهنگ ایران زمین، ج ۲۰، ص ۳۳۵.

۶. تدریس جغرافیا در دارالفنون به هر صورتی که آغاز شده باشد، مسلّم است که این علم از موقعی اهمیت و اعتبار پیدا کرده است که میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله (نجم‌الملک) ستارهٔ درخشان دنیای علم ایران، به تدریس و ترویج آن در دارالفنون اهتمام ورزیده است.
جغرافیا در ایران، دکتر محمد حسن گنجی، انتشارات آستان قدس رضوی، چاپ دوم، ۱۳۸۰، ص ۲۶.

۷. فرهنگ ایران زمین، ج ۲۰، میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله و تشخیص نفوس دارالخلافه به اهتمام ناصر پاکدامن، ص ۳۴۰.

۸. جغرافیدان بنام دیگری که از این زمان می‌شناسیم، مهندس عبدالرزاق بغایری است که در سال ۱۲۸۶ هـ. ق. در خراسان چشم به جهان گشوده و در ده سالگی به تهران آمده است و پس از فراگیری علوم اولی نزد پدرش، جهت تکمیل تحصیلات در سال ۱۳۰۴ هـ. ق. وارد دارالفنون شده و مدت شش سال در آن‌جا به تکمیل تحصیلات پرداخته است. او در ۱۳۰۸ هـ. ق. اقدام به ترسیم نقشهٔ ایران با استفاده از جمیع نقشه‌های انگلیسی، فرانسوی و روسی کرده است و آن چنان نقشه‌ای با اصول صحیح و تلفظهای کنترل شده فراهم ساخته که سال‌ها مورد استفادهٔ خاص و عام بوده است. جغرافیا در ایران، صفحهٔ ۲۹.

۹. فرهنگ ایران زمین، ج ۲۰، مختصری از ترجمهٔ حاجی نجم‌الدوله، نوشتهٔ میرزا ابوالحسن خان فروغی، ص ۳۹۳.

۱۰. به کتابشناسی میرزا عبدالغفار مراجعه شود.
کتابشناسی میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله
تشخیص نفوس دارالخلافه

منابع و مآخذ ....

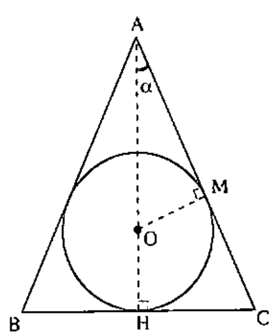
۱. آئین فرزانگی، ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان اصفهان، زمستان ۱۳۷۴، ج سوم.
۲. اثرآفرینان، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی، ج پنجم، ۱۳۸۰.
۳. تربیت، نخستین نشریهٔ روزانه و غیردولتی ایران به مدیریت محمدحسین فروغی (ذکاءالملک)
۵. شرح حال رجال ایران، مهدی بامداد، انتشارات زوار، تهران.
۶. جغرافیا در ایران، دکتر محمدحسن گنجی، انتشارات آستان قدس رضوی، چاپ دوم، ۱۳۸۰.
۷. فرهنگ ایران زمین، صاحب امتیاز و مدیر، ایرج افشار، جلد بیستم.

هوشنگ شرقی

یک مسأله از بهینه‌سازی و یک پارادوکس*

دانش آموزان سال سوم ریاضی در کتاب حسابان، با مسائل بهینه‌سازی آشنایی دارند. در این جا می خواهیم با طرح یک مسألهٔ بهینه‌سازی، نکتهٔ جالبی را برای آنان وسایر علاقه‌مندان مطرح کنیم.

مسأله. از بین مثلث‌های متساوی‌الساقین محیط بر دایره‌ای ثابت، کدام‌یک حداقل (می‌نیمم) مساحت را دارند؟



حل: بدیهی است که بر دایرهٔ ثابت $C(O,R)$ بی‌شمار مثلث متساوی‌الساقین می‌توان محیط کرد (برای همهٔ آن‌ها دایرهٔ C دایرهٔ محاطی داخلی خواهد بود). یکی از این مثلث‌ها در شکل بالا رسم شده است. اگر $AH=h$ و $CH=a$ $(BC=2a)$ باشد، تابع هدف مساحت مثلث، یعنی $S=ah$ است و a و h هر دو متغیرند. برای آن که این تابع هدف را یک متغیره کنیم، یک روش هندسی به کار می‌بریم. بدیهی است که O مرکز دایره روی ارتفاع AH است (چرا؟). اگر از O به نقطهٔ M (نقطهٔ تماس دایره و مثلث) وصل کنیم، $OM \perp AC$ و $\hat{M}=90^\circ$ است. حال می توانیم بنویسیم:

$$\Delta AOM: \sin\alpha = \frac{OM}{OA} = \frac{R}{h-R}$$

$$\Rightarrow h\sin\alpha - R\sin\alpha = R \Rightarrow h = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$\Delta ACH:\ tg\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{a}{h} \Rightarrow a = htg\alpha$$

$$\Rightarrow a = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$S = ah \Rightarrow S = \frac{R(\sin\alpha+1)}{\cos\alpha} \times \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow S = \frac{R(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

و چون R مقدار ثابتی دارد، پس در واقع باید تابع هدف $f(\alpha) = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$ را می‌نیمم کرد. برای این کار از مشتق استفاده می کنیم:

$$f'(\alpha) = \frac{2(1+\sin\alpha)\cos\alpha(\sin\alpha\cos\alpha) - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(1+\sin\alpha)^2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow (1+\sin\alpha)[2\sin\alpha\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(1+\sin\alpha)] = 0$$

$1+\sin\alpha \neq 0$ (چرا؟)

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha(\sin\alpha - 1) + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -(1-\sin^2\alpha)(1-\sin\alpha) + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -(1-\sin\alpha)^2(1+\sin\alpha) + \sin^2\alpha(1+\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow (1+\sin\alpha)(-(1-\sin\alpha)^2 + \sin^2\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -1 - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

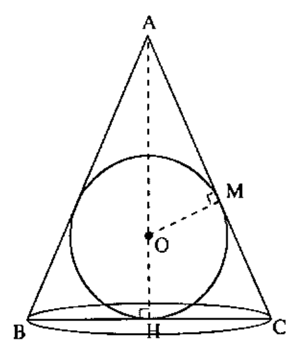
$$\Rightarrow 2\sin\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2},\ \ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

بنابراین باید $\alpha = 30^\circ$ و در نتیجه، $\hat{A} = 60^\circ$ باشد؛ یعنی: در بین مثلث‌های متساوی‌الساقین محیط بر دایرهٔ ثابت،

مثلث متساوی‌الاضلاع کم‌ترین مساحت را دارد.

تمرین: در مسألهٔ قبل نشان دهید اگر $\alpha = ۴۵^\circ$ یا $\alpha = ۱۵^\circ$ باشد، مساحت مثلث ABC بیش‌تر از مقدار آن به ازای $\alpha = ۳۰^\circ$ است.

اکنون تصور کنید اگر تمام مجموعهٔ شکل را حول ارتفاع AH دوران دهیم، چه شکلی حاصل می‌شود؟



بله! یک کره که یک مخروط بر آن محیط شده است: حال آیا می‌توانید بگویید که از بین مخروط‌های محیط بر کره‌ای ثابت، کدام‌یک می‌نیمم حجم را دارند؟ احتمالاً می‌گویید همان مثلثی که کم‌ترین مساحت را دارد، با دوران حول ارتفاع خود، مخروطی با کم ترین حجم ایجاد می‌کند!

امّا ببینیم آیا حدس شما درست است؟

این بار تابع هدف حجم مخروط است:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi CH^۲ . AH = \frac{۱}{۳}\pi a^۲ h$$

با همان اطلاعات مسألهٔ قبل، می‌توان نوشت:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{R^۲(۱+\sin\alpha)^۲}{\cos^۲\alpha} \times \frac{(۱+\sin\alpha)R}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi R^۳}{۳} \cdot \frac{(۱+\sin\alpha)^۳}{\cos^۲\alpha \sin\alpha}$$

حال باید تابع هدف $f(\alpha) = \frac{(۱+\sin\alpha)^۳}{\cos^۲\alpha\sin\alpha}$ را می‌نیمم کنیم:

$$f'(\alpha) = \frac{۳(۱+\sin\alpha)^۲\cos\alpha(\cos^۲\alpha\sin\alpha) - (\cos^۳\alpha - ۲\cos\alpha\sin^۲\alpha)(۱+\sin\alpha)^۳}{\cos^۴\alpha\sin^۲\alpha} = ۰$$

$$\Rightarrow (۱+\sin\alpha)^۲\cos\alpha[۳\cos^۲\alpha\sin\alpha - (\cos^۲\alpha - ۲\sin^۲\alpha)(۱+\sin\alpha)] = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\cos^۲\alpha\sin\alpha - \cos^۲\alpha - \cos^۲\alpha\sin\alpha + ۲\sin^۲\alpha + ۲\sin^۳\alpha = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲\alpha\sin\alpha - \cos^۲\alpha + ۲\sin^۲\alpha(۱+\sin\alpha) = ۰$$

$$\Rightarrow \cos^۲\alpha(۲\sin\alpha - ۱) + ۲\sin^۲\alpha(۱+\sin\alpha) = ۰$$

$$\Rightarrow (۱-\sin\alpha)(۱+\sin\alpha)(۲\sin\alpha - ۱) + ۲\sin^۲\alpha(۱+\sin\alpha) = ۰$$

$$\Rightarrow (۱+\sin\alpha)((۱-\sin\alpha)(۲\sin\alpha - ۱) + ۲\sin^۲\alpha) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin\alpha - ۱ - ۲\sin^۲\alpha + \sin\alpha + ۲\sin^۲\alpha = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\sin\alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \alpha = \text{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$$

پس حدس شما درست نبود! یعنی مثلث متساوی‌الساقین که زاویهٔ رأس آن $۲\text{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$ است، با دوران خود، مخروطی با کم‌ترین حجم تولید می‌کند، در حالی‌که این مثلث می‌نیمم مساحت را ندارد! آیا عجیب نیست؟

تمرین. تحقیق کنید که حجم مخروطی که کم‌ترین حجم را در بین مخروط‌های محیط بر کرهٔ ثابت دارد، دو برابر حجم کره است.

زیرنویس ....

○ باطل‌نما

مبناها



سید محمدرضا هاشمی موسوی

قضیهٔ ۱. اگر b عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد، هر عدد طبیعی N را می‌توان به طریقی یکتا:

$$N=a_kb^k+a_{k-1}b^{k-1}+...+a_2b^2+a_1b^1+a_0b^0 \qquad (1)$$

نمایش داد که در آن k یک عدد صحیح نامنفی و $a_i\in Z$ و $0\le a_i\le b-1$ و $a_k\neq 0$ به عنوان مثال، برای عدد ۱۳۸۴ می‌توان نوشت:

$$b=10 \ : \ 1384=1\times10^3+3\times10^2+8\times10^1+4\times10^0$$

می‌دانیم عدد b در رابطهٔ (۱) که در واقع بسط عدد N را نشان می‌دهد، مبنا و عددهای a_i ضرایب بسط خوانده می‌شوند. واضح است که ضرایب بسط همیشه از مبنای مورد نظر کوچک‌ترند.

نتیجهٔ ۱. اگر $b\in N$ و $b>1$ و $k\in Z$ و $0\le a_i\le b-1$ و $a_k\neq 0$، آن‌گاه:

$$N=a_kb^k+a_{k-1}b^{k-1}+...+a_1b^1+a_0b^0 \Leftrightarrow$$

$$N=(\overline{a_ka_{k-1}...a_1a_0})_b \qquad (2)$$

$$(\overline{a_ka_{k-1}...a_1a_0})_b=a_kb^k+a_{k-1}b^{k-1}+...+a_1b^1+a_0b^0$$

رابطهٔ (۲) بسط هر عدد دلخواه N را بر مبنای مورد نظر نشان می‌دهد. از رابطهٔ (۲) بسط عدد برای حالت $b=10$ به سادگی به دست می‌آید:

$$(\overline{a_ka_{k-1}...a_1a_0})_{10}=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+...+a_1(10)+a_0=\overline{a_ka_{k-1}...a_1a_0}$$

در صورتی که b عددی غیر ۱۰ باشد، ابتدا عدد را به صورت (۲) بسط می‌دهیم و سپس حاصل بسط را به دست می‌آوریم، که در این صورت، عدد حاصل بر مبنای ۱۰ خواهد بود.

مثال ۱. عدد $(345)_2$ را به مبنای ۳ بنویسید.

حل: برای نوشتن عددی بر مبنای دلخواه b، ابتدا عدد را بر مبنای ۱۰ برده و سپس با تقسیمات متوالی بر b، عدد را بر مبنای b می‌نویسیم.

$$(345)_2=3\times2^2+4\times2^1+5\times2^0=12+8+5=(25)_{10}$$

$$(345)_2=(25)_{10}=(221)_3$$

$$25 \div 3:\ 24,\ \text{باقیمانده } (1) \qquad 8 \div 3:\ 6,\ \text{باقیمانده } (2) \qquad (2)$$

مثال۲. عدد x را تعیین کنید:

$$(۵۴۳)_۶ = (x)_۷$$

حل: ابتدا عدد ۵۴۳ را به مبنای ۱۰ برده و سپس با تقسیمات متوالی بر ۷ عدد را بر مبنای ۷ می‌نویسیم.

$$(۵۴۳)_۶ = ۳+۴\times۶+۵\times۶^۲ = ۳+۲۴+۱۸۰ = (۲۰۷)_{۱۰}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲۰۷ & ۷ \\ \underline{۱۴}\ \ & ۲۹ \ |\ ۷ \\ ۶۷ & \underline{۲۸}\ \ \ ۴ \\ \underline{۶۳} & ۱ \\ ۴ & \end{array}$$

$$(۵۴۳)_۶ = (۲۰۷)_{۱۰} = (۴۱۴)_۷ ; x = ۴۱۴$$

نتیجهٔ ۲. برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ مانند b به مبنایی دلخواه مانند c، ابتدا عدد مورد نظر را به مبنای ۱۰ برده و سپس با تقسیمات متوالی بر c عدد را به مبنای c می‌نویسیم.

$$(\overline{a_k a_{k-۱} \dots a_۱ a_۰})_b$$
$$= (a_۰ + a_۱ b^۱ + a_۲ b^۲ + \dots + a_{k-۱} b^{k-۱} + a_k b^k)_{۱۰} = N$$

$$\begin{array}{l} N \ |\ c \\ r_۰ \quad q_۱ \ |\ c \\ \quad\quad r_۱ \quad q_۲ \ |\ c \\ \quad\quad\quad r_۲ \quad q_۳ \ |\ c \\ \quad\quad\quad\quad\quad q_۴ \ \cdots\ q_{m-۱} \ |\ c \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad r_{m-۱} \quad q_m \end{array}$$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}L^۲$

پس:

$$(\overline{a_k a_{k-۱} \dots a_۱ a_۰})_b = (\overline{q_m r_{m-۱} \dots r_۲ r_۱ r_۰})_c$$

توجه: بدیهی است که همهٔ اعداد $r_۰$، $r_۱$، $r_۲$، ...، $r_{m-۱}$ و q_m از عدد c (مبنا) کوچک‌تر و غیرمنفی هستند.

مثال ۳. عدد x را در برابری تعیین کنید.

$$(۱۱۰۲۲۰۲)_۳ = (\overline{۱۳x۵})_۹$$

حل: روش اول:

$$(۱۱۰۲۲۱۲)_۳$$
$$= \underbrace{۲+۳}_{۵} + \underbrace{۲\times۳^۲+۲\times۳^۳}_{۸(۹^۱)} + \underbrace{۰+۱\times۳^۵}_{۳(۹^۲)} + \underbrace{۱\times۳^۶}_{۱(۹^۳)}$$
$$= ۵+۸(۹)+۳(۹^۲)+۱(۹^۳)$$
$$= (۱۳۸۵)_۹ \quad ; \quad \boxed{x=۸}$$

روش دوم:

$$(۱۱۰۲۲۱۲)_۳ = ۲+۳+۲\times۳^۲+۲\times۳^۳+۰+۱\times۳^۵+۱\times۳^۶$$
$$= ۵+۱۸+۵۴+۲۴۳+۷۲۹ = (۱۰۴۹)_{۱۰}$$

$$(\overline{۱۳x۵})_۹ = ۵+x(۹)+۳(۹^۲)+۱(۹^۳)$$
$$= ۹x+۵+۲۴۳+۷۲۹ = (۹x+۹۷۷)_{۱۰}$$
$$۹x+۹۷۷ = ۱۰۴۹ \Rightarrow$$
$$x = \frac{۱۰۴۹-۹۷۷}{۹} = \frac{۷۲}{۹} = ۸ \ ;$$
$$\boxed{x=۸}$$

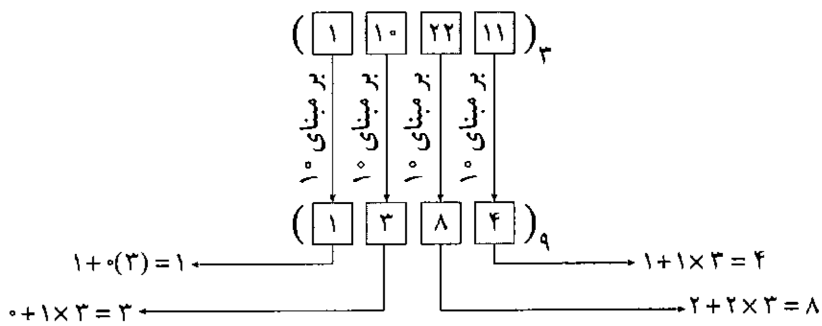
نکته: اگر عددی در مبنای b برابر x باشد و در مبنای b^n خواسته شود:

$$(x)_b = (y=?)_{b^n}$$

در این صورت کافی است n رقم اول x را بر مبنای ۱۰ برده و حاصل را رقم اوّل y در نظر بگیریم، سپس n رقم بعدی را به مبنای ۱۰ ببریم و حاصل را رقم دوم y به حساب آوریم و به همین ترتیب، همهٔ ارقام y به دست خواهد آمد.

مثال۴. عددی در مبنای ۹ به صورت $(۱۱۰۲۲۱۱)_۳$ است، آن را بیابید.

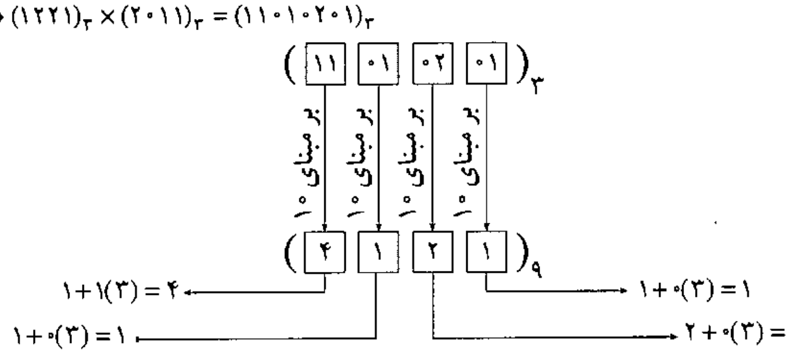
حل: در واقع باید x را در برابری $(1102211)_3 = (x)_9$ تعیین کنیم؛ زیرا $3^2 = 9$ $(n = 2)$، بنابراین به سادگی می‌توان x را تعیین کرد:



مثال ۵. حاصل عبارت $(1221)_3 \times (2011)_3$ را در مبنای ۹ بیابید.

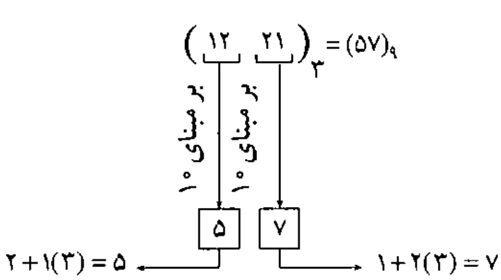
حل: روش اول:

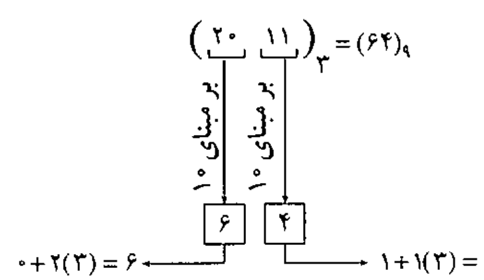
$$\begin{array}{r} 1221 \\ \times\ \ 2011 \\ \hline 1221 \\ 1221\ \ \\ 0000\ \ \ \ \\ 10212\ \ \ \ \ \\ \hline 11010201 \end{array} \rightarrow (1221)_3 \times (2011)_3 = (11010201)_3$$



$$(1221)_3 \times (2011)_3 = (11010201)_3 = (4121)_9$$

روش دوم:





$$(57)_9 \times (64)_9 = (?)_9 \rightarrow \begin{array}{r} 57 \\ \times\ 64 \\ \hline 261 \\ 376\ \ \\ \hline 4121 \end{array} \rightarrow (57)_9 \times (64)_9 = (4121)_9$$

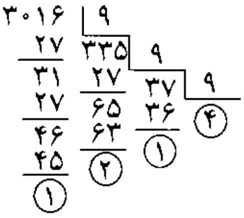
روش سوم:

$(۱۲۲۱)_۳ = ۱ + ۲\times۳ + ۲\times۳^۲ + ۱\times۳^۳ = (۵۲)_{۱۰}$

$(۲۰۱۱)_۳ = ۱ + ۱\times۳ + (۰)\times۳^۲ + ۲\times۳^۳ = (۵۸)_{۱۰}$

$(۵۲)_{۱۰}\times(۵۸)_{۱۰} = (۳۰۱۶)_{۱۰}$;

$(۳۰۱۶)_{۱۰} = (۴۱۲۱)_۹$



مثال ۶. از برابری $(۱۳)_x\times(۳۱)_x = (۱۱۲۳)_x$، حاصل $(A)_۵ = x^x$ را بیابید.

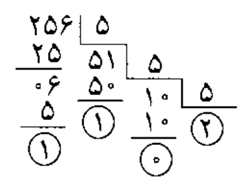
حل: $(۱۳)_x\times(۳۱)_x = (۱۱۲۳)x$;

$(۳+x)(۱+۳x) = ۳+۲x+x^۲+x^۳$;

$۳+۱۰x+۳x^۲ = ۳+۲x+x^۲+x^۳$;

$x^۳-۲x^۲-۸x=۰$; $x(x+۲)(x-۴)=۰$

$x=۰$; $x=-۲$; $\boxed{x=۴}$ $x^x=(۴)^۴=۲۵۶$;



$(۲۵۶)_{۱۰} = (۲۰۱۱)_۵$; $(A)_۵ = (۲۰۱۱)_۵$; $\boxed{A=۲۰۱۱}$

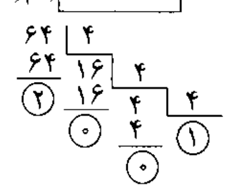
مثال ۷. از برابری $(۳x)_{۲x} = (۱۱۰)_x$، حاصل $(B)_۴ = \overline{xx}$ را بیابید.

حل: $(۳x)_{۲x} = (۱۱۰)_x$; $x+۳(۲x) = ۰+x+x^۲$;

$۷x = x^۲+x$; $x^۲-۶x=۰$; $x(x-۶)=۰$;

$x=۰$; $\boxed{x=۶}$; $\overline{xx} = (۶۶)_{۱۰}$

$(۶۶)_{۱۰} = (۱۰۰۲)_۴$; $(B)_۴ = (۱۰۰۲)_۴$; $\boxed{B=۱۰۰۲}$



مثال ۸. عددی در پایهٔ n به صورت ۴۷ و در پایهٔ m به صورت ۷۴ نوشته می‌شود، کم‌ترین مقدار m+n را بیابید.

حل: $(۴۷)_n = (۷۴)_m$; $۷+۴n = ۴+۷m$;

$m = \dfrac{۴n+۳}{۷}$,

n	m
n = ۸	m = ۵
n = ۱۵	m = ۹
n > ۷	m > ۷

$m+n = ۱۵+۹ = ۲۴$ (جواب قابل قبول)

مثال ۹. عددی در پایه ۷ به صورت $\overline{ab}$ و در پایهٔ ۹ به صورت $\overline{ba}$ است، مقدار $c=\sqrt{a^۲+b^۲}$ را بیابید.

حل: $(\overline{ab})_۷ = (\overline{ba})_۹$;

$$\begin{cases} a,b<۷ \\ ۷a+b = ۹b+a \ ;\ ۸b=۶a \ ;\ b=\frac{۳}{۴}a \ ;\ \boxed{a=۴, b=۳} \end{cases}$$

$c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$

تمرین:

۱. عدد $(۳۳۴)_۵$ را به مبنای ۷ ببرید.

۲. از برابری $(۱۳۸۴)_۹ = (x)_۳$، مقدار x را بیابید.

۳. از برابری $(\overline{۱x۸۵})_۹ = (۱۱۰۲۲۰۲)_۳$، عدد x را بیابید.

۴. عددی در مبنای ۸ بیابید که معادل عدد $(۱۱۰۲۲۰۲)_۳$ باشد.

۵. حاصل عبارت $(۲۰۲۲)_۳\times(۱۰۲۱)_۵$ را در مبنای ۶ بیابید (با سه روش).

۶. از برابری $(۳۱)_{۲x}\times(۱۳)_{۲x} = (\overline{۱۱x۳})_{x^۲}$ و $(A)_۲ = x^{x^x}$ مقدار A را بیابید.

۷. از برابری $(x۶)_{۴x} = (۱۱۰)_{۲x}$ و $(B)_۳ = \overline{xx}$ مقدار B را بیابید.

۸. عددی در پایهٔ m به صورت ۳۷ و در پایهٔ n به صورت ۷۳ است، کم‌ترین مقدار (m+n) را بیابید.

۹. عددی در پایهٔ ۵ به صورت $\overline{xy}$ و در پایهٔ ۷ به صورت $\overline{yx}$ است، مقدار (x+y) را بیابید.

۱۰. چند عدد چهار رقمی در مبنای ۵ وجود دارد؟

۱۱. چند عدد شش رقمی در مبنای ۷ با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱۲. با توجه به برابری $(b)_۲ = ۱۳^۲ = (a)_۳$، مجموع تعداد صفرها در a و b را بیابید.

۱۳. هر عدد به صورت $\overline{aaaaaa}+\overline{aaa}$ بر چه اعدادی بخش‌پذیر است؟

۱۴. هر عدد به صورت $(\overline{aaccc}+\overline{ccc})(\overline{aaabbb}+\overline{bbb})$ بر چه اعدادی بخش‌پذیر است؟



نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

مرتضی بیات و مهدی حسنی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان

اشاره

تفهیم اعداد گنگ به سادگی بیانشان نیست. بیان نمادهای صوری $\sqrt{2}$، e و π، به مراتب راحت‌تر از درک عمیق آن است که آنها چه نوع اعدادی هستند. در این مقالهٔ کوتاه، کوشش خواهد شد گامی هر چند کوچک در جهت درک بهتر اعداد گویا و گنگ برداشته شود. اکنون پس از نکاتی که در بخش اول این مقاله ذکر شد، حل چند مسأله به کمک اعداد گنگ و چند قضیه ساده دربارهٔ اعداد گنگ و همچنین بررسی قضیهٔ هالموس (صورت سادهٔ مسألهٔ هفتم هیلبرت) و قضیهٔ بیتی، پایان بخش این مقاله خواهد بود.

۳. حل چند مسأله به کمک اعداد گنگ

اینک با استفاده از گنگ بودن $\sqrt{2}$ مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم:

مسألهٔ ۱. فرض کنیم نیم خطی از مبدأ مختصات رسم شده باشد. اگر این نیم خط از نقطهٔ گنگی مانند $(1, \sqrt{2})$، عبور کند، آیا این نیم خط، از نقطهٔ صحیح دیگری عبور می‌کند؟

حل: فرض کنیم که این نیم خط از نقطه‌ای بگذرد که هر دو مؤلفهٔ x و y اعداد صحیح p و q باشند. در این صورت، با توجه به مثلث های متشابه داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{q} = \frac{1}{p},$$

اما نتیجهٔ اخیر، غیرممکن است؛ زیرا $\sqrt{2}$ گنگ است.

مسألهٔ ۲ (مسابقهٔ ریاضی دانشجویی ۱۳۵۷). در صفحهٔ XOY نقطه‌ای را مُنطق (گویا) خوانیم که هر دو مختصاتش گویا باشند. ثابت کنید که اگر دایره‌ای در صفحه داده شده باشد که مرکزش مُنطق نباشد، در این صورت روی آن دایره، حداکثر دو نقطه مُنطق وجود دارد.

حل: مسأله را با برهان خلف حل می‌کنیم. فرض کنیم تعداد نقاط گویا روی محیط دایره بیش از سه نقطه باشد و فرض کنیم:

$A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$

سه نقطه گویای روی محیط دایره باشند. معادلات خطوط عمود منصف وارد بر وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ را با l_2 و l_1 به شرح زیر نمایش می‌دهیم:

$$l_1: y - \frac{b_2 + c_2}{2} = -\frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2}\left(x - \frac{c_1 + b_1}{2}\right)$$

$$l_2: y - \frac{a_2 + b_2}{2} = -\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}\left(x - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)$$

خطوط l_1 و l_2 همدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند، لذا مرکز دایره دارای مختصات گویا می‌باشد که این مخالف

فرض است .

در مسألهٔ زیر نشان می‌دهیم که اعداد گویا و گنگ به طور بسیار پیچیده‌ای در هم آمیخته‌اند و نباید به اشتباه تصور کرد که آنها روی خط حقیقی به طور «متناوب» هستند .

اعداد گویا را می‌توان اعدادی دانست که بسط اعشاری آن‌ها به فواصل منظم تکرار می‌شود (از اثبات این مطلب صرف‌نظر می‌کنیم) . با بیان دقیق‌تر ، گوییم یک بسط اعشاری ، تکراری است ، هرگاه از رقمی به بعد ، دنبالهٔ ثابتی از ارقام به طور نامتناهی تکرار شود . مثلاً :

$$1/5432174174174174\ldots = 1/5432\overline{174}$$

یک بسط اعشاری تکراری است .

مسألهٔ ۳ (مسابقهٔ ریاضی دانشجویی ۱۳۵۲) . ثابت کنید عدد :

۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰...

که در فرم اعشاری ارقامش ، اعداد طبیعی پشت سرهم هستند ، گنگ است .

حل : فرض کنیم که دورهٔ تناوب وجود داشته باشد و از n رقم تشکیل شود . در رشتهٔ طبیعی عددها ، وقتی به اندازهٔ کافی جلو برویم ، می‌توانیم به عددی برسیم که در آن n رقم متوالی مساوی صفر باشد ؛ بنابراین دورهٔ تناوب باید از رقم‌های مساوی صفر تشکیل شده باشد . به همین ترتیب می‌توان استدلال کرد که دورهٔ تناوب باید از رقم‌های مساوی واحد تشکیل شده باشد و این دو نتیجه متناقض یکدیگرند . بنابراین x ، یک عدد گنگ است .

مسألهٔ ۴ : ثابت کنید در صفحهٔ مختصات دکارتی ، مثلثی متساوی‌الاضلاع وجود ندارد که طول ضلعش عددی گویا باشد و مختصات سه رأسش هم اعدادی گویا باشند .

حل : فرض کنید مثلثی با ویژگی‌های مورد نظر وجود داشته باشد ؛ طول ضلعش l باشد و مختصات سه رأسش :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

باشند . در این صورت مساحت مثلث برابر است با :

$$\frac{1}{2}\left[x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 + x_1y_1 + y_1x_3 + y_1x_2\right],$$

که عددی گویاست . از طرف دیگر ، مساحت مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع L برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ است ، که با توجه به گنگ بنودن $\sqrt{3}$ و گویا بودن $\frac{L}{2}$ عددی گنگ است (چرا؟) . بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و حکم مسأله درست است .

۴. چند قضیهٔ ساده دربارهٔ اعداد گنگ

همان‌طوری که دیدیم ، عدد $\sqrt{2}$ گنگ است . بسیاری از اعداد دیگر هم گنگ هستند . اثبات گنگ بودن یک عدد ، همیشه ساده نیست (خواهیم دید برای e نسبتاً ساده است و برای π مشکل‌تر ؛ اعداد جالب بسیاری هم وجود دارند که قرن‌هاست ریاضیدانان به گنگ بودنشان متقاعد هستند ؛ ولی هرگز به اثباتشان دست نیافته‌اند) . ولی تنها از این واقعیت که $\sqrt{2}$ گنگ است ، نتیجه می‌گیریم که بین هر دو عدد گویا ، عددی گنگ وجود دارند . ابتدا به لم زیر نیاز داریم :

لم ۱ . اگر $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ گویا باشند و $\frac{r}{s} \neq 0$ ، آن‌گاه $\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\sqrt{2}$ گنگ است .

اثبات . فرض کنیم $\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\sqrt{2}$ عددی گویا و برابر با $\frac{p}{q}$ باشد که p و q اعداد صحیح هستند ، آن‌گاه با معادلهٔ زیر برای $\sqrt{2}$ داریم :

$$\sqrt{2} = \frac{pn - mq}{qnr}$$

که گویاست و متناقض گنگ بودن $\sqrt{2}$ است .

قضیهٔ ۲ . بین هر دو عدد گویای متمایز ، عددی گنگ وجود دارد .

اثبات . فرض کنیم اعداد گویای مفروض $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ باشند $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$ آن‌گاه :

$$\frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n}\right) < \frac{r}{s}$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} < 1\right)$ و عدد میانی بنا به لم قبل گنگ است .

با تعویض «گویا» و «گنگ» قضیهٔ متناظر به دست می‌آید :

قضیهٔ ۳ : بین هر دو عدد گنگ متمایز ، عددی گویا وجود دارد .

اثبات . فرض کنیم اعداد گنگ مفروض a و b باشند و $a < b$. بسط آنها را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم n امین رقم اعشاری ، اولین رقمی باشد که در این دو متفاوت است . آن‌گاه :

$$a = a_0.a_1 \ldots a_{n-1}a_n \ldots$$
$$b = a_0.a_1 \ldots a_{n-1}b_n \ldots$$

و $a_n \neq b_n$، فرض کنیم $x = a_0.a_1 \ldots a_{n-1}b_n$ ، آن‌گاه x گویاست و باید داشته باشیم $a < x < b$. (واضح است که $a < x < b$ ، ولی چون b گنگ است، $x \neq b$) .

قضیهٔ ۴ . عدد e گنگ است.

اثبات. بنا به تعریف داریم:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

فرض کنیم e گویا باشد؛ بنابراین داریم $e = \frac{a}{b}$ ، که در آن a و b اعداد صحیح هستند. اگر $k \geq b$ قرار می‌دهیم:

$$\alpha = k!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{k!}\right)$$

پس $b|k!$ و α عدد صحیح است. اما:

$$0 < \alpha = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots = \frac{1}{k}$$

در نتیجه $1 > \alpha > 0$ و این تناقض است.

۵. روش غیاث‌الدین جمشید کاشانی برای محاسبهٔ تقریبی عدد π

اگر P_n و P'_n به ترتیب محیط‌های n- ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در دایره به شعاع واحد باشند، بدیهی است که:

$$P_n = 2n\sin(x) < 2\pi < P'_n = 2n\tan(x).$$

حال اگر n را برابر ۶ بگیریم، به دست می‌آید:

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3/46.$$

یعنی مقدار درست عدد π برابر با ۳ است، که اگر n را عددهای بزرگ‌تری بگیریم، به همین ترتیب، می‌توانیم با توجه به رقم‌های مشترک دو طرف نابرابری‌ها، مقدار π را تا هر چند رقم دلخواه به دست آوریم. به ازای n=۶۰، به دست می‌آید:

$$60\sin(3) < \pi < 60\tan(3)$$
$$3/1402 < \pi < 3/1445$$

بنابراین، $\pi \approx 3/14\ldots$.

این شیوهٔ محاسبهٔ عدد π ، یعنی انتخاب چند ضلعی‌های محاطی و محیطی به جای دایره و افزایش تعداد ضلع‌های آن‌ها، همان شیوه‌هایی است که غیاث‌الدین جمشیدکاشانی هم، مورد استفاده قرار داد و به کمک آن توانست برای نخستین بار، π را تا ۱۹ رقم اعشاری به‌دست آورد.

۶. قضیهٔ هالموس

همان‌طوری که دیدیم، π و e اعداد گنگ هستند؛ ولی دربارهٔ ماهیت اعدادی چون $3^{\sqrt{2}}$ یا $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و ... اطلاع نداریم. همواره این حکم به طور نادرست در ذهن‌ها تداعی می‌شود که اگر «α و β اعداد گنگ باشند، آن‌گاه α^{β} نیز گنگ است». این موضوع در حالت کلی برقرار نیست. قضیه زیر که دارای اثباتی ساده و ظریف است، به این سؤال جواب خواهد داد.

قضیهٔ ۵ (هالموس)

۱) عدد گنگی به توان عدد گنگ، ممکن است حاصل عددی گویا باشد.

۲) عدد گنگ به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

۳) عدد گویا به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

اثبات (۱). اتّحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2,$$

اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویا باشد، حکم تمام است و بنابراین $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ، مثالی از حالت مورد نظر ما خواهد بود.

(۲). اتّحاد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ باشد، برهان تمام است؛ در غیر این صورت، $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویاست؛ پس $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ ، گنگ است و در نتیجه $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}$ ، مثالی از حالت مورد بحث است.

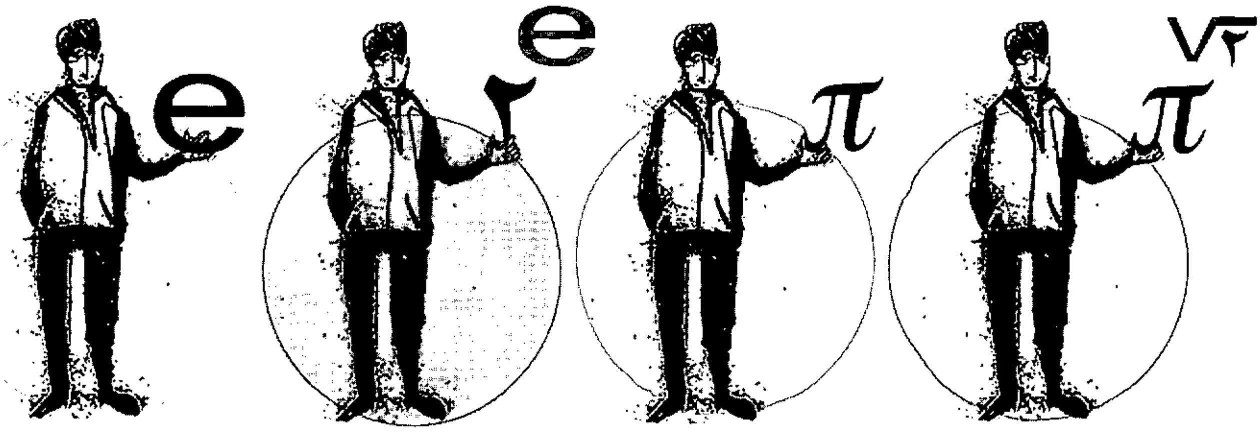
(۳). اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ باشد، حکم تمام است و اگر گویا باشد، عدد $\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که:

$$\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2}$$

پس $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ ، گنگ است.

۷. قضیهٔ بیتی

در سال ۱۹۲۶ م. سام بیتی از دانشگاه تورنتو کشف مهمی در مورد دنبالهٔ اعداد گنگ کرد. فرض کنیم X یک عدد گنگ مثبت،



مثلاً $\sqrt{۲}$ باشد. عکس X را Y می‌نامیم؛ در این صورت $Y=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\approx ۰/۷$. با افزودن ۱ به هر یک از X و Y به‌دست می‌آوریم:

$۱+X\approx ۲/۴ \qquad ۱+Y\approx ۱/۷$

حال جدولی از مضرب‌های تقریبی ۱+X و ۱+Y تشکیل می‌دهیم و این مضرب‌ها را در جدولی مطابق زیر مشخص می‌کنیم. اکنون می‌بینیم که در هر بازهٔ $]n, n+۱[$، یعنی بین هر جفت از اعداد صحیح مثبت متوالی، دقیقاً یکی از اعداد جدول وجود دارد.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
n(۱+X)	۲/۴	۴/۸	۷/۲	۹/۶	۱۲	۱۴/۴	۱۶/۸	...
n(۱+Y)	۱/۷	۳/۴	۵/۱	۶/۸	۸/۵	۱۰/۲	۱۱/۹	...

به طور کلی، قضیهٔ زیر برقرار است:

قضیهٔ ۶ (بیتی). فرض کنیم X عدد گنگ مثبتی و Y عکس آن باشد؛ در این صورت دو دنبالهٔ:

$$۱+X,\ \ ۲(۱+X),\ \ ۳(۱+X),\dots$$
$$۱+Y,\ \ ۲(۱+Y),\ \ ۳(۱+Y),\dots$$

همراه با هم دقیقاً یک عدد در هر یک از بازه‌های $]n, n+۱[$ که $n=۱,۲,۳,\dots$ قرار دارند.

در سال ۱۹۲۷ م. اثبات زیبایی از این قضیه را اوستروسکی و آتیکن انتشار دادند.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که، چون X و Y گنگ هستند، هر یک از جمله‌های دنباله‌های مورد نظر، گنگ است. این مطلب مخصوصاً به این معناست که هیچ جمله‌ای عدد صحیح نیست.

اکنون، محاسبهٔ تعداد مضرب‌های $۱+X$ که کوچک‌تر از یک عدد صحیح مثبت مفروض N هستند، بسیار آسان است. این تعداد که کوچک‌تر از N هستند، برابر است با $\left[\frac{N}{۱+X}\right]$ که در آن $[z]$ نشان دهندهٔ بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیش‌تر از z است.

همین طور تعداد جمله‌هایی که در دنبالهٔ دوم (مضرب‌های $۱+Y$) بین ۱ و N واقع‌اند، برابر است با $\left[\frac{N}{۱+Y}\right]$.

پس روی همه رفته، $\left[\frac{N}{۱+X}\right]+\left[\frac{N}{۱+Y}\right]$ جمله از دنباله‌های ما بین ۱ و N قرار دارند. چون $\frac{N}{۱+X}$ و $\frac{N}{۱+Y}$ عدد صحیح نیستند، داریم:

$$\frac{N}{۱+X}-۱<\left[\frac{N}{۱+X}\right]<\frac{N}{۱+X}$$

و

$$\frac{N}{۱+Y}-۱<\left[\frac{N}{۱+Y}\right]<\frac{N}{۱+Y}$$

با جمع کردن طرفین نابرابری‌ها و ملاحظهٔ این که:

$$\frac{1}{1+X}+\frac{1}{1+Y}=\frac{1}{1+X}-\frac{1}{1+\frac{1}{X}}=1$$

به دست می‌آوریم:

$$N-2<\left[\frac{N}{1+X}\right]+\left[\frac{N}{1+Y}\right]<N$$

چون $\left[\frac{N}{1+X}\right]+\left[\frac{N}{1+Y}\right]$ عدد صحیح است، نتیجه می‌گیریم:

$$\left[\frac{N}{1+X}\right]+\left[\frac{N}{1+Y}\right]=N-1.$$

این مطلب بدین معناست که تعداد کل جمله‌های ما که کوچک‌تر از عدد صحیح N هستند، N-۱ است. همین‌طور، تعداد کل جمله‌ها تا N+۱ برابر با N است؛ یعنی اگر N را به اندازهٔ ۱ افزایش دهیم، جملهٔ دیگری از یکی از دنباله‌ها پذیرفته می‌شود و در نتیجه، دقیقاً یک جمله بین N و N+۱ واقع است.

از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر قسمت‌های اعشاری جمله‌های این دنباله‌ها را کنار بگذاریم، هر جمله عدد صحیحی به‌دست می‌دهد و هر عدد طبیعی، دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

نتیجه. دنباله‌های $[n(1+X)]$ و $[n(1+Y)]$، که به دنباله‌های بیتی متناظر با عدد گنگ X موسوم‌اند، همراه با هم، هر عدد طبیعی را دقیقاً یک بار در بر دارند.

منابع

1. J.P.Toporowiskis, Irrational Numbers, Amer. Math. Monthly, **50** (1973) 423-424.
2. I. Stewart % D. Tall, The Foundations of Mathematics, Oxford University Prees, 1977.
3. G.H.Hardy % E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Edition, Clarandoon Prees, Oxford 1960.
4. I, Niven, A Simple Proof of the Irrationality of π ,Bulletin of the Amer. Math. Society, **53** (1947) 509.
5. D.M. Bloom, A One - Sentence Proof Taht $\sqrt{2}$ Is Irrational, Mat. Magazine **68** (1995)286.

۶. آدینه محمّد نارنجانی: *برهان‌هایی از اصمّیت* $\sqrt{2}$، مجلهٔ رشد ریاضی، ۴(۱۳۶۳)۴۳-۴۱.

۷. غلامحسین اخلاق نیا: *اعداد گنگ و گویا*، (تألیف: ایوان نیون)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۶۷).

۸. بیژن کاووس: محاسبه عدد π، مجلهٔ آشنایی با ریاضیات، ۱۱(۱۳۶۵)-۴۶۹-۴۷۰.

۹. اسداله نیکنام و ابوالقاسم بزرگ‌نیا: *مبانی ریاضی* (تالیف: ک. جی. بین مور)، انتشارات بنیاد فرهنگی رضوی (۱۳۷۰).

۱۰. غلامحسین مصاحب: *آنالیز ریاضی جلد اول*، چاپ ششم، مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر تهران (۱۳۶۳).

۱۱. فریبرز آذرپناه و علی رضایی: *برآورد گنگ با گویا*، مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، ۱۸(۱۳۷۶)۲۸-۲۱.

۱۲. سیامک کاظمی: *ابتکارهایی در ریاضیات* (تألیف: راس هانسبرگ)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۷۱).

معماهای فـ  ـکری و منطقی

در دانشکده S دروس اقتصاد، انگلیسی، فرانسه، تاریخ، لاتین و ریاضیات توسط خانم A، خانم B، خانم C، آقای D، آقای E و آقای F، نه لزوماً به این ترتیب، تدریس می‌شود.

معلم ریاضیات و معلم لاتین در دانشکده هم اتاق بوده‌اند.

E از F مسن‌تر است؛ اما به اندازهٔ معلم اقتصاد تدریس نکرده است.

خانم A و خانم B در دوران دبیرستان به یک مدرسه می‌رفته‌اند؛ در حالی که دبیرستان‌های دیگران مختلف بوده است.

F پدر معلم فرانسه است.

معلم انگلیسی چه در سن و چه در سال‌های خدمت، مسن‌ترین این شش نفر است. در واقع زمانی که آنان دانش‌آموز دبیرستان S بودند، وی معلم ریاضیات و تاریخ را در کلاس خود داشته است.

خانم A از معلم لاتین مسن‌تر است.

پرویز شهریاری

اشاره

در شمارهٔ قبل دوازده مسأله را مطرح کردیم که حل آن‌ها منجر به حل معادله‌های نامتعارف شد، اینک ادامه آن مسائل و مسائلی را که منجر به نامعادله‌های نامتعارف می‌شوند، در پی می‌آوریم.

برخی معادله‌ها و نامعادله‌های نامتعارف

مسأله ۱۲. عدد سه رقمی $\overline{xyz}$، در دستگاه به مبنای ۱۰ را پیدا کنید؛ به شرطی که داشته باشیم:

$$\overline{xyz} = xyz(x+y+z)$$

$\overline{xyz}$ با پاره‌خط راستی بالای آن به معنای یک عدد سه رقمی است که z یکان آن، y دهگان آن و x صدگان آن باشد.

حل: باید این معادله را حل کنیم:

$$100x + 10y + z = xyz(x+y+z)$$

از دو طرف برابری $x+y+z$ را کم می‌کنیم:

$$9(11x+y) = (x+y+z)(xyz-1) \qquad (1)$$

با شرط x، y و z، مثبت و کوچک‌تر از ۱۰.

از معادله روشن می‌شود که $x+y+z$ و $(xyz-1)$ باید بر ۳ بخش‌پذیر باشند؛ ولی در این صورت (با آزمایش همهٔ حالت‌های ممکن) روشن می‌شود که x، y و z باید در تقسیم بر ۳ به باقی‌ماندهٔ ۱ برسند و آن‌وقت $11x+y$ هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین باید یکی از دو عامل $x+y+z$ یا $xyz-1$ بر ۹ بخش‌پذیر باشند.

اگر $x+y+z > 17$ باشد، آن‌وقت:

$$xyz \geq 72 \ , \ \ xyz(x+y+z) > 1000$$

یعنی برابر یک عدد چهار رقمی می‌شود. به این ترتیب، اگر $x+y+z$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$x+y+z=9 \ \text{و} \ 11x+y = xyz-1$$

در این حالت داریم:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} = 3 \Rightarrow xyz \leq 27$$

و x می‌تواند برابر ۱ یا ۲ باشد؛ زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت:

$$xyz = 11x + y + 1 > 27$$

در حالت $x=2$، به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=8 \ , \ \ 2yz = y+23$$

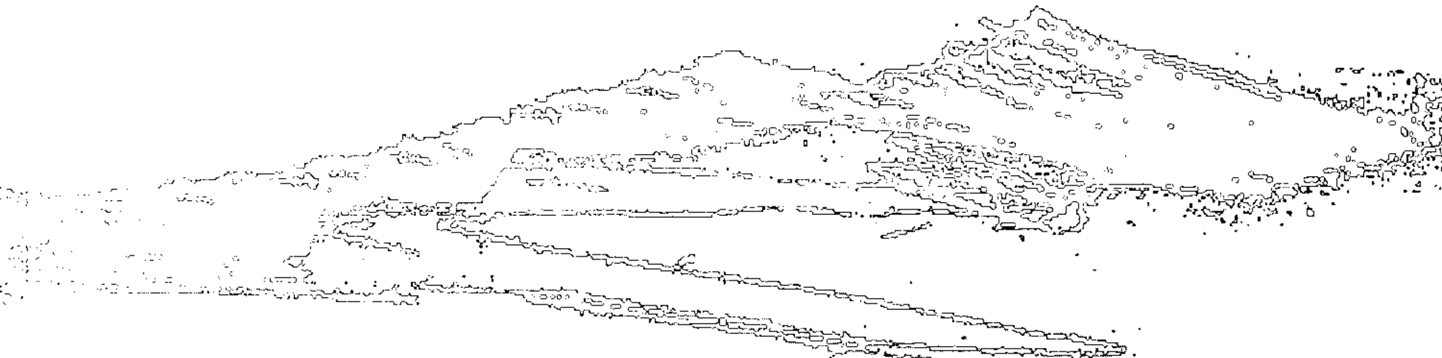
که برای y و z، عددهای درست به دست نمی‌آید. بنابراین باید فرض کرد: $x=1$ و به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=8 \ , \ \ 11+y = yz-1$$

که از آن جواب به دست می‌آید: ۱۳۵ و ۱۴۴.

اکنون به حالتی می‌پردازیم که $(xyz-1)$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد. اگر $xyz-1=9$، آن‌وقت از (۱) به دست می‌آید $z=10x$، که ممکن نیست؛ در حالت‌هایی هم که $xyz-1$ برابر ۱۸، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۷۲، ۸۱ یا ۹۰ باشد، ممکن نیست؛ زیرا در این حالت‌ها xyz شامل عامل اولی بزرگ‌تر از ۱۰ می‌شود.

در حالت $xyz-1=27$، به این دستگاه می‌رسیم:



$8x = 2y + z$ ، $xyz = 28$

که جواب قابل قبولی برای مسأله ندارد.

در حالت $xyz - 1 = 36$ هم، به این دستگاه می‌رسیم:

$4x = 6y + 7z$, $xyz = 64$

که با هم جوابی نمی‌دهد، و سرانجام اگر (برای $m > 10$) داشته باشیم:

$xyz - 1 = 9m$

به‌دست می‌آید: $11x + y = m(x + y + z)$، که ممکن نیست.

پاسخ. ۱۳۵، ۱۴۴.

مسألهٔ ۱۳. معادلهٔ $[x[x]] = 1$ را حل کنید.

حل: این معادله با این نامعادله‌ها هم‌ارز است:

$1 \le x[x] < 2$

x را به صورت $x = k + \alpha$ می‌نویسیم، که در آن $k = [x]$ و $\alpha = x - [x]$. نابرابری به این صورت درمی‌آید:

$$1 \le k^2 + \alpha k < 2 \qquad (1)$$

اما نابرابری برای $k = 1$ و $0 \le \alpha < 1$ برقرار است و برای $k \ge 2$ و $k = 0$ برقرار نیست. برای $k = -1$ تنها به ازای $\alpha = 0$ برقرار است. در حالت $k = -2$ داریم $k^2 \ge 4$ و $\alpha k \le 0$؛ یعنی:

$k^2 + \alpha k \ge k^2 \ge 4$

و نابرابری (1) برقرار نیست.

پاسخ. $1 \le x < 2$ و $x = -1$.

مسألهٔ ۱۵. عددی چهار رقمی پیدا کنید که برابر مجذور عددی باشد که از دو رقم سمت راست عدد تشکیل شده است.

حل: باید داشته باشیم: $\overline{abcd} = (\overline{cd})^2$

$100(10a + b) + (10c + d) = (10c + d)^2$

یا

$100(10a + b) = (10c + d)(10c + d - 1)$

$10c + d$ را برابر k می‌گیریم. روشن است $a \neq 0$ (زیرا مجذور عدد یک رقمی برابر با عدد چهار رقمی نمی‌شود)؛ بنابراین k عددی دو رقمی است و در ضمن داریم:

$100(10a + b) = k(k - 1)$

حاصل ضرب $k(k - 1)$ باید بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد؛ بنابراین یکی از آن‌ها بر ۴ و دیگری بر ۲۵ بخش‌پذیر است. تنها یکی از این دو حالت ممکن است:

1) $k = 25$, $k - 1 = 24$

2) $k = 76$, $k - 1 = 75$

در حالت اول به دست می‌آید $10a + b = 6$ که پذیرفتنی نیست (زیرا $a \neq 0$ است).

در حالت دوم به دست می‌آید:

$10a + b = 19 \times 3 = 57$

یعنی $a = 5$ و $b = 7$. در ضمن روشن است که از رابطهٔ:

$10c + d = 76$

به‌دست می‌آید: $c = 7$ و $d = 6$.

پاسخ: ۵۷۷۶.

مسألهٔ ۱۶. بخش درست این عبارت را پیدا کنید:

$$S_n = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

حل: روشن است که $S_n > n$. ثابت می‌کنیم $S_n < n + 1$. اگر از نابرابری کوشی برای میانگین‌های حسابی و هندسیِ $k + 1$ عدد:

$$1 + \frac{1}{k}, 1, 1, \cdots, 1$$

استفاده کنیم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}} < \frac{1 + \frac{1}{k} + k}{k + 1} , \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

یا

$$\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}} < 1 + \frac{1}{k(k+1)} , \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

اگر k را به ترتیب برابر ۱ ، ۲ ، ... و n بگیریم و نابرابری‌های حاصل را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$S_n < n + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= n + (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots$$

$$\cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = n+1-\frac{1}{n+1} < n+1$$

پس داریم: $n < S_n < n+1$ ، یعنی $[S_n] = n$.

مسألهٔ ۱۷ . جواب‌های درست این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

حل: (a,b,c) را یکی از جواب‌های دستگاه می‌گیریم و در آغاز فرض می‌کنیم، این سه عدد مختلف باشند.

اگر فرض کنیم: $f(t) = 2t^3 - 7t^2 - 18t - 2$ ، به‌دست می‌آید:

$$f(a) = b \ , \ f(b) = c \ , \ f(c) = a$$

اگر u و v ، عددهایی درست باشند، $f(u) - f(v)$ بر $u - v$ بخش‌پذیر است. به این ترتیب $f(a) - f(b)$ ؛ یعنی $b - c$ بر $a - b$ و همچنین $c - a$ بر $b - c$ و $a - b$ بر $c - a$ بخش‌پذیر است. اگر m ، n و k را به ترتیب خارج قسمت‌ها بگیریم، باید داشته باشیم:

$$a - b = k(c - a) = kn(b - c) = knm(a - b)$$

(k و n و m عددهایی درست‌اند). از آن‌جا $knm = 1$.

اگر k یا m و یا n برابر ۱ - باشد، به دست می‌آید $a = b = c$

و اگر k ، n و m برابر یک باشند، به‌دست می‌آید:

$$2a = b + c \ , \ 2c = a + b \ , \ 2b = a + c$$

که باز هم به همان نتیجهٔ $a = b = c$ می‌رسیم؛ یعنی a ، b و c نمی‌توانند عددهای مختلفی باشند.

به این ترتیب، کافی است این معادله را حل کنیم:

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = x$$

یکی از ریشه‌های این معادله، برابر واحد است؛ با در اختیار داشتن یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم، دو ریشهٔ دیگر آن به‌دست می‌آید. این دو ریشه ۲ و $\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب‌های دستگاه (۱و۱و۱) و (۲و۲و۲) است.

مسألهٔ ۱۸ . این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \ ,$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}$$

حل: بردار با مختصات $(\sqrt{1+x_i} \ , \ \sqrt{1-x_i})$ را a_i می‌نامیم $(i = 1,2,\ldots,100)$. دستگاه مفروض، به این معناست که:

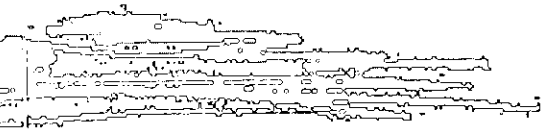
$$\sum_{i=1}^{100} a_i = (100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \ , \ 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}) \ ,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{100} a_i\right| = 100\sqrt{2} = \sum_{i=1}^{100} |a_i|$$

در نتیجه، همهٔ بردارهای a_i هم‌جهت‌اند و طولی برابر دارند؛ یعنی بر هم منطبق‌اند. به این ترتیب، دستگاه تنها یک جواب دارد:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = \frac{1}{100}$$

مسألهٔ ۱۹ . چند مسافر در نقطهٔ A به قایقی سوار شدند و به طرف نقطهٔ B در جهت جریان آب رود حرکت کردند. آن‌ها نیمی از راه را پارو زدند، بعد موتور قایق را روشن کردند و ۴



ساعت بعد از آغاز حرکت به B رسیدند. اگر تمام راه را پارو می‌زدند، سفر آن‌ها ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه طول می‌کشید. در برگشتن از B به A، یک چهارم راه را پارو زدند، سپس موتور قایق را روشن کردند و ۷ ساعت بعد از آغاز حرکت خود از B، به A رسیدند. اگر در برگشتن، تمام راه را با پارو زدن می‌رفتند، بعد از چه مدت به A می‌رسیدند؟

حل: سرعت جریان آب را u کیلومتر در ساعت، سرعت قایق را با پارو در آب ساکن v_1 کیلومتر در ساعت و سرعت قایق را با موتور روشن در آب ساکن v_2 کیلومتر در ساعت، و فاصلهٔ بین A و B را s کیلومتر می‌گیریم. با توجه به صورت مسأله، به سادگی به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2(u+v_1)} + \dfrac{s}{2(u+v_2)} = 4, \\ \dfrac{s}{u+v_1} = 5\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{s}{2(v_1-u)} + \dfrac{3s}{4(v_2-u)} = 7 \end{cases}$$

مسأله زمان t را از ما خواسته است که با توجه به نشانه‌گذاری‌ها، برابر است با $\frac{s}{v_1-u}$. اگر در دستگاه به جای $\frac{s}{v_1-u}$ مقدار t را قرار دهیم و آن را ساده کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3t(v_1-u) = 16(v_1+u) \\ 3t(v_1-u) = 8(v_2+u) \\ t(v_2+3v_1-4u) = 28(v_2-u) \end{cases} \qquad (1)$$

به احتمال زیاد، بیش‌تر دانش‌آموزان تا این جا به درستی پیش می‌روند؛ ولی بسیارند کسانی که در حل این دستگاه سه معادله‌ی چهار مجهولی در می‌مانند. برخی ممکن است گمان کنند، این دستگاه سرانجام به یک معادلهٔ سیّال می‌رسد و نتیجه بگیرند که مسأله نامعین است. به‌ویژه برای حذف مجهول‌های v_1 و v_2، باید عمل‌های مفصلی را انجام داد که احتمال اشتباه را زیاد می‌کند.

ساده‌ترین راه این است که مجهول t را حذف کنیم. معادلهٔ اول را بر معادلهٔ دوم و معادلهٔ دوم را بر معادلهٔ سوم تقسیم می‌کنیم، به این دستگاه می‌رسیم:

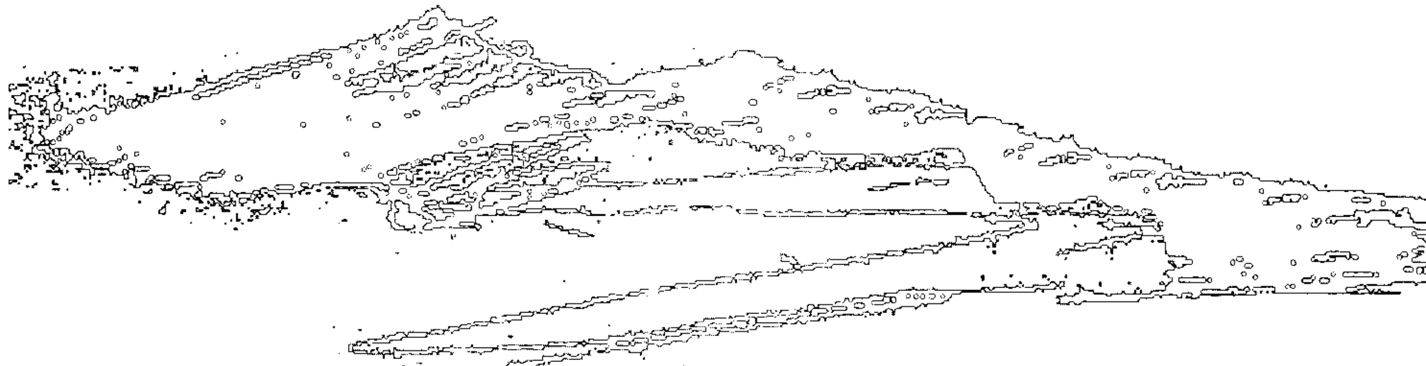
$$\begin{cases} u = v_2 - 2v_1 \\ 2(v_2-u)(v_1-u) = 2(v_2+u)(v_2+3v_1-4u) \end{cases} \qquad (2)$$

که اگر u را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$6v_2^2 - 49v_1v_2 + 85v_1^2 = 0$$

این معادله، همگن (متجانس) است، بنابراین با فرض $v_2 = kv_1$، می‌توان مقدار k و درنتیجه $\frac{v_2}{v_1}$ را به‌دست آورد:





$\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۵}{۲}$ یا $\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۱۷}{۳}$

اکنون با توجه به معادلهٔ اول دستگاه (۲)، به‌دست می‌آید:

$u = \frac{۱}{۳} v_۱$ یا $u = \frac{۱۱}{۳} v_۱$

با توجه به صورت مسأله، باید داشته باشیم $u < v_۱$؛ بنابراین تنها جواب $u = \frac{۱}{۲} v_۱$ است. اکنون با توجه به معادلهٔ اول دستگاه (۱)، به دست می‌آید: $t = ۱۶$.

مسألهٔ ۲۰. این نامعادله را حل کنید:

$$۴^{\sin^۲ \pi x} + ۳ \times ۴^{\cos^۲ \pi x} \le ۸$$

حل: این گونه نامعادله‌ها، به طور معمول منجر به یک نامعادلهٔ سادهٔ مثلثاتی می‌شوند. ولی در حل نامعادلهٔ مثلثاتی، باید از یک اشتباه پرهیز کرد.

می‌دانیم جواب‌های معادلهٔ $(|a| \le ۱)\sin x = a$ به این صورت است:

$$x = k\pi + (-۱)^k \arcsin a$$

(k، عددی درست است). برخی با نوعی شبیه‌سازی نادرست، برای جواب‌های نامعادلهٔ $(|a| \le ۱)\sin x < a$ می‌نویسند:

$$x < k\pi + (-۱)^k \arcsin a$$

چنین جوابی، نه تنها درست نیست، بلکه بی‌معناست. اگر برای نمونه $a = \frac{۱}{۲}$ بگیرید و تنها یکی از جواب‌ها را برای $k = ۰$ در نظر بگیرید، به بی‌معنا بودن آن پی می‌برید.

برای حل نامعادله، $y = ۴^{\sin^۲ \pi x}$ می‌گیریم. در این صورت، با توجه به مثبت بودن y به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$y^۲ - ۸y + ۱۲ \le ۰$$

که از آن، به‌دست می‌آید $۲ < y \le ۶$؛ بنابراین نامعادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$۲ \le ۴^{\sin^۲ ۱۲x} \le ۶$$

نابرابری سمت راست برای همهٔ مقدارهای حقیقی x برقرار است: نامعادلهٔ سمت چپ را می‌توان چنین نوشت:

$$\log_۲ \le ۲\sin^۲ ۱۲x \log_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \sin^۲ ۱۲x$$

$$\Rightarrow |\sin x| \ge \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

و جواب‌های آن چنین است (برای عدد درست k):

$$k + \frac{۱}{۴} \le x \le k + \frac{۱}{۴}$$

مسألهٔ ۲۱. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید؛ به نحوی که برای هر کدام از آن‌ها، دستگاه

$$\begin{cases} ۲^{|x|} + |x| = y + x^۲ + a \ , \\ x^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$$



تنها یک جواب داشته باشد (a، x و y عددهایی حقیقی‌اند).

حل. پیش از همه، به این نکته توجه می‌کنیم که اگر برای مقداری از a، (x_0, y_0) جوابی از دستگاه باشد، بی‌تردید $(-x_0, y_0)$ هم جواب دستگاه است. بنابراین، برای $x \neq 0$ یا دستگاه جوابی ندارد و یا دست‌کم دو جواب دارد؛ (x_0, y_0) و $(-x_0, y_0)$. بنابراین برای این که دستگاه مفروض، تنها یک جواب داشته باشد، باید داشته باشیم $x = 0$؛ یعنی در این حالت جواب دستگاه به صورت $(0, y)$ است.

از معادلهٔ دوم دستگاه، معلوم می‌شود که این جواب تنها به یکی از دو صورت $(0,1)$ یا $(0,-1)$ می‌تواند باشد. روشن می‌کنیم برای چه مقدارهایی از a، این زوج عددها می‌توانند جواب تمامی دستگاه باشند. به سادگی دیده می‌شود که $(0,1)$ برای $a = 0$ و $(0,-1)$ برای $a = 2$، در معادلهٔ اول دستگاه صدق می‌کند.

روشن است به ازای هیچ مقدار دیگری از a، نمی‌توانیم به جوابی برسیم که با شرط‌های مسأله سازگار باشد. ولی نباید گمان کرد که حل مسأله تمام شده است. در واقع، برای این مقدارهای a، دستگاه مفروض جوابی به صورت $(0, y_0)$ دارد؛ ولی هیچ ضمانتی وجود ندارد که به جز این جواب، جواب دیگری وجود نداشته باشد.

این بخش مسأله را نباید از یاد ببریم. باید تحقیق کرد، برای این مقدارهای a، دستگاه مفروض، چند جواب دارد.

۱) حالت $a = 0$. دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x|(1-|x|) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: $|x| \le 1$ و $|y| \le 1$. برای همهٔ مقدارهای $|x| \le 1$ داریم:

$$2^{|x|} + |x|(1-|x|) \ge 1$$

بنابراین، اگر (x_0, y_0) جوابی از دستگاه باشد، باید داشته باشیم: $y_0 = 1$؛ زیرا از معادلهٔ اول، نتیجه می‌شود: $y_0 \ge 1$ و از معادلهٔ دوم: $y_0 \le 1$. ولی برای $y_0 = 1$، به ناچار خواهیم داشت $x_0 = 0$. به این ترتیب، تنها جواب (۱ و ۰) در دستگاه صدق می‌کند.

۲) حالت $a = 2$. در این حالت، دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x|(1-|x|) - 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

همان‌طور که پیش از این دیدیم، جواب (۱- و ۰) با این دستگاه سازگار است؛ ولی با اندکی دقت، روشن می‌شود که زوج عددهای (۰ و ۱) و (۰ و ۱-) هم جواب‌هایی از دستگاه هستند. بنابراین، این دستگاه برای $a = 2$، دست‌کم سه جواب دارد و با شرط مسأله سازگار نیست.

پاسخ: $a = 0$.

مسألهٔ ۲۲. این معادله را حل کنید:

$$x^2 - 8[x] + 7 = 0$$

حل: $n = [x]$ می‌گیریم:

$$x^2 + 7 = 8n \ , \ n > 0$$

روشن است که $n \le x < n+1$؛ بنابراین

$$n^2 + 7 \le x^2 + 7 < (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8$$

به جای $x^2 + 7$ مقدارش $8n$ را می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

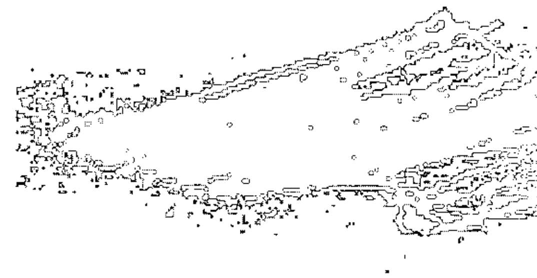
$$n^2 + 7 \le 8n < n^2 + 2n + 8$$

جواب‌های نامعادلهٔ $n^2 + 7 \le 8n$، عددهایی از بازهٔ بستهٔ $[1,7]$ است و نابرابری سمت راست برای $n < 2$ و $n > 4$ برقرار است؛ بنابراین:

$$1 \le n < 2 \ , \ 4 < n \le 7$$

چون n عددی درست است؛ بنابراین:

$$n = 1, 5, 6, 7$$



که برای این مقدارهای n، مقدار چنین می‌شود:

$x = 1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$

جواب‌های منفی پذیرفتنی نیستند؛ زیرا $n = [x]$ عددی مثبت است.

مسألهٔ ۲۳. مطلوب است حل دستگاه معادله‌های:

$$x^2 + y^2 + z = a \ , \ x^2 + y + z^2 = a \ , \ x + y^2 + z^2 = a$$

حل: اگر معادلهٔ دوم دستگاه را از معادلهٔ اول کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y^2 - y = z^2 - z \Rightarrow (y - z)(y + z - 1) = 0$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$y = z$ یا $y + z = 1$

به همین ترتیب، از معادله‌های دوم و سوم دستگاه به‌دست می‌آید:

$x = y$ یا $x + y = 1$

بنابراین، دستگاه مفروض، به مجموعهٔ این چهار دستگاه منجر می‌شود:

$$\begin{cases} y = z \\ x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + z = a \end{cases} \ ; \quad \begin{cases} y = z \\ x = y \\ x^2 + y^2 + z = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x + y^2 + z^2 = a \end{cases} \ ; \quad \begin{cases} y + z = 1 \\ x = y \\ x^2 + y + z^2 = a \end{cases}$$

معادله‌های اول و دوم دستگاه‌های سوم و چهارم را می‌توان به این ترتیب نوشت:

$x = y \ , \ z + x = 1 \ , \ z = x \ , \ y + z = 1$

که با تبدیل $(x, y, z) \to (z, x, y)$، از معادله‌های دستگاه دوم به‌دست می‌آیند. پس کافی است دستگاه دوم را حل کنیم و سپس در جواب‌ها، تبدیل‌ها را انجام دهیم.

معادلهٔ سوم، در دستگاه‌های اول و دوم، به ترتیب، به این صورت درمی‌آیند:

$$2x^2 + x - a = 0 \ , \ 2y^2 - y + 1 - a = 0$$

مبین این معادله‌ها به ترتیب $8a + 1$ و $8a - 7$ است؛ بنابراین، برای $a < \frac{1}{8}$ هیچ‌کدام از این دو دستگاه جواب ندارند. برای $-\frac{1}{8} < a < \frac{1}{8}$، دستگاه دوم جواب ندارد؛ ولی دستگاه اول دارای جواب است: (x_1, x_1, x_1) و (x_2, x_2, x_2)، که در آن

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8a + 1}}{4}$$

برای $a \geq \frac{1}{8}$ دستگاه اول دارای همان جواب‌هاست و برای دستگاه دوم جواب‌های:

$$(x_3, x_3, x_3) \ , \ (x_4, x_4, x_4)$$

به دست می‌آید، که در آن:

$$y_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{8a - 7}}{4} \ , \ x_{3,4} = 1 - y_{3,4} = \frac{3 \mp \sqrt{8a - 7}}{4}$$

به این ترتیب، اگر فرض کنیم:

$$p = \frac{-1 + \sqrt{8a + 1}}{4} \ , \quad q = \frac{-1 - \sqrt{8a + 1}}{4} \ ,$$

$$r = \frac{\sqrt{8a - 7}}{4} \ , \quad s = \frac{1 - \sqrt{8a - 7}}{4} \ ,$$

$$t = \frac{3 - \sqrt{8a - 7}}{4} \ , \quad u = \frac{3 + \sqrt{8a - 7}}{4}$$

آن‌گاه برای $a < -\frac{1}{8}$ دستگاه جواب ندارد. و برای

$a = -\frac{1}{8}$: $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$؛

و برای $-\frac{1}{8} < a < \frac{7}{8}$: (p, p, p) و (q, q, q)؛

و برای $a = \frac{7}{s}$: (p, p, p) و (q, q, q) و $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$؛

و برای $a > \frac{7}{8}$: (p, p, p) و (q, q, q) و (t, r, r) و (r, t, t) و (r, r, t) و (u, s, s) و (s, u, s) و (s, s, u).

ادامه دارد...

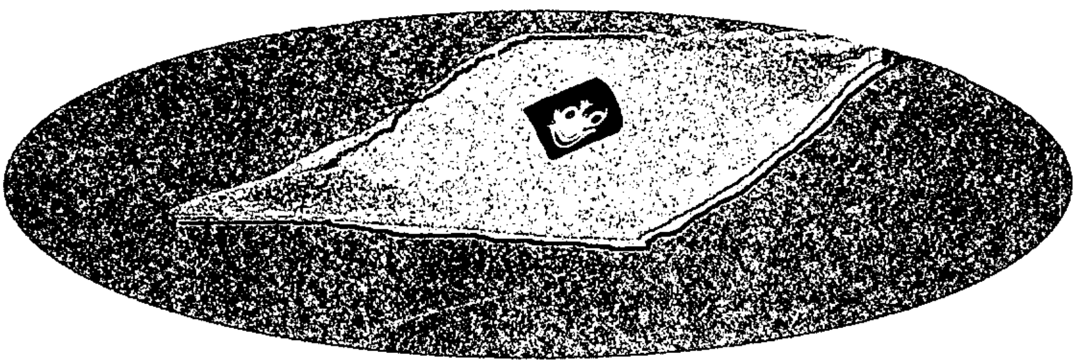


محمدهاشم رستمی

تعیین وضع نقطه و صفحه نسبت به هم

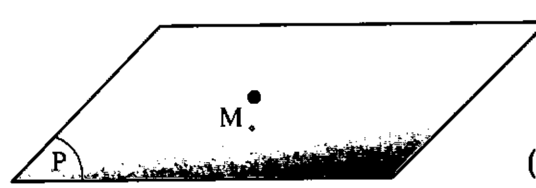


برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی رشته ریاضی

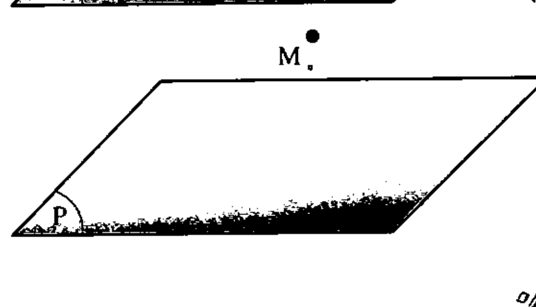


الف. تعیین وضع یک نقطه نسبت به یک صفحه

برای تعیین وضع نقطهٔ $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نسبت به صفحهٔ $P(x, y, z) = 0$، مختصات این نقطه را در معادلهٔ صفحهٔ P قرار می‌دهیم. اگر مختصات M_0 در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کند؛ یعنی $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ باشد، نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P است (شکل الف)، و اگر مختصات M_0 در معادله صفحهٔ P صدق نکند؛ یعنی $P(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ باشد، نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P قرار ندارد (شکل ب).



(الف)



(ب)

مثال۱. وضع نقطهٔ $M_0 = (2, -1, 3)$ نسبت به صفحهٔ $P: 3x - y - 4z + 5 = 0$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$M_0 = (2, -1, 3) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}} 3(2) - (-1) - 4(3) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 1 - 12 + 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

مختصات نقطهٔ M_0 در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کرده است، پس نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P است.

مثال ۲. وضع نقطهٔ $M_0 = (-1, 4, 5)$ نسبت به صفحهٔ $P: -2x + 3y - z + 1 = 0$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$M_0 = (-1, 4, 5) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}} -2(-1) + 3(4) - (5) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow +10 \neq 0$$

مختصات نقطهٔ M_0 در معادلهٔ صفحهٔ P صدق نکرده

است، پس این نقطه روی صفحهٔ P نیست.

مثال۳. صفحهٔ $P:(m+1)x-2y+mz+m-2=0$ و نقطهٔ $M_0=(-1,m-2,3)$ داده شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که نقطهٔ M_0 روی صفحهٔ P باشد.

حل: مختصات نقطهٔ M_0 باید در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$A=(-1,m-2,3)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}}$$
$$(m+1)(-1)-2(m-2)+m(3)+m-2=0$$
$$\Rightarrow -m-1-2m+4+3m+m-2=0$$
$$\Rightarrow m+1=0\Rightarrow m=-1$$

مثال۴. حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $A=(m-1,3,2m)$ روی صفحهٔ $P:3x+2y-6z-12=0$ قرار نداشته باشد.

حل: مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ صفحهٔ P نباید صدق کند.

$$A=(m-1,3,2m)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}}$$
$$3(m-1)+2(3)-6(2m)-12\neq 0$$
$$\Rightarrow -9m-9\neq 0\Rightarrow -9m\neq 9\Rightarrow m\neq -1$$

مثال۵. صفحهٔ $P:ax+by-2z+1=0$ و نقطهٔ $A=(-3,1,-4)$ داده شده‌اند. چه رابطه‌ای بین ضریب‌های a و b برقرار باشد تا نقطهٔ A روی صفحهٔ P قرار داشته باشد؟

حل: مختصات نقطهٔ A باید در معادلهٔ صفحهٔ P صدق کند.

$$A=(-3,1,-4)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه P}}$$
$$a(-3)+b(1)-2(-4)+1=0$$
$$\Rightarrow -3a+b+8+1=0\Rightarrow -3a+b+9=0$$

مثال۶. وضع دو نقطهٔ $A=(3,-4,2)$ و $B=(-3,0,5)$ را نسبت به صفحهٔ $P:2x+y+3z-1=0$ تعیین کنید.

حل: داریم:

$$A=(3,-4,2)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}}2(3)+(-4)+3(2)-1=-7\neq 0$$

در معادلهٔ صفحه

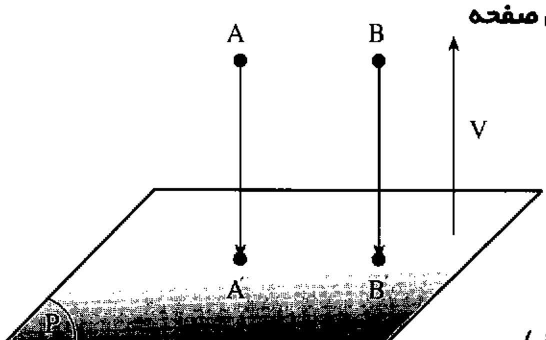
$$B=(-3,0,5)\xrightarrow{\qquad}2(-3)+(0)+3(5)-1=+8\neq 0$$

به طوری که دیده می‌شود، هر دو نقطهٔ A و B روی صفحهٔ P قرار ندارند.

حال این سؤال پیش می‌آید که دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند یا در دو طرف این صفحه هستند؟

مطلب زیر به این سؤال پاسخ می‌دهد:

تعیین وضع دو نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه نسبت به آن صفحه



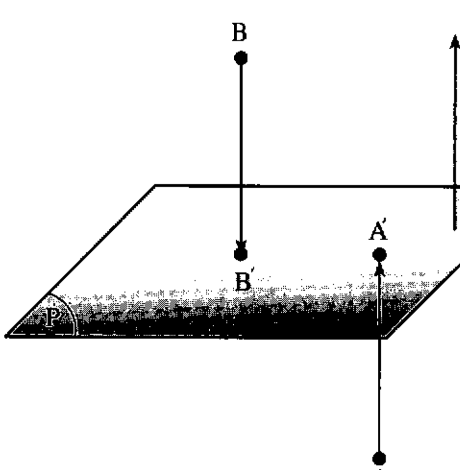
(الف)

برای تعیین وضع دو نقطهٔ $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ نسبت به صفحهٔ $P(x,y,z)=0$، اندازه‌های جبری فاصله‌های این دو نقطه از صفحهٔ P، یعنی

$$\overline{AA'}=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{P(A)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ و

$$\overline{BB'}=\frac{ax_2+by_2+cz_2+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{P(B)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

را تعیین می‌کنیم.



(ب)

اگر این اندازه‌های جبری هم‌علامت باشند، دو نقطه در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند (شکل الف) و اگر مختلف العلامت باشند، دو نقطه در دو طرف صفحهٔ P واقع هستند (شکل ب).

نکته. با توجه به این‌که $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ همواره مثبت است، پس علامت اندازه‌های جبری $\overline{AA'}$ و $\overline{BB'}$، همان علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ و $P(B)$ است. بنابراین برای تعیین وضع دو نقطهٔ A و B نسبت به صفحهٔ P، کافی است علامت اندازه‌های جبری $P(A)$ و $P(B)$ را تعیین کنیم.

مثال۱. صفحهٔ $P: 2x-2y-z+4=0$ و دو نقطهٔ $A=(1,-4,2)$ و $B=(-2,3,-1)$ داده شده‌اند. وضع این دو نقطه نسبت به صفحهٔ P را تعیین کنید.

حل: $P(A)$ و $P(B)$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(1,-4,2)=2(1)-2(-4)-(2)+4=+12>0$$

$$P(B)=P(-2,3,-1)=2(-2)-2(3)-(-1)+4=-5<0$$

چون $P(A)>0$ و $P(B)<0$؛ یعنی مختلف‌العلامت‌اند، پس دو نقطهٔ A و B در دو طرف صفحهٔ P قرار دارند.

توجه. چون $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$ است، پس دو نقطهٔ A و B روی صفحهٔ P قرار ندارند.

مثال۲. وضع دو نقطهٔ $A=(4,0,-2)$ و $B=(-2,2,3)$ نسبت به صفحهٔ $P: x-2y+z-3=0$ را تعیین کنید.

حل: $P(A)$ و $P(B)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(4,0,-2)=(4)-2(0)+(-2)-3=-1<0$$

$$P(B)=P(-2,2,3)=(-2)-2(2)+(3)-3=-6<0$$

چون $P(A)<0$ و $P(B)<0$؛ یعنی این دو مقدار هم‌علامت هستند، پس دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند.

توجه. دو نقطهٔ A و B روی صفحهٔ P نیستند. (چرا؟).

مثال ۳. صفحهٔ $P: mx+(1-m)y+2z-1=0$ و دو نقطهٔ $A=(2,-1,0)$ و $B=(1,2,4)$ داده شده‌اند. حدود m را چنان تعیین کنید که این دو نقطه در دو طرف صفحهٔ P باشند.

حل: باید $P(A)$ و $P(B)$ مختلف‌العلامه، یعنی $P(A)P(B)<0$ باشند.

$$P(A)P(B)=(2m-1+m+0-1)(m+2-2m+8-1)<0$$

$$\Rightarrow P(A)P(B)=(3m-2)(-m+9)<0 \Rightarrow m<\frac{2}{3} \text{ و } m>9$$

نکته. برای تعیین وضع چند نقطهٔ A، B، C، D و ... نسبت به صفحهٔ $P(x,y,z)=0$، کافی است علامت اندازه‌های جبری $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P(D)$ و ... را تعیین کنیم. نقطه‌هایی که دارای اندازه‌های جبری هم علامت‌اند، در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند و نقطه‌هایی که دارای اندازه‌های جبری مختلف‌العلامت‌اند، در دو طرف صفحهٔ P واقع‌اند.

مثال ۴. صفحهٔ $P: 2x+y-2z+4=0$ و نقطه‌های $A=(0,-1,1)$، $B=(2,4,-3)$، $C=(-5,-2,0)$ و $D=(1,-1,3)$ داده شده‌اند. وضع این نقطه‌ها نسبت به صفحهٔ P را تعیین کنید؛ یعنی مشخص کنید که کدام نقطه‌ها در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند و کدام نقطه‌ها در طرف دیگر صفحهٔ P واقع‌اند.

حل: $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$ و $P(D)$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(0,-1,1)=2(0)+(-1)-2(1)+4=+1>0$$

$$P(B)=P(2,4,-3)=2(2)+(4)-2(-3)+4=+18>0$$

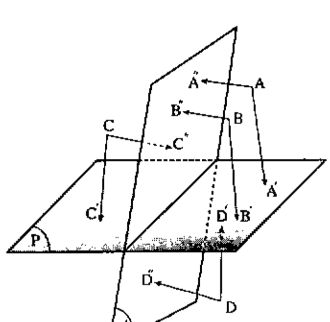
$$P(C)=P(-5,-2,0)=2(-5)+(-2)-2(0)+4=-8<0$$

$$P(D)=P(1,-1,3)=2(1)+(-1)-2(3)+4=-1<0$$

نقطه‌های A و B در یک طرف صفحهٔ P و دو نقطهٔ C و D در طرف دیگر صفحهٔ P قرار دارند.

توجه. بدیهی است که هیچ کدام از این نقطه‌ها روی صفحهٔ P قرار ندارند.

تعیین وضع دو یا چند نقطه نسبت به فرجه‌های مجاور و روبه‌روی حاصل از برخورد دو صفحه



با استفاده از علامت اندازه‌های جبری فاصله‌های دو یا چند نقطه مانند A ، B ، C و D از دو صفحهٔ $P=(x,y,z)=0$ و $P'(x,y,z)=0$ ، یعنی علامت اندازه‌های جبری $\overline{AA'}$ ، $\overline{BB'}$ ، $\overline{CC'}$ و $\overline{DD'}$ یا علامت اندازه‌های جبری P(A) ، P(B) ، P(C) و P(D) ، که به ترتیب هم‌علامت با $\overline{AA'}$ ، $\overline{BB'}$ ، $\overline{CC'}$ و $\overline{DD'}$ هستند، می‌توانیم جای این نقطه‌ها نسبت به فرجه‌های حاصل از برخورد دو صفحهٔ P و P′ را تعیین کنیم؛ یعنی مشخص سازیم که این نقطه‌ها درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجهٔ مجاور و یا درون دو فرجهٔ روبه‌رو (متقابل به یال). در شکل، دو نقطهٔ A و B درون یک فرجه واقع‌اند، نقطهٔ C با نقطهٔ D در دو فرجهٔ روبه‌رو قرار دارند و نقطه‌های C و D نسبت به هریک از دو نقطهٔ A و B، درون دو فرجهٔ مجاور هستند.

مثال ۱. دو صفحهٔ متقاطع $p: x+y-3z+2=0$ و $P': 2x-2y+z-3=0$ و دو نقطهٔ $A=(-3,2,4)$ و $B=(1,-3,5)$ داده شده‌اند. تعیین کنید که این دو نقطه درون یک فرجه حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا در دو فرجهٔ مجاور یا در دو فرجهٔ روبه‌رو.

حل: اندازه‌های جبری P(A) ، P(B) ، P′(A) و P′(B) را تعیین می‌کنیم.

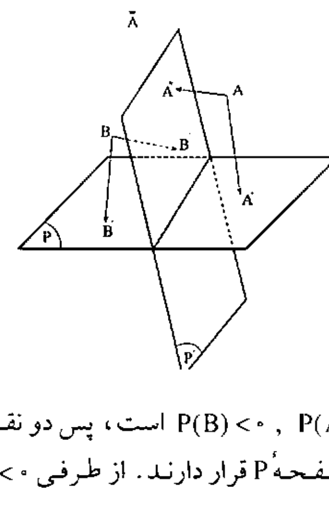
داریم:

$$P(A)=P(-3,2,4)=(-3)+(2)-3(4)+2=-11<0$$

$$P(B)=P(1,-3,5)=(1)+(-3)-3(5)+2=-15<0$$

$$P'(A)=P'(-3,2,4)=2(-3)-2(2)+(4)-3=-9<0$$

$$P'(B)=P'(1,-3,5)=2(1)-2(-3)+(5)-3=+10>0$$



چون $P(A)<0$, $P(B)<0$ است، پس دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند. از طرفی $P'(A)<0$ و $P'(B)>0$ است؛ پس دو نقطهٔ A و B در دو طرف صفحهٔ P′ واقع‌اند؛ بنابراین دو نقطهٔ A و B درون دو فرجهٔ مجاور حاصل از برخورد دو صفحهٔ P و P′ قرار دارند.

مثال ۲. دو صفحهٔ $P: 2x-y+2z-6=0$ و $P': x+2y-2z+12=0$ و دو نقطهٔ $A=(-3,\frac{1}{2},4)$ و $B=(2,5,1)$ داده شده‌اند. تعیین کنید که این دو نقطه درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجهٔ مجاور یا درون دو فرجهٔ روبه‌رو.

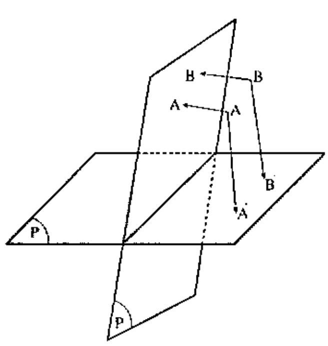
حل: دو صفحهٔ P و P′ متوازی نیستند؛ زیرا $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{+2}\neq\frac{+2}{-2}$ ؛ یعنی $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ است، بنابراین دو صفحهٔ P و P′ متقاطع‌اند. برای یافتن جواب مسأله، اندازه‌های جبری P(A) ، P(B) ، P′(A) و P′(B) را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=P(-3,\frac{1}{2},4)=2(-3)-(\frac{1}{2})+2(4)-6=-\frac{9}{2}<0$$

$$P(B)=P(2,5,1)=2(2)-(5)+2(1)-6=-5<0$$

$$P'(A)=P'(-3,\frac{1}{2},4)=(-3)+2(\frac{1}{2})-2(4)+12=+2>0$$

$$P'(B)=P'(2,5,1)=(2)+2(5)-2(1)+12=+2>0$$



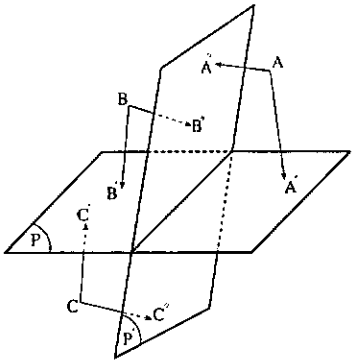
چون $P(A)<0$ و $P(B)<0$ است، دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند، از طرفی $P'(A)>0$ و $P'(B)>0$ است؛ بنابراین دو نقطهٔ A و B در یک طرف صفحهٔ P′ قرار دارند. در نتیجه، دو نقطهٔ A و B درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد دو صفحهٔ P و P′ واقع‌اند.

مثال ۳. دو صفحهٔ $P: 2x+y+5=0$ و $P': x-2z+3=0$ و نقطه‌های $A=(0,3,1)$ ، $B=(2,0,4)$ و $C=(-1,-4,2)$ داده

شده‌اند. تعیین کنید که این نقطه‌ها درون یک فرجهٔ حاصل از برخورد این دو صفحه قرار دارند یا درون دو فرجهٔ مجاور و یا درون دو فرجهٔ روبه‌رو.

حل: صفحه‌های P و P' متوازی نیستند (چرا؟)؛ پس این دو صفحه متقاطع هستند. از طرفی هیچ‌یک از نقطه‌های A، B و C روی صفحه‌های P و P' قرار ندارند (چرا؟). بنابراین برای حل مسأله، اندازه‌های جبری $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P'(A)$، $P'(B)$ و $P'(C)$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

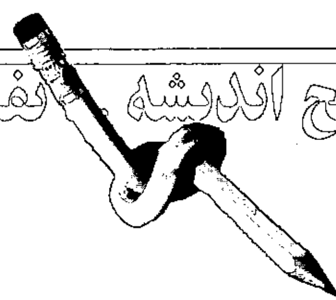
$$P(A) = P(0,3,1) = 2(0) + (3) + 5 = +8 > 0$$
$$P(B) = P(2,0,4) = 2(2) + (0) + 5 = +9 > 0$$
$$P(C) = P(-1,-4,2) = 2(-1) + (-4) + 5 = -1 < 0$$
$$P'(A) = P'(0,3,1) = (0) - 2(1) + (3) = +1 > 0$$
$$P'(B) = P'(2,0,4) = (2) - 2(4) + 3 = -1 < 0$$
$$P'(C) = P'(-1,-4,2) = (-1) - 2(2) + 3 = -2 < 0$$



با توجه به مقدارهای به دست آمده، نقطه‌های A و B در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند و نقطهٔ C در طرف دیگر این صفحه است. از طرفی، نقطه‌های B و C در یک طرف صفحهٔ P' و نقطهٔ A در طرف دیگر این صفحه است؛ بنابراین نقطه‌های A و B درون دو فرجهٔ مجاور قرار دارند، نقطه‌های A و C درون دو فرجهٔ روبه‌رو (متقابل) و دو نقطهٔ B و C نیز درون دو فرجهٔ مجاور واقع هستند.



تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

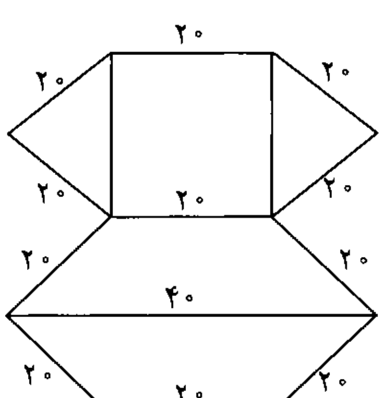


یک شکل پنج وجهی بسته دارای شرایط زیر است:

(الف) دو وجه که مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲۰ سانتیمترند.

(ب) دو وجه که ذوزنقه‌هایی متساوی‌الساقین به ضلع‌های ۲۰، ۲۰، ۲۰، ۴۰ سانتیمترند.

(ج) یک وجه که مربعی به ضلع ۲۰ سانتیمتر است؛ شکل را رسم کنید.



نهمین همایش ریاضی و تقدیر از استاد هندسه

عنایت‌الله راستی‌زاده



به همت جمعی از معلمین ریاضی ناحیه‌ی ۳ شیراز و حمایت گروه آموزش ریاضی، نهمین همایش ریاضی پژوهان جوان فارس در ۱۵ اردیبهشت ۸۴ برگزار شد. سنت حسنه‌ای که همه ساله در این همایش به آن عمل می‌شود نکوداشت یکی از اساتید به نام و پیش کسوت در ریاضیات بخصوص ریاضیات مدرسه‌ای است. در دوره‌های گذشته‌ی این همایش از استاد میرزاجلیلی با حضور این عزیزان تقدیر شد و امسال نیز در همایش نهم **نکوداشت استاد محمدهاشم رستمی** برگزار شد.

کمیته‌ی علمی همایش، که از همراهی تعداد زیادی از دبیران ریاضی با تجربه‌ی شهر شیراز و حمایت انجمن علمی-آموزشی دبیران ریاضی فارس و گروه آموزش ریاضی استان سود می‌برد، از میان ۴۳۶ مقاله‌ی رسیده از سوی دانش‌آموزان استان فارس، ۶۶ مقاله را در مرحله‌ی اول برتر دانست که از میان آنها یازده مقاله به صورت سخنرانی ۲۰ دقیقه‌ای و ۵ مقاله در بخش پوستر به مرحله نهایی همایش راه یافتند. در این دوره برای نخستین بار در بخش دبیران ریاضی نیز اعلام فراخوان مقاله شد که از میان ۲۰ مقاله‌ی رسیده ۴ مقاله به مرحله‌ی نهایی رسید. به جز مراسم افتتاحیه و پایانی و سخنرانی‌های اصلی، قرائت مقالات در دو سالن به صورت موازی انجام گرفت. در همین مراسم بود که پس از افتتاح همایش با حضور مدیر آموزش و پرورش ناحیه‌ی ۳ شیراز، از عمری خدمت صادقانه‌ی استاد گرانقدر جناب آقای محمدهاشم رستمی مؤلف دایرة‌المعارف هندسه (۲۰ جلدی) تقدیر شد. تقدیری که نه در خور ایشان، بلکه در حد وسع و بضاعت برگزار کنندگان بود.

در برنامه‌ی بعدازظهر همایش نیز استاد سخنرانی خود را پیرامون مسائلی هندسه‌ی دبیرستانی ایراد کرد که مورد استقبال حاضران قرار گرفت. لازم به ذکر است که آقای رستمی در حال حاضر عضو شورای ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش، مسئول گروه پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی هندسه در همان دفتر، عضو گروه ریاضی انتشارات مدرسه و عضو هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان متوسطه می‌باشند. در این مراسم، استاد از همراهی، صبر و پشتکار همسر خود تقدیر به عمل آوردند. در مراسم اختتامیه همایش به مقالات برتر هدایایی تعلق گرفت.

لازم به ذکر است که ریاضی پژوهان جوان استان فارس در موضوعات زیر مقاله‌های خود را قرائت کردند.

* علل افت دانش‌آموزان اول دبیرستان در درس ریاضی
* مبهم، بی‌نهایت و تعریف نشده!
* حل یک مسئله با حداقل ۵ روش متفاوت
* استقرای ریاضی در گذر تاریخ
* نقش کامپیوتر و اینترنت در ارتقای سطح آموزش ریاضی
* ساخت وسیله کمک‌آموزشی

موضوعات مقالات ویژه دبیران نیز به شرح زیر بود:

* نقش هندسه در تقویت قوه‌ی استدلال
* چگونگی آموزش تفکر خلاق حل مسئله به دانش‌آموز
* ساخت وسیله‌ی کمک‌آموزشی جهت تدریس یک مبحث درسی.

هم‌ارزی‌های جبری و کاربرد آن در محاسبه حدها

$$\sin x \approx x$$
$$x \longrightarrow 0$$

علی حسن‌زاده ماکویی

۱. تابع‌های هم‌ارز. اگر در تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\ ,\ \ g(x_0)\neq 0 \qquad (2)$$

می‌گویند در ازای $x\to x_0$، دو بی‌نهایت کوچک $f(x)$ و $g(x)$ هم‌ارز هستند و با نماد $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ نشان می‌دهند.

مثال:

۱) $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ ۲) $x \underset{x\to 0}{\sim} \operatorname{tg}x$

۳) $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x$ ۴) $a^x-1 \underset{x\to x_0}{\sim} x\ln a,(a>0)$

به همین ترتیب اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ و $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=1$ باشند، می‌گویند در ازای $x\to x_0$ دو بی‌نهایت بزرگ $f(x)$ و $g(x)$ هم‌ارز هستند برای مثال داریم: $[x]\underset{x\to\infty}{\sim} x$

۲. نماد (~) دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. بازتابی یعنی، $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$

۲. تقارن یعنی $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\Rightarrow g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$

۳. تعدّی، یعنی:

$$f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\ ,\ \ g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} h(x)\Rightarrow f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$$

۴. الف.

$$f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\Rightarrow f^n(x)-g^n(x)\underset{x\to x_0}{\sim}$$
$$\sim nf^{n-1}(x)(f-g)\underset{x\to x_0}{\sim} ng^{n-1}(x)(f-g)$$

ب.

$$f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\Rightarrow \sqrt[n]{f}\underset{x\to x_0}{-}\sqrt[n]{g}\sim\frac{f-g}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}\underset{x\to x_0}{\sim}\frac{f-g}{n\sqrt[n]{g^{n-1}}}$$

درستی هم‌ارزی‌های را ثابت کنید. $(n\in\mathbb{N})$

۱. $\sqrt[n]{1+ax}\underset{x\to 0}{-}1\sim\frac{ax}{n}\quad (n>1)$

۲. $\sqrt[n]{x}-1\underset{x\to 1}{\sim}\frac{x-1}{n}\quad (n>1)$

۳. الف. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\underset{x\to 0}{\sim}\sqrt[8]{x}$

ب. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{x}$

۴. الف. $\operatorname{Arcsin}x-x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^3}{6}$

ب. $\operatorname{Arcsin}x-x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^3}{6}$

۵. $\operatorname{tg}x-\sin x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{2}\sin x^3$

۶. $\cos x-\cos 3x\underset{x\to 0}{\sim} 4x^2$

۷. $\sqrt{\cos 2x}\underset{x\to 0}{\sim}\cos x(1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x)$

۸. $\sqrt[3]{\cos 3x}\underset{x\to 0}{\sim}\cos x(1-\operatorname{tg}^2x)$

۹. $1-\cos^n x\underset{x\to 0}{\sim} n(1-\cos x)\sim\frac{nx^2}{2}$

۱۰. $1-\sin^n x\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} n(1-\sin x)\sim\frac{n}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$

درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

۱۱. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{n}{m}$

۱۲. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$

۱۳. $\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}$

۱۴. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\sin x}}{x^2\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{18}$

۱۵. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\frac{1}{4}$$

۱۶. $$\lim_{x\to0}\frac{(\text{Arc}\sin x)^5-x^5}{x^5(1-\cos x)}=\frac{5}{3}$$

۱۷. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,.\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=3$$

راهنمایی تمرین‌ها

۱. $$\sqrt[n]{1+ax}=t\Rightarrow ax=t^n-1\ ,\ \ x\to0\Rightarrow t\to1$$

$$t\underset{t\to1}{\sim}1\Rightarrow t^n-1\underset{t\to1}{\sim}n(t-1)\Rightarrow\frac{ax}{n}\sim\sqrt[n]{1+ax}-1$$

۲. $$\sqrt[n]{x}\underset{x\to1}{-}1\sim\sqrt[n]{1+(x-1)}\underset{x\to1}{-}1\sim\frac{x-1}{n}$$

۳. الف.

$$x=t^8\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=\lim_{t\to0}\sqrt{t^6+\sqrt{t^4+1}}=1$$

ب.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}=1$$

۴. الف.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\frac{x^3}{6}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=1$$

ب.

$$\text{Arc}\sin x=\varphi\ ,\ \lim_{x\to0}\frac{\text{Arc}\sin x-x}{\frac{x^3}{6}}=$$

$$=\lim_{\varphi\to0}\frac{\varphi-\sin\varphi}{\frac{1}{6}\sin^3\varphi}=1$$

۵. $$\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{\frac{1}{2}\sin^3 x}=\lim_{x\to0}2\times\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=1$$

۶. $$\cos x-\cos 3x\underset{x\to0}{\sim}4\cos x.\sin^2 x\underset{x\to0}{\sim}4x^2$$

۷. $$\sqrt{\cos 2x}\underset{x\to0}{\sim}\cos x\sqrt{1-tg^2x}\underset{x\to0}{\sim}\cos x(1-\frac{1}{2}tg^2x)$$

۱۰. $$1-\sin x=(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2=\left[\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\right]^2$$

$$\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})$$

۱۱. $$\sqrt[m]{x}\underset{x\to0}{-}1\sim\sqrt[m]{1+(x-1)}\underset{x\to1}{-}1\sim\frac{x-1}{m}$$

۱۲. $$\sqrt[m]{1+\alpha x}\underset{x\to0}{\sim}1+\frac{\alpha x}{m}$$

۱۳. $$1-\sqrt{x}\underset{x\to0}{\sim}1-\sqrt{1-\underset{x\to1}{(1-x)}}$$

$$\underset{x\to0}{\sim}\frac{1-x}{2},\cdots1-\sqrt[n]{x}\underset{x\to1}{\sim}\frac{1-x}{n}$$

۱۴. $$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\sin x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x-\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\frac{1}{6}x^3}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۱۵. $$\sqrt{1+tgx}-1\underset{x\to0}{\sim}\frac{tgx}{2}\Rightarrow l=\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 x}{4x^3}=\frac{1}{4}$$

۱۶. $$\text{Arc}\sin x\underset{x\to0}{\sim}x\Rightarrow(\text{Arc}\sin x)^5-x^5$$

$$\underset{x\to0}{\sim}5x^4(\text{Arc}\sin x\underset{x\to0}{-}x)\sim\frac{5x^7}{6}$$

۱۷. $$l=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x(1-\frac{1}{2}tg^2x)(1-tg^2x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x(1-\frac{3}{2}tg^2x+\frac{1}{2}tg^4x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow l=\lim\left[\frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{3\cos x\sin^2 x}{2x^2}-\frac{\sin^4 x}{2x^2\cos x}\right]=1\times\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$$



سید محمدرضا هاشمی موسوی

محک‌هایی برای شناخت اعداد اول و دوقلوهای اول

قضیه ۱ . اگر $N(p)$ بر p بخش‌پذیر و حاصل $\frac{N(p)}{p}$ عددی فرد باشد؛ آن‌گاه: ($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد) $(p\neq ۰)$

$$N(p)=p\left(۲\left\lfloor\frac{N(p)}{۲p}\right\rfloor+۱\right)$$

برهان. برای هر $N(p)$ و $p\neq ۰$ ، می‌توان نوشت:

$$\frac{N(p)}{p}=۲\left(\frac{N(p)}{۲p}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)$$

$$=۲\left(\frac{N(p)}{۲p}-\frac{۱}{۲}\right)+۱ \qquad (۱)$$

با فرض فرد بودن $\frac{N(p)}{p}$ و با توجه به برابری زیر برای هر x فرد:

$$(\text{x عدد فرد});\ \frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲}=\left\lfloor\frac{x}{۲}\right\rfloor$$

برابری (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{N(p)}{p}=۲\left\lfloor\frac{N(p)}{۲p}\right\rfloor+۱$$

یا:

$$N(p)=p\left(۲\left\lfloor\frac{N(p)}{۲p}\right\rfloor+۱\right) \qquad (۲)$$

مثال. اگر p عدد اول باشد، طبق قضیهٔ ویلسون، عبارت $N(p)=(p-۱)!+۱$ بر p بخش‌پذیر است و بالعکس (اگر $N(p)$ بر p بخش‌پذیر باشد، p عددی اول است)؛

بنابراین اگر $N(p)$ به صورت رابطهٔ (۲) تجزیه شود، p عدد اول است:

$$N(p)=(p-۱)!+۱=p\left(۱+۲\left\lfloor\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right\rfloor\right) \qquad (۳)$$

به طور مثال:

$$p=۷:\ ۶!+۱=۷\left(۱+۲\left\lfloor\frac{۷۲۱}{۱۴}\right\rfloor\right)=۷(۱+۲\times۵۱)$$
$$=۷\times۱۰۳=۷۲۱$$

$$p=۱۱:\ ۱۰!+۱=۱۱\left(۱+۲\left\lfloor\frac{۳۶۲۸۸۰۱}{۲۲}\right\rfloor\right)=۱۱(۱+۲\times۱۶۴۹۴۵)$$
$$=۱۱\times۳۲۹۸۹۱=۳۶۲۸۸۰۱$$

در این‌جا، رابطهٔ (۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}-\left\lfloor\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right\rfloor=\frac{۱}{۲} \qquad (۴)$$

یا:

$$\left\{\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right\}=۰/۵ \qquad (۵)$$

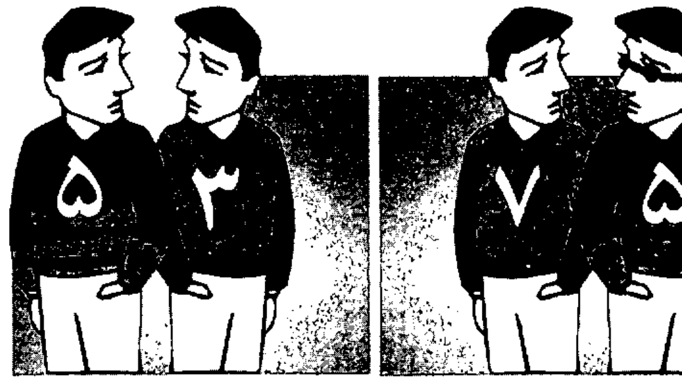
({ } : قسمت ناصحیح (اعشاری) عدد)

در این جا از قضیهٔ (۱) می‌توان قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت.

قضیهٔ ۲ . اگر برابری زیر برقرار باشد، p عدد اول است و برعکس.

$$\left\{\frac{(p-۱)!+۱}{۲p}\right\}=۰/۵$$

● **نتیجه**: هر عدد که در رابطهٔ (۵) صدق کند، عددی اول است و برعکس.



«رابطهٔ (۵) را می‌توان برای شناخت اعداد اول به کار برد.»

قضیهٔ ۳. اگر p و p + ۲ اعداد اول دوقلو (عددهای اولی که اختلاف آن‌ها دو واحد است) باشند: آن‌گاه در برابری زیر صدق می‌کنند. ({ } : قسمت اعشاری عدد)

$$\left\{\frac{(p-1)!+1}{2p}\right\}=\left\{\frac{(p+1)!+1}{2(p+2)}\right\}$$

برهان. با توجه به قضیهٔ (۱)، اگر a و p عددهایی اول باشند و $a > p$، آن‌گاه:

$$\left\{\frac{(p-1)!+1}{2p}\right\}=\left\{\frac{(a-1)!+1}{2a}\right\} \qquad (6)$$

اگر p عدد اول باشد، با فرض $a = p + 2$، عدد p و a، جفت‌های اول دوقلو هستند. بنابراین، با این فرض رابطهٔ (۶) تنها وقتی برقرار است که p و $a = p + 2$، اول باشند. پس رابطهٔ (۶) اگر به‌ازای $a = p + 2$ یک برابری درست باشد، در این صورت p عددی اول و با $p + 2$ یک جفت عدد دوقلو تشکیل می‌دهد. بنابراین برای یافتن عددهای دوقلو، کافی است در رابطهٔ (۶) مقدار $a = p + 2$ را جایگزین کنیم:

(محک اعداد دوقلوی اول)

$$a = p+2:\left\{\frac{(p-1)!+1}{2p}\right\}=\left\{\frac{(p+1)!+1}{2(p+2)}\right\}$$

مثال. می‌دانیم جفت‌های اول دوقلو چنین هستند:

دفتر انتشارات کمک آموزشی

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی (به صورت ماهنامه ـ ۹ شماره در هر سال تحصیلی ـ منتشر می‌شوند):

- **رشد کودک** (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی ابتدایی)
- **رشد نوآموز** (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی ابتدایی)
- **رشد دانش‌آموز** (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی ابتدایی).
- **رشد نوجوان** (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی).
- **رشد جوان** (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه).

مجله‌های عمومی (به صورت ماهنامه ـ ۹ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد مدیریت مدرسه، رشد معلم، رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا

مجله‌های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال منتشر می‌شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله‌ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان متوسطه (مجله‌ی ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان رشد آموزش زیست شناسی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشدآموزش هنر، رشد آموزش قرآن رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه‌ای، رشد مشاوره.

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی برای معلمان، آموزگاران، مدیران و کادر اجرایی مدارس
دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

- نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.org

☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰

☎ **پیام گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

☚«۱۷و ۱۹» و «۱۱ و ۱۳» و «۵ و ۷» و «۳ و ۵» (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۱ و ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۳) و... و

با استفاده از رایانه‌های بسیار قوی و پیشرفته، تعداد ۱۵۲۹۸۲ زوج اعداد دوقلو کوچک‌تر از ۳×۱۰^{۷} و بین $۱۰^{۱۲}$ و $۱۰^{۱۲} + ۱۰^{۴}$، تعداد ۲۰ جفت عدد دوقلو یافته‌اند. این، نشانگر رشدی افزایشی، ولی بسیار کُند در مجموعهٔ اعداد طبیعی است. وجود اعداد دوقلو در میان اعداد اول، نشانگر آن است که اعداد اول تا چه حد می‌توانند به هم نزدیک باشند. البته در میان اعداد اول، شکاف‌های عظیمی نیز یافت می‌شود. برای مثال، عددهای $(n+۱)!+۲$، $(n+۱)!+۳$، ...، $(n+۱)!+(n+۱)$ همه مرکب هستند.

در این جا با رابطهٔ اخیر، اعداد دوقلوی اول «۳ و ۵» و «۵و۷» را محک می‌زنیم.

$$p = ۳: \left\{\frac{۳}{۶}\right\} = \left\{\frac{۲۵}{۱۰}\right\}; \quad \{۰/۵\} = \{۲/۵\}; \quad ۰/۵ = ۰/۵$$

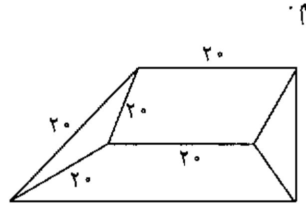
$$p = ۵: \left\{\frac{۴!+۱}{۱۰}\right\} = \left\{\frac{۶!+۱}{۱۴}\right\}; \quad \{۲/۵\} = \{۵۱/۵\}; \quad ۰/۵ = ۰/۵$$

* **توجه:** محک‌های (۵) و (۶) توسط نرم‌افزارهای رایانه‌ای، قابل برنامه‌ریزی است.



تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه

جواب: در زیر، نمودار مسطّحی را نشان داده‌ایم که باید برای به دست‌آوردن پنج وجهی مورد نظر بریده و تا شود و نیز منظری سه بعدی از شکل مورد نظر را به دست داده‌ایم:



در مغرب بغداد رصد کرده است و میل کلی خورشید را ۲۳ درجه و ۳۵ دقیقه و عرض بغداد را ۳۳ درجه و ۲۰ دقیقه یافته است.

سجزی در رساله ی تثلیث زاویه دو راه برای حل مسأله ی تثلیث زاویه از صاغانی نقل کرده است.

این بود مطالب پراکنده ای که ریاضیدانان معاصر صاغانی درباره ی بعضی کارهای وی نوشته اند.

آثار ریاضی موجود وی

۱ـ کتاب فی کیفیة تسطیح الکره علی سطح الاسطرلاب = کتاب فی تسطیح التام

موضوع این کتاب در واقع بحث در مسأله ی تصویر دوایر واقع بر سطح کره است روی یک صفحه در حالت کلی. یعنی بدون شرط اینکه صفحه ی دایره با صفحه ی تصویر موازی باشد، کتابی است بدیع که شایسته است مورد بررسی قرار گیرد.

علاوه بر نسخه های خطی که از این کتاب در دست است متن آن در سال ۱۹۴۸ م در حیدرآباد دکن در ۲۶ صفحه به طبع رسیده است (در الرسائل المتفرقه فی الهیئة). صاغانی این کتاب را برای کتابخانه ی عضدالدوله ی دیلمی نوشته است.

بیرونی در کتاب استیعاب الوجوه الممکنه فی صنعة الاسطرلاب مختصری از این کتاب را تحت عنوان «جوامع معانی کتاب ابی حامد الصغانی فی تسطیع التام» آورده است و نیز چنان که پیش از این گفته شد بیرونی طرز تسطیع این کتاب را «عجیب» توصیف کرده و نوشته است که این طرز پیش از صاغانی سابقه نداشته است.

۲ـ رسالة فی عمل ضلع المسبّع المتساوی الاضلاع فی الدائره

موضوع این رساله محاط کردن هفت ضلعی منتظم در دایره است. صاغانی این رساله را برای کتابخانه ی عضدالدوله نوشته است.

برگرفته از کتاب زندگی نامه ریاضی دانان دوره ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی

تألیفات دیگر صاغانی که موجود است عبارتند از:

۱ـ رساله فی الساعات المعموله علی صفائح الاسطرلاب

۲ـ مقاله فی الابعاد و الاجرام

جشنواره کتاب های آموزشی رشد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

راهی به سوی:

- استانداردسازی کتاب های آموزشی
- معرفی و تقدیر از کتاب های آموزشی برتر
- آسیب شناسی تولید کتاب های آموزشی



فراخوان معلمان و مدیران آموزشی برای پاسخ به دو سؤال:

۱

وضع کنونی انتشار کتاب های آموزشی در کشور چگونه است؟

۲

نقش وزارت آموزش و پرورش در فرآیند انتشار کتاب های آموزشی چه می‌تواند باشد؟



- **مشخصات کامل و عکس خود را به همراه پاسخ برای درج درفصل نامه «جوانه» به آدرس: تهران ـ صندوق پستی ۳۳۳۱ / ۱۵۸۷۵ ارسال نمایید.**

دفتر انتشارات کمک آموزشی

دبیرخانه سامان بخشی کتاب های آموزشی، تلفن: ۸۸۳۰۶۰۷۱، نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

www.samanketab.com

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مجله ریاضی

رشد برهان

۴۷

www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۱
❖ پاییز ۱۳۸۴ ـ بها: ۲۵۰۰ ریال



- ❖ با راهیان المپیادهای ریاضی
- ❖ مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته
- ❖ کاربرد بردار در حل مسائل
- ❖ شرایط تدریس ریاضی
- ❖ شهود ریاضی و استدلال شهودی
- ❖ منطق ریاضی

مشاهیر ریاضی مسلمان

ابن هیثم

ابوعلی حسن بن حسن بن هیثم



ابن هیثم یکی از ریاضیدانان نامی و بی تردید بزرگ ترین فیزیکدان عرب است. در قرون وسطی اروپاییان او را الهازن[1] نامیده اند. در تاریخچه ی زندگی او خلأ بسیار وجود دارد. در حدود ۳۵۴ در بصره به دنیا آمد و در زمان خلافت الحاکم (۳۸۶-۴۱۱) به مصر رفت و در آنجا درصدد برآمد که جریان رود نیل را منظم سازد، امّا چون این کار را ناشدنی یافت با وجود ترسی که از خشم خلیفه داشت از آن چشم پوشید. پس از مرگ حاکم به قاهره بازگشت و برای تأمین معاش به رونویسی کتاب های خطی علمی، به ویژه کتاب های ریاضی پرداخت. مرگ وی در ۴۳۰ اتفاق افتاد. فهرست آثار او از صد متجاوز است اکثر این آثار ـ که بعضی از آن ها بسیار کوتاه است ـ درباره ی ریاضیات و فیزیک نوشته شده است. امّا وی به مباحث فلسفی و طبی نیز پرداخته است. در سرتاسر آثار فلسفی ابن هیثم به احاطه ی کامل وی بر نوشته های مؤلفان یونانی بخصوص بطلمیوس می توان پی برد.

نبوغ ریاضی ابن هیثم در مقاله ی پنجم کتاب فی المناظر، آنجا که مسأله ای را حل می کند که امروز به نام او معروف است، به اوج شکوفایی رسیده است. این مساله چنین است:

«در دایره ای به مرکز O و به شعاع R دو نقطه ی ثابت A و B داده می شود. هرگاه دایره را به مثابه آینه ای، فرض کنیم، بر آن، نقطه ای چون M بیابید که شعاع نوری که از A خارج می شود، پس از منعکس شدن در نقطه ی M، بر B بگذرد.»

راه حلّ بسیار پیچیده ی ابن هیثم به یک معادله ی درجه ی چهارم منتهی می شود که وی آن را با قطع کردن هذلولی متساوی القطرین و یک دایره حل کرده است. لئوناردو داوینچی به حل این مسأله علاقه پیدا کرد امّا چون مبانی ریاضی مستحکمی نداشت فقط توانست آن را از راه عملی (مکانیکی) حل کند. سرانجام هویگنس[2]، که در سال ۱۶۹۶ درگذشت، ظریف ترین و ساده ترین راه حل را نشان داد.

ابن هیثم مانند ابن سینا و بیرونی معتقد بود که جهت سیر شعاع نور از طرف شیء به طرف چشم است، نه در جهت عکس آن که اقلیدس و بطلمیوس و کندی انگاشته بودند.

در ریاضیات، ابن هیثم مسأله ی ماهانی را به صورتی بدیع حل کرد و رساله های متعدد درباره ی مطالب ریاضی نوشت.

برخی از آثار ریاضی موجود وی

۱ـ رسالة فی مساحة المجسم المکافی

این رساله توسط سوتر به زبان آلمانی ترجمه و بررسی شده است.

۲ـ مقاله فی تربیع الدائرة

این مقاله نیز توسط سوتر به زبان آلمانی ترجمه و بررسی شده و چند نسخه ی خطی از آن در کتابخانه های مجلس و مدرسه ی سپهسالار و مشهد و زنجان موجود است.

۳ـ مقالة مستقصاة فی الاشکال الهلالیة

۴ـ خواص المثلث من جهة العمود

در سال ۱۹۳۹ م در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده و توسط هرملینگ در سال ۱۹۶۴م بررسی شده است. ترجمه ی انگلیسی این مقاله با شرح آن در «گزارش جشن هزاره ی ابن هیثم» به چاپ رسیده است.

۵ـ القول المعروف بالغریب فی حساب المعاملات

۶ـ فصل فی اصول المساحة و ذکرها بالبراهین

در سال ۱۹۳۸ م در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده و توسط ویدمان بررسی شده است. علاوه بر این در «گزارش جشن هزاره ی ابن هیثم» به زبان انگلیسی ترجمه شده است.

۷ـ قول فی مساحة الکرة

در سال ۱۹۶۸ م به زبان روسی ترجمه شده است.

ادامه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۴۷

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۱ ● پاییز ۱۳۸۴ ● شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ❖ سردبیر: حمیدرضا امیری ❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ ویراستار ادبی: کبری محمودی ❖ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره:

رشد برهان متوسطه هر سه ماه یکبار، منتشر می‌شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۷۳۶۶۵۶ _ ۷۷۷۳۱۱۱۰



یادداشت سردبیر

جلسه ی اخیر هیأت تحریریه ی مجله ی رشد برهان متوسطه در جمعی بسیار صمیمی - در منزل استاد پرویز شهریاری - و با حضور همه ی اعضای هیأت تحریریه، به جز استاد یاسی پور، که در مسافرت بودند، برگزار شد. در این جلسه علاوه بر بررسی مطالب، مقاله ها، پیشنهادها و انتقادات رسیده از طرف شما خوانندگان عزیز، روی خط مشی کلّی مجله بحث و تبادل نظر و در نهایت قرار شد حاصل این بحث به تغییراتی در ساختار مجلّه منجر شود. اکنون لازم می دانیم شما دانش آموزان گرامی را از تغییرات مورد نظر آنها آگاه سازیم.

۱. در ۲ شماره از ۴ شماره ی مجلّه همانند شماره های قبل از ۳۷، بخش مسائل برای حل همراه با حل تشریحی به مجلّه افزوده می شود. این مسائل برای کلاس های اول، دوم و سوم رشته های ریاضی و تجربی و به تفکیک کتاب درسی آورده خواهد شد. مسائل در یک شماره براساس امتحان نوبت اول و در شماره ی دیگر براساس همه ی مطالب کتاب درسی (همراه با حل) مطرح می شوند.

شما نیز می توانید با ارسال مسائل کلیدی و هدف دار ما را در این امر یاری کنید. ما مسائل را پس از بررسی و ویرایش علمی و تفکیک برحسب پایه و کتاب درسی، با نام خودتان چاپ خواهیم کرد. فقط یادتان باشد مسائل را همراه با حل آنها ارسال کنید.

۲. بخشِ جواب به نامه های ارسالی، که قبلاً تحت عنوان «آنچه از دوست رسد...» چاپ می شد و نیز بخش «اخبار ریاضی در ایران و جهان» بار دیگر فعال خواهد شد، و ما در هر دو بخش نیاز به همکاری شما داریم، بنابراین اگر مسائل نو و جدید به دستتان می رسد یا در زمینه ای مقاله ای می توانید بنویسید و یا تحقیقی کرده اید، نتیجه ی آن را برای ما ارسال کنید. اگر در شهر شما یا استان شما سمینار، کنفرانس یا همایش ریاضی برگزار شده است، خبر آن را برای ما بفرستید و اگر امکان برقراری ارتباط با شبکه ی جهانی «اینترنت» را دارید و از آن طریق می توانید اخباری را دریافت کنید، برای ما بفرستید.

۳. اعضای هیأت تحریریه از استاد پرویز شهریاری درخواست کردند بخشی از خاطرات خود را که حاصل حدود بیش از نیم قرن تدریس در کلاس های ریاضی است، بنویسند و برای چاپ در اختیار مجله بگذارند. می دانیم که برای شما بسیار قابل استفاده است.

۴. هیأت تحریریه در نظر گرفت مسائل برای حل، که قبلاً از شماره های ۱۸ تا ۳۶، در مجله چاپ شده است به صورت ویژه نامه ای چاپ و در اختیار علاقه مندان قرار گیرد. این کار اِن شاءالله، در صورت موافقت مسئولان دفتر انتشارات کمک آموزشی به مرحله اجرا درخواهد آمد. منتظر مطالب، نامه ها، مسائل، مقاله ها، پیشنهادها، انتقادات و خلاصه ارتباط شما با مجله ی خودتان، هستیم.



از تاریخ بیاموزیم

مرحلهٔ بالای یگانگی دانش ریاضی
ساز و کار تکامل ریاضیات نظری

۲۰

پرویز شهریاری

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی ساز و کار تکامل ریاضیات نظری بحث شد، به طوری که اگر «از بیرون» به تفرق دانشی ریاضی نظری بیندازیم، لایه بندی شدن نظریه دانش ریاضی و طبقه بندی شدن ساختمان آن را می بینیم، ولی اگر «از درون» به آن نگاه کنیم، تکامل این ساختمان دیده می‌شود. بنابراین کافی نیست به بررسی تفرق نظریه ریاضی تنها از بیرون قناعت کنیم، لازم است به رشد نظریه های دانش ریاضی، همچون پیشرفت نظریه های ریاضی بنگریم. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

رابطه‌های منطقی دینامیک، نقشی تعیین‌کننده در تشکیل هندسه‌ی هذلولوی داشته‌اند. چرا نخستین نمونه‌ی هندسه‌ی نااقلیدسی، به ویژه از روی هندسه‌ی هذلولوی ساخته شد؟ در پاسخ به این موضوع، باید از تفاوت‌هایی که هندسه‌ی هذلولوی با دیگر هندسه‌های نااقلیدسی دارد، آغاز کرد.

برای بررسی اصل موضوع توازی، همه‌ی بررسی‌کنندگان درباره‌ی محدودبودن حرکت نمی‌اندیشیدند، یعنی فرض را بر همگونی فضا می‌گذاشتند. همگونی فضا هم به معنای ثابت بودن فضا بود. انحنای ثابت فضا، دایره‌ی مکان‌های فضای ریاضی را به سه سمت محدود می‌کند: فضای با انحنای ثابت مثبت، فضای با انحنای صفر (فضای اقلیدسی) و فضای با انحنای منفی (فضای لباچوفسکی). بررسی‌کنندگان در این زمینه تردیدی نداشتند و ناچار بودند، یکی از این سه فضا را انتخاب کنند. ولی فضای با انحنای مثبت، اصل موضوع را حذف می‌کند، زیرا دو خط راست نمی‌توانند در بیش از یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. فضای اقلیدسی هم، به‌طور طبیعی کنار می‌رود. بنابراین، بررسی‌کنندگان به هندسه‌ی هذلولوی روی آوردند.

درباره‌ی دشواری فلسفی ریاضیات، به مسأله‌ی ساختمان هندسه‌ی هذلولوی اشاره شده است و بیش از همه روی این موضوع تکیه شده که این هندسه در درجه‌ی اول به این خاطر پدید آمده است که استدلال ساده‌ای برای جانشین کردن چند خط راست موازی به جای یک خط است ارائه دهد. این استدلال‌ها با هدف اثبات درستی اصل موضوع درباره‌ی یکانگی خط راست موازی انجام گرفتند؛ اثبات این که عکس آن به جای نادرستی می‌رسد و یا تناقض پدید می‌آید و... استدلال‌ها به این منظور آغاز شدند که هندسه‌ی اقلیدسی را به تناقض بکشانند، ولی سرانجام لباچوفسکی، بایای و گوس متوجه شدند که هیچ گونه تناقضی در هندسه‌ی هذلولوی وجود ندارد. دوم، وقتی روشن شد هیچ تناقضی در هندسه‌ی هذلولوی وجود ندارد، آن را در جایی نشاندند که می‌تواند همپای هندسه‌ی اقلیدسی پیش رود. در این جا موقعیت واقعی بررسی‌های فلسفی روشن شد: یکی به روشنی از قبول آنچه می‌دید سرباز می‌زد و آن را قبول نداشت (لامبرت)، و دیگران با دیدی تازه به جهان نگریستند و در این جهت، موقعیت‌های جالبی به دست آوردند (لباچوفسکی وبایایی). استدلال‌های از راه «برهان خُلف» و تصور فلسفی را می‌توان پایه‌گذار هندسه‌ی هذلولوی دانست. برای نمونه، در کتاب «مسأله‌های اساسی فلسفی دانش‌های طبیعی امروز»، اثر و. ز. برزن کُوف و س. آ. له به دف (۱۹۷۵) گفته می‌شود:

«از جمله عامل‌های مهمی که به کشف هندسه‌ی نااقلیدسی انجامید، کار عظیمی بود که در رابطه با اثبات اصل پنجم اقلیدس انجام گرفت. همه‌ی این تلاش‌ها ناکام ماندند و با هر ناکامی، این اندیشه بیش‌تر قوت می‌یافت که اصل پنجم را نمی‌توان از چهار اصل دیگر و یا قضیه‌ای که به آن مربوط نمی‌شود، نتیجه گرفت. عامل اساسی دیگری که به پیدایش هندسه‌ی نااقلیدسی یاری رساند، پیشرفت فلسفه و اندیشه‌های فلسفی بود که مسأله‌ی طبیعت دانش ریاضی را به‌طور کلی، و هندسه را به‌طور ویژه در مرکز توجه قرار داد. و این، مسأله‌ای قدیمی است که در کارهای رنه دکارت، لایب نیتس، ف. بِه کُن، کانت هم دیده می‌شود.»

ن. آ. کیسه له وا، تأثیر متقابل دلیل‌های فلسفی و درونی ریاضیات را، به صورت دیگری روشن می‌کند. او در کتاب «ریاضیات و واقعیت» که در سال ۱۹۶۷ چاپ شد، می‌نویسد: «منطق درونی دانش، دانشمندان و اندیشمندان را به سوی بازبینی اصل موضوع‌های اقلیدس کشاند، و دانشمندان برای اثبات آن‌ها، وقت و انرژی زیادی را روی این اصل موضوع‌ها از دست دادند. ولی سرانجام، نتیجه‌ی این بازبینی‌های منطقی، کشف هندسه‌ی نااقلیدسی بود که تنها امکان داد، در سطح تعریف‌ها، خود ریاضیات را پیش ببرند.»

با بررسی شرط‌های لازم برای ساختن هندسه‌ی هذلولوی معلوم شد، مهم این است که به ناتمام ماندن اثبات اصل موضوع از راه برهان خُلف تأکید شود و تأثیر رابطه‌های منطقی دینامیک و رابطه‌های منطقی ریاضی جدیدی که به هدف استدلال کمک می‌کند، مورد توجه قرار گرفت. این تاثیر بعد از بحران نظریه‌ی ریاضی دیفرانسیلی بر دینامیک روشن شد؛ و این علت درونی آغاز هندسه‌ی اقلیدسی از نظر ریاضی بود. کما این که در نیمه‌ی اول سده‌ی هجدهم، لامبرت و ساکری، نخستین گام‌ها را در اثبات اصل موضوع توازی برداشتند. ساکری کوشید دو خط راست نامحدود را که در نقطه‌ای در بی‌نهایت یکدیگر را قطع می‌کنند، در نظر بگیرید. لامبرت هم «در مرزهایی» که «بی‌نهایت به هم نزدیک» و «بی‌نهایت از هم دور» بودند، ایستاد که به او امکان می‌داد، به بستگی‌های تازه‌ی نظری در بررسی اصل موضوع برسد. ولی پس از محاسبه‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها به مفهوم دیفرانسیل گیری و انتگرال گیری و گسترش اثبات‌ها با برهان خُلف، به دشواری برخورد.

رشد ساختمان‌های نظری ریاضیات و دقیق‌کردن آن‌ها، از راه کنارگذاشتن نمونه‌های موجود و تنها تکیه بر رابطه‌های منطقی، می‌توانست چیزی بیش‌تر از گذشته درباره‌ی اصل موضوع پنجم به دست بدهد. اثبات اصل پنجم، زمینه‌ای بود که براساس آن، رابطه‌های منطقی دینامیک، کمبودهای هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی را برطرف می‌کرد. جهت‌گیری بررسی‌های جدید نظری-ریاضی درباره‌ی اصل توازی به این‌جا منجر شد که تنها خود این اصل موضوع مورد توجه قرار گیرد. تصادفی نیست که آفرینندگان هندسه‌ی هذلولوی، تا این اندازه روی بخش‌های آن به‌طور تحلیلی دقت کردند. همه‌ی آن‌ها، کم‌تر یا زیادتر، فضای هندسه‌ی هذلولوی را از نظر دیفرانسیلی، هندسه‌ی تحلیلی و غیره، کاویدند. به ویژه، نیکلای لباچوفسکی به این جنبه‌ها علاقه‌مند بود. ونیامین فه‌دورویچ کاکان، در یادداشتی که بر کتاب یانوش بایای، به نام «من بایای هستم» نوشته، این طور اظهار داشته است:

«اگر در کتاب بایای، هندسه‌ی دیفرانسیلی تنها در یک بند شرح داده شده است، برای لباچوفسکی، هندسه‌ی دیفرانسیلی و انتگرال گیری که مربوط به آن است، در مرکز توجه بوده است... علت این امر آن است که لباچوفسکی امید داشت در این محاسبه‌ها، تأثیدی بر درستی هندسه‌ی هذلولوی بیابد.»

و آ. پ. نوردن[1] در کتاب «گوس و لباچوفسکی» می‌نویسد: «لباچوفسکی، خیلی بیش‌تر از گوس در هندسه‌ی نااقلیدسی، جلو رفته بود. او به طور گسترده‌ای مثلثات هذلولوی را بسط داد و در ضمن، خصلت کامل مثلثات کروی را، با طرح اساس هندسه‌ی تحلیلی و دیفرانسیلی فضای خودش، روشن کرد و از آن برای محاسبه‌ی طول، کمان، مساحت، سطح و حجم استفاده کرد.»

بررسی‌های گوس در این زمینه جسته و گریخته و ناکافی بود، ولی لباچوفسکی توانست به نتیجه برسد و به یاری رابطه‌های منطقی دینامیک، عنصرهای سطح را پیدا کند و حتی مقدار سطح را به یاری این عنصرها به دست آورد. ساختار هندسه‌ی هذلولوی به هیچ وجه، بی‌اعتنایی نسبت به رابطه‌های تازه‌ی منطقی نبود. این هندسه به عنوان ساختمانی نظری ریاضی، با جداکردن بستگی‌های تازه‌ی هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی به وجود آمد.

در نظر گرفتن بستگی‌های تابعی و محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، تنها برای یک رشته استدلال‌های هندسی نبود، بلکه به فرض مجموعه‌ای از توازی‌ها هم مربوط است. رابطه‌های نظری تازه، به صورتی جدی درباره‌ی برهان‌های هندسه‌ی هذلولوی هم مورد استفاده قرار گرفتند. پژوهشگر مشهور و به وجود آورنده‌ی هندسه‌ی هذلولوی، آ. پ. نوردن، بارها تأکید می‌کند که هندسه‌ی درونی، با هندسه‌ی هذلولوی لباچوفسکی که می‌خواهد رابطه‌های مثلثاتی را به یاری این هندسه، با استفاده از مقدارهای بسیار کوچک، پیدا کند، و سپس بی‌تناقضی این دستورها را ثابت کند، منافات ندارد [در کتاب: «کشف لباچوفسکی و مقام آن در هندسه‌ی تازه»].



او گرچه به اشتباه، بی‌تناقضی رابطه‌های مثلثاتی را با بی‌تناقضی تمامی هندسه‌ی هذلولوی یکسان دانست، در جست‌وجوی بعدی، بی‌تناقضی هندسه‌ی نااقلیدسی را ثابت کرد [**بلترام، ۱۸۶۸؛ پوانکاره، ۱۸۷۷؛ کلاین، ۱۸۷۱؛ و کولیج، ۱۹۰۰**].

ارزش چنین مفهوم‌هایی برای به رسمیت شناختن هندسه‌ی هذلولوی، نه تنها به یک رشته اثبات‌ها و برخی بحث‌های اثباتی کمک کرد، بلکه به ژرف‌تر کردن هندسه‌ی هذلولوی هم یاری رساند. آخرین امکان هندسه‌ی هذلولوی ـ که بازتاب متدولوژی آن شنیده شد ـ دورتر از ساختمان نظری آن رفت، زیرا روش قیاسی حداکثر در هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی، ماهیت ارزش‌های ریاضی و اصول ساختمانی آن را روشن کرد. افزایش تدریجی نیروی ریاضیات نظری که براساس رابطه‌های نظری تازه بود، روی یکی از این ساختمان‌ها متمرکز شد (روی هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی) و به یک رشته تغییرهای روش‌شناسی منجر شد. نخستین و مهم‌ترین تغییر را باید در تغییری دانست که نسبت به اعتبار ریاضیات وارد آمد و اگر دقیق‌تر بگوییم، درباره‌ی هم‌ارزی استدلال‌های نظری مربوط به رابطه‌های دنیای واقع. پیش از آن، تنها هندسه‌ی اقلیدسی برای بررسی دنیای واقع و استدلال‌های مربوط به آن پذیرفته شده بود. برای نمونه، اگر ثابت شده است که پنج گونه‌ی جسم منتظم وجود دارد، پس در دنیای واقع هم همین پنج گونه یافت می‌شود. یعنی نوعی تغییر نظری از دانش وجود داشت که بر یک ساختمان نظری تکیه می‌کرد و یک روش اصل موضوعی به رسمیت شناخته شده بود. بر همین پایه هم، همه‌ی موضوع‌های ریاضی فهمیده می‌شدند. تولد روش‌های دیگر اصل موضوعی، این یگانه‌بودن تفسیر را به هم زد. این بازتابی از ریاضیات نظری زمان تازه بود که به کلی ریاضیات دنیای کهن را بر پایه‌ی تازه‌ای قرار می‌داد.

کنار رفتن اصل موضوعی اقلیدسی (و وارد شدن اصل موضوع تازه‌ای به جای اصل پنجم اقلیدس) روشن کرد، به جای هندسه‌ی مقدماتی اقلیدسی، می‌توان هندسه‌ی هذلولوی را قرار داد. تفسیر دنیای واقع، بر پایه‌ی ساختمان جدیدی قرار گرفت که با پیش از آن فرق داشت. استدلال‌های مربوط به دنیای واقع تغییر کرد. بنابراین، روند نظری محاسبه‌ی دیفرانسیلی، همه‌ی این تغییرها را شامل شد و جهان هستی را با روش دیگری تفسیر کرد، به این ترتیب روشن شد، برای تغییر دنیای واقع، باید مدل‌های ریاضی تازه‌ای درست کرد.

کار واقعی سازوکار تکامل روش نظری و نظم دانش ریاضی با همراه کردن دیفرانسیل و انتگرال، خیلی خوب فعالیت‌ها را سامان داد. به دنبال دوران دیفرانسیل‌ها، دوران انتگرال‌گیری فرا رسید. دوران انتگرال به این جهت فرا رسیده که روش دیفرانسیل‌گیری به شدت روش وارون را طلب می‌کرد که یکسان نبودند و با همان روش نمی‌شد به آن پرداخت، استدلال در شاخه‌های گوناگون ریاضیات، مختلف است. ریاضیات نظری به بخش‌های متفاوت تقسیم می‌شود و همه را نمی‌توان در یک‌جا جمع کرد.

برای انتگرال‌گیری، با تنظیم دانش نظری ریاضی، در دید اول به نظر می‌رسد که بخش‌های مختلف آن با هم تفاوت دارند. وقتی نظریه‌ی **اواریست گالوا** بعد از مرگ او چاپ شد (۱۸۴۶) که درباره‌ی گروه‌های محدود تبدیل‌ها بود، این امکان را به وجود آورد که با یک دید به موقعیت‌های مختلف نظریه‌های ریاضی نگاه کنیم و همه‌ی آن‌ها را «با دقت هم‌ریختی» مورد بررسی قرار دهیم.

«... و به ویژه در این زمان... دانشمندان عادت می‌کنند، از یک نظریه به نظریه‌ی دیگر که به‌طور مستقیم از آن نتیجه می‌شود، با تغییر اصطلاح‌ها بروند. حیرت‌انگیزترین نمونه، عبارت است از دوگانگی در هندسه‌ی تصویری که در آن زمان به صورت دو ستونی که در ردیف هم بودند، در قضیه‌های دوگانه‌ای که نقش بزرگی برای مفهوم‌های هم‌ریختی داشتند، به عهده گرفت. مفهوم گروه‌های هم‌ریخت (به شرطی که بررسی آن‌ها با دقت نظر بیش‌تری انجام گیرد)، به وسیله‌ی گوس برای گروه‌های آبلی و به وسیله‌ی گالوا برای گروه‌های جابه‌جاپذیر روشن شد و در میانه‌های سده‌ی نوزدهم، دیگر برای همه‌ی گروه‌ها به کار می‌رفت.» **[نیکل بورباکی، «رساله‌ای درباره‌ی تاریخ ریاضیات»]**.

انتگرال‌گیری به یاری نظریه‌ی گروه‌ها، نه تنها در نظریه‌های جبری اهمیت داشت، بلکه برای تمامی ریاضیات ثمربخش بود. برای نمونه، در نظریه‌ی هندسه، زمینه برای اندیشه‌های نظریه‌ی گروه، با کار **موبیوس** در کتاب «محاسبه» (۱۸۲۷) آغاز شد که در آن، تلاشی برای یکی کردن هندسه‌ی تصویری و هندسه‌ی تحلیلی صورت گرفته بود. گام بعدی در جمع و جور کردن هندسه، مربوط به تغییر عمومیت و اختلاف در عمل‌های تصویری بود. در واقع، **ژرژبول** (۱۸۱۵ـ۱۸۶۴) و نیز **آرتور کیلی** (Clyley؛ ۱۸۲۱ـ۱۸۹۵) و **جیم جوزف سیلوستر** (۱۸۱۴ـ۱۸۹۷). بستگی هندسه‌های تصویری و متری را یادآوری کردند. در این جا به ویژه، «یادداشت‌های ششم درباره‌ی شکل‌ها» مهم هستند (۱۹۵۹) که کیلی در آن‌ها، برای نخستین بار مفهوم مقیاس تصویری را وارد کرد.

این تعریف مقیاس همراه با ملاحظه‌ی نظری گروه‌ها، پایه‌ی «برنامه‌ی ارلانگن» شد که چهره‌ی هندسه را در این دوران که بورباکی آن را «سده‌ی طلایی» هندسه می‌نامد، روشن می‌کند. در این برنامه، از این مطلب صحبت شده بود که «امکان می‌داد از دیدگاه واحدی، به همه گونه‌های مختلف دستگاه‌ها و روش‌های مختلف هندسی، بنگریم» **[فه‌لیکس کلاین، تاریخ «برنامه‌ی ارلانگن»]**.

الی ژوزف کارتان، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۶۹–۱۹۵۱) که از سال ۱۹۳۱ عضو فرهنگستان علوم پاریس بود، اندیشه‌ی **کلاین** را خیلی جالب توضیح می‌دهد: «...همه‌ی گروه‌های پیوسته، به وسیله‌ی هندسه‌ی مستقلی تعریف می‌شوند. این هندسه، به شرطی که متغیر فرض شود، گروه را همچون مقداری در نظر می‌گیرد که هر نقطه‌ی فضا را با این مقدار می‌سنجد و ویژگی‌های شکل را بررسی می‌کند که نسبت به تبدیل‌های گروه G ثابت است... گروه G را، گروه اصلی این هندسه گویند. بنابراین، یک هندسه‌ی آفینی به دست می‌آید که با این هندسه همدیس (کُنفرم) است؛ هندسه‌ی «لاگر...» **[الی کارتان، «نظریه‌ی گروه هندسه» در کتاب «بنیان‌های هندسه»]**.

جست‌وجوها، تنها به این جنبه‌ی کارمحدود نشدند. گام بلندی در زمینه‌ی فضای چند بعدی [ریمان، «درباره‌ی **فرضیه‌ای درباره‌ی بنیان‌های هندسه**»؛ ۱۸۵۴]، و دستگاه‌های عددی فوق مختلط و غیره هم برداشته شد. سپس با آغاز از نظریه‌ی کانتوری مجموعه‌ها، همه‌چیز به هم پیوست. برای نمونه، بی‌شمار بودن مجموعه‌ی عددهای حقیقی پایه‌گذاری شد که برای اثبات بسیاری از نظریه‌های عمیق دانش ریاضی مورد استفاده قرار گرفت. به این ترتیب عام کردن دانش نظری ریاضیات، به عنصر مهمی برای پیشرفت و تکامل آن تبدیل شد.

ولی با تلاش‌های فه‌لیکس کلاین، برنهارد ریمان و دیگران، گام نهایی برداشته شد. این، کار عظیمی بود و بدون به کار گرفتن همه‌ی اندیشه‌ها، ممکن نبود. به دنبال این تلاش‌ها وسیله‌ی نیرومندی (روش قیاس حداکثر) سربرآورد که می‌توانست یک نتیجه‌گیری را از بقیه انجام دهد. یک‌بار دیگر بعد از ریاضیات نظری رسمی، روش حداکثر قیاس، ریاضیات را فتح می‌کرد؛ با این شرط که عمل برهان خلف را نفی نکند. عمل تجمیع نظرها یا به یاری روش اصل موضوعی انجام می‌شود و یا به کمک روش حداکثر قیاس.

از نخستین تلاش‌های به کار گرفتن روش حداکثر قیاس برای ساختن دستگاه نظری ریاضی دانش تا به وجود آمدن دستگاه راضی‌کننده، مدت زمانی می‌گذرد. بنابر آگاهی **پروکلوس**، حداکثر قیاس در ریاضیات نظری، به وسیله‌ی **هیپوکرات**، **له‌ئون** و **اُدُکس** یافته است. ولی تلاش آن‌ها نتوانست به موفقیت برسد، زیرا پارگی‌های استدلال‌های اثباتی که لازمه‌ی آن زمان بود، به معنای ناپایداری فرض اولیه بود. روش رضایت‌بخش قیاس حداکثر، تنها وقتی به دست آمد که با استدلال‌های پیچیده‌ای روبه‌رو شد و همه‌ی مانع‌های اضافی از سر راه برداشته شدند. البته روند پایه‌گذاری مفهوم‌ها و قاعده‌های نخستین نتیجه‌گیری، چه در ریاضیات نظری رسمی و چه برای ریاضیات نظری دوران جدید را می‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد، براساس تعریف‌های نقطه‌ها، خط‌های راست و غیره و اصل موضوع‌هایی که بر پایه‌ی فرض‌های دیگری قرار داشت، قرار گرفت. همین مطلب امکان ساختن روش‌های متفاوتی را برای یک نوع نظریه‌ی ریاضی آماده کرد. راه منطقی و مطابق جهان واقعی، مفهوم‌های دلخواه ایجاد نکرد، زیرا: «عمل انسان میلیاردها بار تکرار می‌شد و در ذهن آدمی شکل‌های منطقی را به وجود می‌آورد. این شکل‌ها، با خصلت اصل موضوعی خود و تنها با نیروی

این میلیاردها تکرار، تحکیم شدند» [ولادیمیر ایلیچ] به جای معیارهای استدلال، به ریاضیات کاربردی (از آن جمله به‌وسیله‌ی بررسی‌کننده‌ی آن) رو آوردند و به تدریج پایه‌های منطقی آن را هم پیدا کردند.

روش حداکثر قیاس در ریاضیات نظری زمان ما در سال‌های ۸۰ سده‌ی نوزدهم به وجود آمد. فه لیکس کلاین، در «برنامه‌ی ارلانگن» بر اهمیت و ارزش بالای بررسی اصول و اصل موضوع‌های مطرح تأکید می‌کند و در مقاله‌ی دوم مربوط به هندسه‌ی نااقلیدسی (۱۸۷۲)، به ویژه با این عبارت از آن به عنوان «نخستین جمله» به «اصل موضوع زمان» یاد می‌کند [**فه لیکس کلاین، سخنرانی درباره‌ی، پیشرفت ریاضیات در سده‌ی ۱۹**].

به دنبال او، **فُوکوس لی** در نظریه‌ی گروه‌های تغییرپذیر، ساختمان اصل موضوعی را بر پایه‌ی مفهوم حرکت و دیفرانسیل گیری مطرح کرد [داوید هیلبرت، «اساس هندسه»]. سپس، پشت سر هم انواع گوناگون اصل موضوع‌ها مطرح شدند. **م. پاش**، در «سخنرانی‌هایی مربوط به هندسه‌ی جدید» (۱۸۸۲)، اصل موضوع‌های «ردیفی» تکیه می‌کند که مفهوم‌های روشنی مثل «بین»، «در درون» و غیره را شامل می‌شود و ضمن هم‌نهشتی شکل‌ها (بر هم قرار دادن شکل‌ها) پدید می‌آید. **جوزت سه په آنو**[2] (۱۸۵۸-۱۹۳۲) ریاضیدان ایتالیایی، در «سخنرانی‌هایی درباره‌ی بنیان‌های هندسه» (۱۸۸۹)، بر اصل موضوع‌های «ردیفی» تکیه می‌کند که به گونه‌ی دیگری جز نظریه‌ی «پاش» است. **م. پیه‌ری** در «هندسه‌ی مقدماتی به عنوان دانش قیاسی» (۱۸۹۰) بر نقطه‌ها و حرکت تکیه کرده است.

با این که جست‌وجوهای مربوط به اصل موضوعی کردن در تمامی دانش ریاضی انجام شده است، در این جا تنها به هندسه‌ی مقدماتی می‌پردازیم. کتاب اقلیدس به نام «مقدمات»، به صورت «محکی» برای اصل موضوعی کردن‌های جدید است، زیرا در این جا هم، مثل ساختن هندسه‌ی هذلولوی، آکسیوم‌ها و پوستولات‌ها اقلیدسی، مهم‌تر از نمونه‌های دیگر پذیرفته شده‌اند. **داوید هیلبرت**، «حمله‌ی» هدفدار و جانانه‌ای با انتشار کتاب‌های «بنیان‌های هندسه» (۱۸۹۹) و «درباره‌ی بنیان‌های هندسه» (۱۹۰۳) انجام داد. بر خلاف حالت پایدار هندسه‌ی مقدماتی، هندسه‌ی دینامیک مقدماتی ساخته شد (وقتی از ساختمان صحبت می‌کنیم، ساختار نظری آن را در نظر داریم که بر پایه‌ی قیاس بنا شده باشد). پس از چاپ کارهای هیلبرت، به قول **د. ن. تروتس نیکوف** می‌توان گفت که «مسأله‌ی بنیان‌های هندسه به پایان رسیده است». [**در کتاب «روند ساختمانی در ریاضیات»**].

کتاب «بنیان هندسه»ی هیلبرت، «به خاطر روشنی و عمق طرح خود، به منشوری در دست ریاضیدانان تبدیل شد و همه‌ی نوشته‌های پیش از خود را به فراموشی سپرد» [بورباکی در «رساله‌ای در تاریخ ریاضیات»]. **هرمان ویل**[3] (۱۸۸۵-۱۹۵۵) ریاضیدان آلمانی، در کتاب «داوید هیلبرت و کارهای ریاضی او» می‌نویسد: «یکی از کارهای هیلبرت این بود که ساختمان هندسه را بر بنیان دیگری به جز آنچه تا آن روزگار بود، قرار داد و در نتیجه، ساختاری محکم برای آن به وجود آورد. اگر من اشتباه نکنم، هیلبرت نخستین کسی بود که به این سطح از کار رسید. او به طور منظم، اصل موضوع‌هایی را که به هم مربوط نبودند، بررسی کرد و بی‌ارتباطی برخی قضیه‌های اساسی هندسی را به این یا آن اصل موضوع روشن کرد.»

در زمینه‌ی هندسه‌ی مقدماتی این امکان وجود دارد که ماهیت اختلاف بین ریاضیات نظری رسمی را با ریاضیات نظری از نوع دینامیک دقیق‌تر کنیم. این اختلاف برای هندسه‌ی مقدماتی هندسه‌ی مقدماتی روشن‌تر است. هیلبرت در کتاب «بنیان‌های هندسه»ی خود (۱۸۹۹)، مسأله‌ی پیشرفت هندسه‌ی مقدماتی را، بدون ارتباط با اصل موضوع پیوستگی مطرح می‌کند. **پ. راشوسکی**، در کتاب «داوید هیلبرت و بنیان‌های هندسه» می‌گوید: «موفقیت عظیم هیلبرت در تجزیه و تحلیل منطقی هندسه این است که او، امکان پیشرفت هندسه را، بدون استفاده از اصل موضوع پیوستگی، کشف کرد». ساختار هندسه‌ی ارشمیدسی، به ساختار هندسه‌ی اقلیدسی نزدیک است.

هیلبرت در کار بعدی خود، «درباره‌ی بنیان‌گذاری هندسه» (۱۹۰۲)، همچون ساختار دینامیکی و با استفاده از اصل موضوع‌هایی که ساخت پیوستگی را هم در نظر گرفته بود. هیلبرت می‌نویسد: «می‌خواهم این مطلب را نشان دهم که اختلاف بین اصل موضوع‌های هندسی که پیشنهاد می‌کنم (در ۱۹۰۲)، با آنچه پیش از این داده بودم (۱۸۹۹)، چگونه است! قبلاً اصل موضوع‌ها را طوری تنظیم کرده بودم که اصل موضوع پیوستگی بعد از بقیه‌ی اصل موضوع‌ها باشد، تا این پرسش پیش آید که چه تعدادی از قضیه‌ها و اثبات‌های هندسه‌ی مقدماتی به مفهوم پیوستگی ربطی ندارند. برعکس در بررسی تازه، پرسش مربوط به پیوستگی، بین تعریف‌های صفحه و حرکت و پیش از همه‌ی اصول موضوع‌ها جا داده شده است، به نحوی که در این جا مهم‌ترین پرسش مربوط به کم‌ترین تعداد آن‌هاست تا بتوان در ادامه‌ی کار، از پیوستگی استفاده کرد و به هندسه‌ی مقدماتی رسید (دایره و خط راست) و به یاری آن‌ها، هندسه‌ی مقدماتی را در دنباله‌ی کار ساخت» [**داوید هیلبرت، در کتاب «بنیان‌های هندسه»**].

زیرنویس ....

1. Nezden
2. Peano
3. Weyl



با راهیان المپیادهای ریاضی

غلامرضا یاسی پور

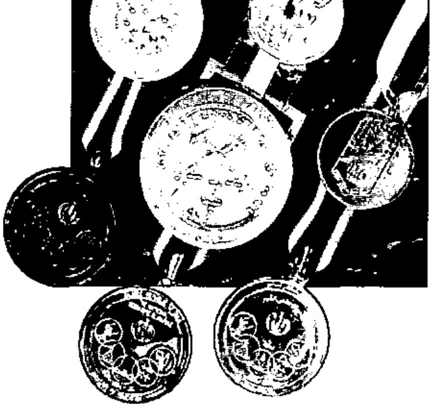
مقدمه

با توجه به مسابقات اُلمپیادی ریاضی و علاقه‌ی دانش‌آموزان به این نوع مسابقات برای آشنایی هرچه بیشتر دانش‌آموزان تصمیم گرفتیم مقاله هایی تهیه کنیم که آن‌ها را با نمونه های سؤالات و روش حلّ آن‌ها آشنا کند. به همین خاطر به تهیه‌ی متن حاضر پرداختیم که به ترتیب در این شماره و شماره های آینده چاپ خواهد شد.

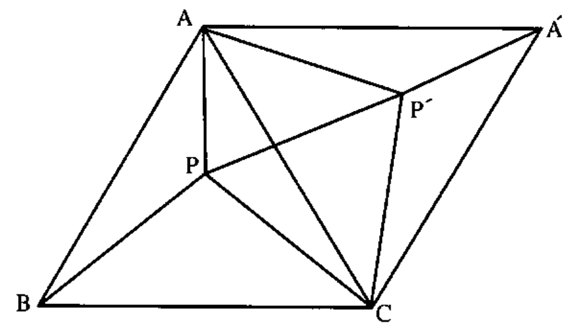
یکی از ویژگی‌های مثلث های متساوی الاضلاع

دو نقطه‌ی A و B مفروضند. اگر B را به اندازه‌ی 60° حول A، دوران دهیم تا نقطه‌ی B' به دست آید، مثلث ABB' متساوی الاضلاع است. پیامد این نتیجه، ویژگی یا خاصیت زیر در مثلث های متساوی الاضلاع است که پمپکیو[1]، ریاضیدان رومانیایی، در سال ۱۹۳۶ به آن توجه کرد. قضیه‌ی پمپکیو واقعیتی ساده است و بخشی از هندسه‌ی مسطحه‌ی کلاسیک به شمار می‌رود. شگفت‌آور است که این قضیه نه توسط اویلر[2] در قرن هجدهم و نه توسط اشتینیتس[3] در قرن نوزدهم کشف شد.

با مفروض بودن مثلث متساوی الاضلاع ABC و نقطه‌ی P غیرواقع بر محیط دایره‌ی محیطی ABC، می‌توان مثلثی با ضلع هایی به طول‌های PA، PB و PC رسم کرد. اگر P بر محیط دایره‌ی مزبور واقع شود، یکی از این سه اندازه برابر مجموع دو اندازه‌ی دیگر است.



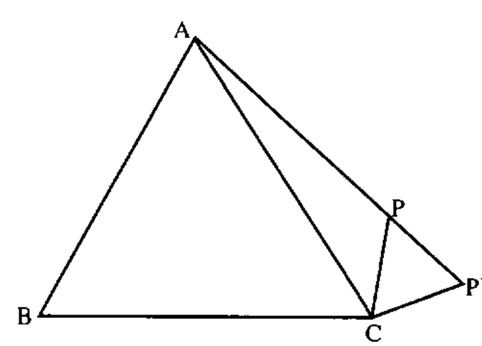
برای ملاحظه‌ی چگونگی برقراری این خاصیت، مثلث را به اندازه‌ی زاویه‌ی ۶۰° و دورانی ساعتگرد، حول C دوران می‌دهیم (شکل ۱).



شکل ۱

فرض می‌کنیم A' و P' نگاره‌های A و P در این دوران باشند. توجه داشته باشید، B حول A دوران یافته است. با توجه به مثلث $PP'A$، ملاحظه می‌کنیم که ضلع $P'A$ نگاره‌ی PB در این دوران است، بنابراین: $P'A=PB$. نیز، مثلث $PP'C$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین $PP'=PC$. نتیجه می‌گیریم که ضلع‌های مثلث $PP'A$ برابر PA، PB و PC هستند.

اکنون موردی را بررسی می‌کنیم که مثلث $PP'A$ تباهیده است، یعنی موردی که در آن نقاط P، P' و A هم خط هستند (شکل ۲).



شکل ۲

در صورتی که چنین باشد، P درون مثلث مورد بحث نیست. از آن‌جا که A بر خط PP' قرار دارد و مثلث $PP'C$ متساوی‌الاضلاع است، زاویه‌ی APC برابر ۱۲۰° است البته اگر P بین A و P' باشد. در غیر این صورت برابر ۶۰° است. نتیجه می‌شود که A، P و P' هم خط هستند اگر و تنها اگر P بر محیط دایره‌ی محیطی واقع باشد. در این صورت، نتیجه می‌شود که A، P و P' هم خط هستند اگر و تنها اگر P بر محیط دایره‌ی محیطی قرار داشته باشد. در این حالت، $PA=PB+PC$ است، اگر P بر کمان BC باشد، $PB=PA+PC$ است اگر P بر کمان AC باشد و $PC=PA+PB$ است اگر P بر کمان AB باشد.

این خاصیت را می‌توان درباره‌ی جمیع چند ضلعی‌های منتظم توسیع داد. اما در اثبات این مطلب، از ایده‌ای متفاوت استفاده می‌شود. مسائل وابسته‌ی زیر را به عنوان تمرین در نظر بگیرید:

۱. عکس قضیه‌ی فوق را اثبات کنید؛ یعنی این مطلب را که اگر به ازای هر نقطه‌ی P واقع در داخل مثلث ABC بتوان مثلثی با ضلع‌هایی برابر PA، PB و PC رسم کرد، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۲. در مثلث ABC، AB بزرگ‌ترین ضلع است. ثابت کنید به ازای هر نقطه‌ی P واقع در داخل این مثلث: $PA+PB>PC$.

۳. مکان هندسی نقاط Pای را در صفحه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بیابید که در برابری زیر صدق می‌کنند:

$$\max\{PA,PB,PC\}=\frac{۱}{۲}(PA+PB+PC)$$

۴. فرض می‌کنیم ABCD یک لوزی است و $\angle A=۱۲۰^\circ$ و P نقطه‌ای در صفحه‌ی آن باشد. ثابت کنید:

$PA + PC > \frac{BD}{۲}$

۵. نقطه‌ی P داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع ABC چنان موجود است که : PC=۵ ، PB=۴ و PA=۳ طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را بیابید.

۶. فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد. مکان هندسی نقاط Pای را در صفحه‌ی آن با این خاصیت بیابید که PA ، PB و PC ضلع‌های مثلثی قائم‌الزاویه باشند.

۷. مثلث XYZ با ضلع‌هایی به طول‌های x ، y و z مفروض است. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطه‌ی P ای را چنان رسم کنید که : PA=x ، PB=y و PC=z

۸. فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و P نقطه‌ای درون آن باشد. مثلث XYZ با XY=PC ، YZ=PA و ZX=PB و نقطه‌ی M را درون آن چنان در نظر می‌گیریم که

$\angle XMY = \angle YMZ = \angle ZMX = ۱۲۰^\circ$

ثابت کنید : XM+YM+ZM=AB

۹. مکان هندسی نقاط Pای واقع در صفحه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را چنان بیابید که به ازای آن‌ها مثلث ساخته شده با PA ، PB و PC دارای سطحی ثابت باشد.

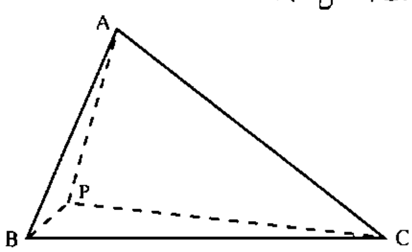
حل تمرین‌ها

۱. ایده‌ی این مسأله، ملاحظه‌ی پدیده‌ای است که در همسایگی یک رأس رخ می‌دهد. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی باشد که متساوی‌الاضلاع نیست و می‌انگاریم که AB<BC . همچنین فرض می‌کنیم : a=BC − AB

P را داخل ABC چنان اختیار می‌کنیم که :

$PB < \frac{a}{۴}, PA - AB < \frac{a}{۴}\ ,\ BC - PC < \frac{a}{۴}$

این کار به علت پیوستگی تابع فاصله امکان‌پذیر است(شکل ۳).



شکل ۳

داریم : $PA+PB<AB+\frac{a}{۲}=BC-\frac{a}{۲}<BC-\frac{a}{۴}<PC$

در نتیجه PA ، PB و PC در نابرابری مثلثی صدق نمی‌کنند. بنابراین نمی‌توانند اضلاع مثلث باشند. این مطلب نشان می‌دهد، مثلثی که متساوی‌الاضلاع نباشد، دارای ویژگی مطلوب نیست.

۲. فرض می‌کنیم D محل تقاطع PC با AB باشد. در این صورت یکی از زاویه‌های ADC یا BDC منفرجه است؛ مثلاً زاویه‌ی ADC . در این صورت، در مثلث ADC ، AC>CD . از آن‌جا که AB ≥ AC ، نتیجه می‌شود که AB>CP . از طرف دیگر، بنابر نابرابری مثلثی PA+PB>AB ، نتیجه می‌شود که : PA+PB>PC.

۳. برابری $\max\{PA, PB, PC\} = \frac{۱}{۲}(PA + PB + PC)$ هم‌ارز این واقعیت است که یکی از قطعه‌های PA ، PB و PC برابر مجموع دو قطعه‌ی دیگر است. این واقعه، چنانچه پیش از این ملاحظه کردیم، اگر و تنها اگر P بر محیط دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد، اتفاق می‌افتد.

۴. با به کار بردن قضیه‌ی پمپکیو در مثلث‌های ABC و ACD حاصل می‌کنیم:

$PA + PC \ge PB \quad , \quad PA + PC \ge PD$

از نابرابری مثلثی در مثلث (امکاناً تباهیده‌ی) PBD به دست می‌آوریم:

$PB + PD \ge BD$

و نتیجه می‌شود که:

$PA + PC \ge BD / ۲$

برای برقرار بودن برابری، P باید هم‌زمان بر محیط دایره‌های محیطی ABC و ACD و قطعه خط BD واقع باشد که این موضوع غیرممکن است. در نتیجه نابرابری اکید برقرار است.

۵. دورانی ۶۰° و ساعتگرد، حول A انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم P' نگاره‌ی P در این دوران باشد. از آن‌جا که:

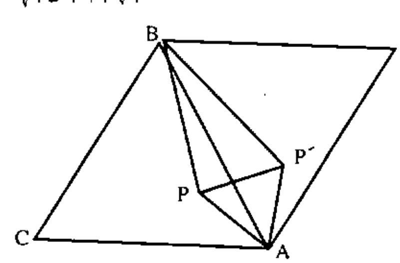
$BP' = CP = ۵$ و $PP' = AP = ۳$

$PP'B$ مثلثی قائم‌الزاویه (شکل۴) با $\angle BPP' = ۹۰^\circ$ است. همچنین در مثلث متساوی‌الاضلاع $AP'P$، اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle P'PA$ برابر ۶۰° است. در نتیجه $\angle APB = ۱۵۰^\circ$. با به کار بردن قاعده‌ی کسینوس‌ها در مثلث APB، به دست می‌آوریم:

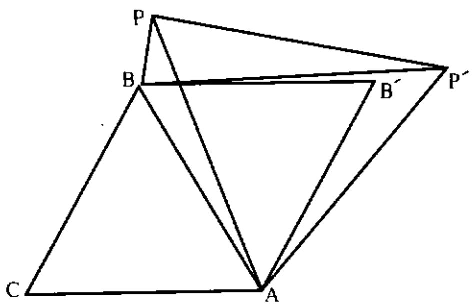
$AB^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} + ۲.۳.۴.\sqrt{۳} / ۲$

در نتیجه:

$AB = \sqrt{۲۵ + ۱۲\sqrt{۳}}$



شکل ۴



شکل ۵

۶. نخست فرض می‌کنیم PC وتر باشد. اگر P داخل مثلث باشد، مانند راه‌حل مسأله‌ی پیشین نتیجه می‌گیریم که $PP'B$ مثلثی قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر: $\angle APB = ۱۵۰^\circ$

اگر P، آن‌گونه که در شکل ۵ نشان داده شده است، خارج مثلث باشد، پس $\angle BPP' = ۹۰^\circ$؛ اگر و تنها اگر: $\angle BPA = ۳۰^\circ$، زیرا:

$\angle BPA = \angle BPP' - \angle APP' = \angle BPP' - ۶۰^\circ$

بنابراین مکان مورد نظر، دایره‌ای با مرکزی در خارج مثلث ABC است که در آن AB کمانی ۶۰° را معین می‌کند.

در حالت‌هایی که PA، و متناظراً PB، وتر هستند، دو دایره‌ی دیگر، همنهشت با این دایره، و متناظر با ضلع‌های BC و CA به دست می‌دهند.

۷. این مسأله ترسیم عکس مسأله‌ای است که در نخستین قسمت مقاله توصیف شده است. بار دیگر از دوران‌های ۶۰° استفاده می‌کنیم.

در صورتی که فرض کنیم: $A = X, \; P = Y, \; P' = Z$

می‌توان C را با دوران ۶۰° و ساعتگرد P' حول P به دست آورد (شکل ۱). در این صورت، B از دوران ۶۰° و ساعتگرد C حول A به دست می‌آید.

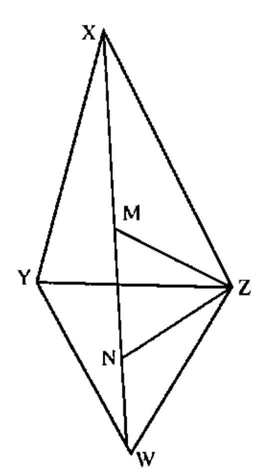
۸ . ZMY را حول Z به اندازه‌ی 60° و **پادساعتگرد** به ZNW دوران می‌دهیم (شکل ۶) . نخست توجه می‌کنیم که مثلث‌های ZMN و zYw متساوی‌الاضلاع هستند . در نتیجه :

MN=ZM , YW=YZ

اما چون هر دو زاویه‌های XMN و MNW، $60^\circ + 120^\circ$ هستند، نیم صفحه‌اند، بنابراین :

XW=XM+YM+ZM

از طرف دیگر، چون در راه‌حل مسأله‌ی ۷، هنگامی که ترسیمی به قهقرا، مثلث ABC را از مثلث XYZ می‌دهد، می‌توان A=W و C=X را اختیار کرد . در این صورت، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بحث XW است که برابر XM+YM+ZM است (صورتی دیگر از این مسأله در USAMO در سال ۱۹۷۴ آمده است) .



شکل ۶

۹ . ثابت می‌کنیم که مکان مورد نظر مجموعه‌ی تهی، یک دایره یا دو دایره به مرکزهای واقع در O، مرکز ثقل یا گرانیگاه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است .

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم سطح مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بحث برابر ۱ باشد، بنابراین طول ضلع آن $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ خواهد بود .

در مورد مثلث XYZ، سطح علامتدار[۴] آن با S[xyz] نمایش داده می‌شود . (بنابر تعریف، S[XYZ] سطح مثلث XYZ است، اگر مثلث به طور مثبت جهت دار شده باشد؛ یعنی اگر از X به Y، Y به Z، و Z به X برویم و پادساعتگرد گردش کرده باشیم، و در غیر این صورت، منفی سطح آن خواهد بود .) از بخش اول، شکل ۱ را، با A' و P' نگاره‌های A و P در دوران 60° و ساعتگرد حول C، به خاطر بیاورید . در این صورت، APP' مثلثی با طول‌های ضلع PA، PB و PC خواهد بود .

قرار می‌دهیم :

$$S[PBC] = K_1, \quad S[PCA] = K_2, \quad S[PAB] = K_3$$

و تمام محاسبات را برحسب این سه عدد انجام می‌دهیم (یعنی از مختصات گرانیگاهی «Barycentric coordinates» استفاده می‌کنیم) . مثلث‌های APB و $A'P'A$ همنهشت هستند . مثلث‌های $A'P'C$ و APC نیز چنین هستند . در نتیجه :

$$S = [APP'] = 2S[ABC] - 2K_3 - K_1 - K_2 - S[P'PC]$$
$$= 1 - K_3 - S[P'PC]$$

$S[P'PC]$ را برحسب K_1، K_2 و K_3 محاسبه می‌کنیم . توجه داشته باشید، از آن‌جا که دوران را ساعتگرد انجام داده‌ایم، مثلث $P'PC$ به طور مثبت جهت‌دار است . چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، محاسبه‌ی طول یکی از ضلع‌هایش، مثلاً ضلع PC، کافی است . فرض می‌کنیم $\angle PCB = \alpha$ و از سطح S[PBC] و S[APC] برای به دست آوردن $\sqrt[4]{3}K_2 = PC.\sin(60^\circ - \alpha)$ و $\sqrt[4]{3}K_1 = PC.\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم .

فرمول تفاضل مربوط به سینوس، همراه با برابری اول، دومی را به مورد زیر تبدیل می‌کند:

$$\sqrt[4]{3}K_2 = PC\sin 60^\circ \cos\alpha - PC\cos 60^\circ \sin\alpha$$
$$= PC\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt[4]{3}}{2}K_1$$

در نتیجه:

$$PC\cos\alpha = (2K_2 + K_1)/\sqrt[4]{3}$$

و به دست می‌آوریم:

$$PC^2 = PC^2\sin^2\alpha + PC^2\cos^2\alpha = K_1^2\sqrt{3} + (2K_2 + K_1)^2/\sqrt{3}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}(K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)$$

نتیجه می‌شود که سطح $P'PC$ برابر است با:

$$K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2$$

در نتیجه:

$$S[APP'] = 1 - K_3 - (K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2) = (K_1 + K_2 + K_3)^2$$
$$- K_3(K_1 + K_2 + K_3) - (K_1^2 + K_1K_2 + K_2^2)$$
$$= K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3$$

پس، فاصله‌ی P از O، یعنی مرکز مثلث مورد بحث، را برحسب K_1، K_2 و K_3 بیان می‌کنیم. برای این کار، از رویکرد برداری «Vectorial approach» استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که:

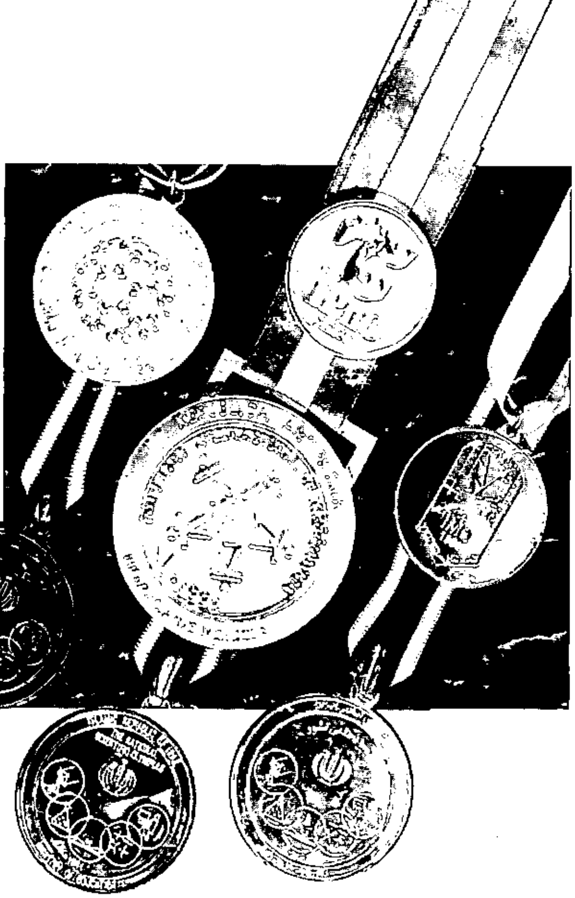
$$\vec{OP} = K_1\vec{OA} + K_2\vec{OB} + K_3\vec{OC}$$

در واقع، برابری در مورد P در یکی از رأس‌ها یا در مرکز مثلث برقرار است و از آن‌جا که دو طرف آن در P خطی هستند، در همه‌جا برقرار است.

رابطه‌ی مزبور با مربع شدن، به صورت زیر در می‌آید:

$$OP^2 = \vec{OP}.\vec{OP} = (K_1^2OA^2 + K_2^2OB^2 + K_3^2OC^2$$
$$+ 2K_1K_2\,\vec{OP}.\vec{OB} + 2K_1K_3\,\vec{OA}.\vec{OC} + 2K_2K_3\,\vec{OB}.\vec{OC})$$

این مقدار، از آن‌جا که جمیع زاویه‌های AOB، AOC،



و BOC برابر 120° هستند و OA=OB=OC، برابر مقدار زیر می‌شود:

$$(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 - K_1K_2 - K_1K_3 - K_2K_3)OA^2$$
$$= \left((K_1 + K_2 + K_3)^2 + 3(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)\right)OA^2$$
$$= \left(1 - 3(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)\right)OA^2$$

در نتیجه، شرط این که سطح مثلث APP' ثابت باشد، همان شرط ثابت بودن مسافت OP است. اگر سطح مورد بحث، Kای کم‌تر از $\frac{1}{3}$ باشد، مکان مورد نظر شامل دو دایره می‌شود: یکی داخل و دیگری خارج دایره‌ی محیطی مثلث. اگر سطح مزبور $\frac{1}{3}$ باشد، مکان شامل یک دایره و O است. سرانجام، اگر سطح ثابت مورد بحث بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ باشد، مکان یک دایره است.

ادامه دارد

زیرنویس

1. D.Pompeciu
2. Euler
3. Steinitz
4. signed area

منبع

Mathematical Olympiad Challenges
Titu Andreescu
Rŏzvan Gelca

اتحادهای مثلثاتی

احمد قندهاری

هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقدارهای متغیر یا متغیرهای تعریف شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود.

اتحادهای مثلثاتی معمولاً به سه روش قابل حل هستند:

روش اول: یکی از دو طرف اتحاد مثلثاتی را که مفصل‌تر است، با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطه‌های دیگر جبری و مثلثاتی، آن قدر تغییر می‌دهیم تا به طرف دیگر برسیم.

مسأله‌ی ۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$(\cot a-۱)^{۲}+(\cot a+۱)^{۲}=\frac{۲}{\sin^{۲} a}$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=(\cot a-۱)^{۲}+(\cot a+۱)^{۲}$$

$$=\cot^{۲} a-۲\cot a+۱+\cot^{۲} a+۲\cot a+۱$$

$$=۲\cot^{۲} a+۲$$

$$=۲(۱+\cot^{۲} a)$$

$$=۲\left(\frac{۱}{\sin^{۲} a}\right)=\frac{۲}{\sin^{۲} a}$$

مسأله‌ی ۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{۱-۲\cos^{۲} a}{\sin a\cos a}=\tan a-\cot a$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{۱-۲\cos^{۲} a}{\sin a.\cos a}$$

$$=\frac{۱-\cos^{۲} a-\cos^{۲} a}{\sin a.\cos a}$$

$$=\frac{\sin^{۲} a-\cos^{۲} a}{\sin a.\cos a}$$

$$=\frac{\sin^{۲} a}{\sin a.\cos a}-\frac{\cos^{۲} a}{\sin a\cos a}$$

$$=\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\cos a}{\sin a}=\tan a-\cot a$$

مسأله‌ی ۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\cos^{۴}\alpha+\cos^{۲}\alpha.\sin^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha+\tan^{۲}\alpha}=\cos^{۲}\alpha$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{۱}{\cos^{۴}\alpha+\cos^{۲}\alpha.\sin^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha+\tan^{۲}\alpha}$$



برای
دانش‌آموزان
سال دوم

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1}) + \sin^2\alpha + \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} + \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$$

مسأله‌ی ۴. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\cos\alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha) = 0$$

حل: عبارت سمت چپ را حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \cos\alpha + \cos(\pi + \alpha - 60^\circ) + \cos(\pi + \alpha + 60^\circ) =$$

$$= \cos\alpha - \cos(\alpha - 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ)$$

$$= \cos\alpha - \left[\cos(\alpha + 60^\circ) + \cos(\alpha - 60^\circ)\right]$$

$$= \cos\alpha - [2\cos\frac{\alpha + 60^\circ + \alpha - 60^\circ}{2} \times \cos\frac{\alpha + 60^\circ - \alpha + 60^\circ}{2}]$$

$$= \cos\alpha - 2\cos\alpha.\cos 60^\circ$$

$$= \cos\alpha - 2\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\alpha - \cos\alpha = 0$$

روش دوم: فرض می‌کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌های مثلثاتی و اعمال جبری آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به دو مقدار مساوی برسیم.

مسأله‌ی ۵. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{2 - \sin 2\alpha}{2}$$

حل: فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد. آن را طرفین وسطین می‌کنیم:

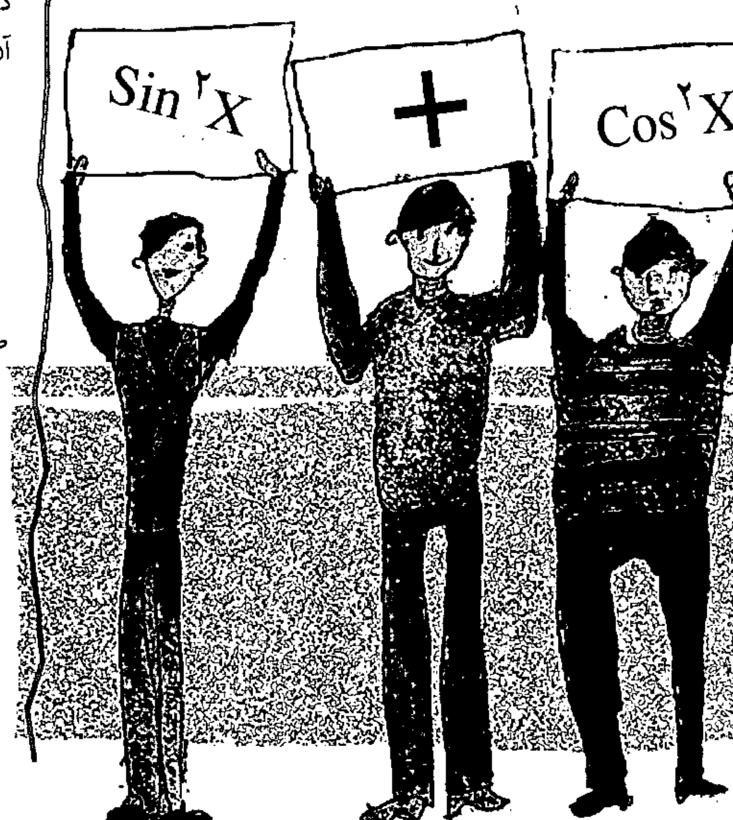
$$2(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)(2 - \sin 2\alpha)$$

توجه:
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$2(\sin\alpha + \cos\alpha)(\underbrace{\sin\alpha^2 + \cos^2\alpha}_{1} - \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(2 - 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$2(1 - \sin\alpha\cos\alpha) = 2(1 - \sin\alpha.\cos\alpha)$$



مسأله‌ی ۶ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$۲(۱+\cos\alpha)-\sin^۲\alpha=۴\cos^۴\frac{\alpha}{۲}$$

حل : فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد :

$$۲\left(۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\right)-\sin^۲\alpha=۴\cos^۴\frac{\alpha}{۲}$$

$$۴\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-(\sin\alpha)^۲=۴\cos^۴\frac{\alpha}{۲}$$

$$۴\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-\left(۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\right)^۲=۴\cos^۴\frac{\alpha}{۲}$$

$$۴\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-۴\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}=۴\cos^۴\frac{\alpha}{۲}$$

$$۴\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\left(۱-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\right)=۴\cos^۴\frac{\alpha}{۲}$$

چون : $۱-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}=\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$

بنابراین داریم : $\cos^۲\frac{\alpha}{۲}=\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$

روش سوم : با نوشتن روابط مناسب و با به کارگیری فرمول‌های مثلثاتی، صورت مسأله را می‌سازیم.

مسأله‌ی ۷. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin x}{۱-\cos x}+\frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{۲\sin x}{۱-\cos x}$$

حل : به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

$$۲\sin x=۲\sin x$$

دو طرف این تساوی را بر $۱-\cos x\neq ۰$ تقسیم می‌کنیم :

عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{۲\sin^۲ x}{\sin(۱-\cos x)}=\frac{۲\sin x}{۱-\cos x}$$

$$\frac{\sin^۲ x+\sin^۲ x}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{۲\sin x}{۱-\cos x}$$

کسر سمت چپ را تفکیک می‌کنیم :

$$\frac{\sin^۲ x+(۱-\cos^۲ x)}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{۲\sin x}{۱-\cos x}$$

$$\frac{\sin^۲ x}{\sin x(۱-\cos x)}+\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{۲\sin x}{۱-\cos x}$$

در نتیجه :

$$\therefore\ \frac{\sin x}{۱-\cos x}+\frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{۲\sin x}{۱-\cos x}$$

مسأله‌ی ۸ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\cos^۲ a+۲\sin^۲ a+\sin^۲ a.\tan^۲ a=\frac{۱}{\cos^۲ a}$$

حل :

$$\text{عبارت سمت چپ}=\underbrace{\cos^۲ a+\sin^۲ a}_{۱}+\sin^۲ a+\sin^۲ a.\tan^۲ a$$

$$=۱+\sin^۲ a(۱+\tan^۲ a)$$

$$=۱+\sin^۲ a\left(\frac{۱}{\cos^۲ a}\right)$$

$$=۱+\frac{\sin^۲ a}{\cos^۲ a}=۱+\tan^۲ a=\frac{۱}{\cos^۲ a}$$

مسأله‌ی ۹ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{(a^۲-b^۲)\cot(\pi-\alpha)}{\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)}+\frac{(a^۲+b^۲)\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)}{\cot(\pi-\alpha)}=-۲\alpha^۲$$

حل :

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{(a^۲-b^۲)(-\cot\alpha)}{\cot\alpha}+\frac{(a^۲+b^۲)\cot\alpha}{-\cot\alpha}$$

$$=-(a^۲-b^۲)-(a^۲+b^۲)=-a^۲+b^۲$$
$$-a^۲-b^۲=۲a^۲$$

مسأله‌ی ۱۰ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{۲\sin a-\sin ۲a}{۲\sin a+\sin ۲a}=\tan^۲\frac{a}{۲}$$

حل :

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{۲\sin a-۲\sin a\cos a}{۲\sin a+۲\sin a\cos a}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{2\sin a(1-\cos a)}{2\sin a(1+\cos a)} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \tan^2\frac{a}{2}$$

مسأله‌ی ۱۱ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)} = \sin 2a$$

حل :

داریم :

$$\begin{cases} \tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q} \\ \tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} \end{cases}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a-\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a+\frac{\pi}{4}-a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin 2a}{1}}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}} = \frac{\sin 2a}{1} = \sin 2a$$

مسأله‌ی ۱۲ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin 2a.\cos a}{(1+\cos 2a)(1+\cos a)} = \tan\frac{a}{2}$$

حل :

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{2\sin a.\cos a.\cos a}{(2\cos^2 a)\left(2\cos^2\frac{a}{2}\right)} = \frac{2\sin a.\cos^2\frac{a}{2}}{2\cos^2 a\left(2\cos^2\frac{a}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin a}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \tan\frac{a}{2}$$

مسأله‌ی ۱۲ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

حل : داریم :

$$a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \Big(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}\Big)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$= 1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1-2\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^2$$

$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

نتیجه‌ی ۱ :

$$\boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}$$

مسأله‌ی ۱۳ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

حل : داریم :

$$a^6+b^6 = (a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)$$

و :

$$a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

پس :

$$a^6+b^6 = (a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)^2-3a^2b^2\right]$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \Big(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}\Big)\times$$

$$\left[\Big(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}\Big)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right]$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-3(\sin\alpha\cos\alpha)^2$$

$$= 1-3\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^2$$

$$= 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

نتیجه‌ی ۲: $\boxed{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}$

مسأله‌ی ۱۴ : درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$2(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)=\cos 2\alpha(1+\cos^2 2\alpha)$$

حل: داریم:

$$a^8-b^8=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$$
$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\right]$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2(\cos^2 a-\sin^2 a)(\underbrace{\cos^2 a+\sin^2 a}_{1})\times$$
$$[(\underbrace{\cos^2 a+\sin^2 a}_{1})^2-2\cos^2 a.\sin^2 a]$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2(\cos 2\alpha)(1)\left[1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2\right]$$
$$=2\cos 2a\left[1-2\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^2\right]$$
$$=2\cos 2a\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2a\right)$$
$$=2\cos 2a\left[1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2a)\right]$$
$$=2\cos 2a\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2a\right]$$
$$=2\cos 2a\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2a\right]=\cos 2a(1+\cos^2 2a)$$

مسأله‌ی ۱۵ . درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\tan 9^\circ-\tan 27^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ=4$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=(\tan 81^\circ+\tan 9^\circ)-(\tan 63^\circ+\tan 27^\circ)$$

داریم: $\tan p+\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin(81^\circ+9^\circ)}{\cos 81^\circ\cos 9^\circ}-\frac{\sin(63^\circ+27^\circ)}{\cos 63^\circ.\cos 27^\circ}$$

توجه: $\cos 81^\circ=\sin 9^\circ,\quad \cos 63^\circ=\sin 27^\circ$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin 90^\circ}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{\sin 90^\circ}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}$$
$$=\frac{1}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{1}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ}$$
$$=\frac{2}{2\sin 9^\circ\cos 9^\circ}-\frac{2}{2\sin 27^\circ\cos 27^\circ}$$
$$=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}$$
$$=\frac{2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}$$
$$=\frac{2\times 2\cos\frac{54^\circ+18^\circ}{2}\sin\frac{54^\circ-18^\circ}{2}}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}$$
$$=\frac{4\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{2\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}=\frac{4\sin 54^\circ}{\sin 54^\circ}=4$$

مسأله‌ی ۱۶ : درستی فرمول زیر را اثبات کنید:

$$\boxed{\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a}$$

حل: مانند یک اتحاد عمل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\sin 3a=\sin(2a+a)=$$
$$=\sin 2a\cos a+\cos 2a\sin a$$
$$=(2\sin a\cos a).\cos a+(1-2\sin^2 a)\sin a$$
$$=2\sin a\cos^2 a+\sin a-2\sin^3 a$$
$$=2\sin a(1-\sin^2 a)+\sin a-2\sin^3 a$$
$$=2\sin a-2\sin^3 a+\sin a-2\sin^3 a$$
$$=3\sin a-4\sin^3 a$$

مسأله‌ی ۱۷ . درستی فرمول زیر را ثابت کنید:

$$\boxed{\sin 3a=4\sin a\sin(60^\circ-a)\sin(60^\circ+a)}$$

حل: مانند یک اتحاد عمل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت راست}=4\sin a(\sin 60^\circ\cos a-\cos 60^\circ\sin a)\times$$
$$(\sin 60^\circ\cos a+\cos^2 60^\circ\sin^2 a)$$
$$=4\sin a(\sin^2 60\cdot\cos^2 a-\cos^2 60^\circ\sin a)$$
$$=4\sin a\left(\frac{3}{4}\cos^2 a-\frac{1}{4}\sin^2 a\right)$$

$$= 4\sin a\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sin^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a\right]$$

$$= 3\sin a - 3\sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha$$

بنابر مسأله‌ی ۱۶ :

$$= 3\sin a - 4\sin^3 a = \sin 3a$$

مسأله‌ی ۱۸ . درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = \frac{1}{16}$$

حل :

$$\text{عبارت سمت چپ} = \sin 10^\circ \left(\frac{1}{2}\right) \sin 50^\circ \sin 70^\circ \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \qquad \text{(I) رابطه‌ی}$$

در مسأله‌ی ۱۷ داشتیم :

$$\sin 3a = 4\sin a \sin(60^\circ - a)\sin(60^\circ + a)$$

فرض می‌کنیم : $a = 10^\circ$

$$\sin 30^\circ = 4\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = 4\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \Rightarrow \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

در رابطه‌ی (I) قرار می‌دهیم :

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16}$$

ادامه این مقاله را در شماره‌ی ۴۹ مجله ملاحظه خواهید کرد .



معماهای فکری و منطقی

در شهر پاریس، طی تابستان، مغازه‌ی کفش فروشی هر دوشنبه، مغازه‌ی ابزارفروشی هر سه‌شنبه، و مغازه‌ی سبزی‌فروشی هر پنجشنبه بسته است، و بانک تنها روزهای دوشنبه، چهارشنبه و جمعه باز است. یکشنبه‌ها هم تمام این مکان‌ها تعطیل هستند.

یک روز بعدازظهر، خانم A، خانم B، خانم C و خانم D با هم به خرید رفتند، در حالی که هر یک باید به مکانی متفاوت مراجعه می‌کردند. در بازگشتشان این صحبت‌ها بینشان رد و بدل شد :

خانم A : من و خانم D می‌خواستیم این هفته زودتر به خرید برویم، اما موقعیتی که هر دو بتوانیم کارمان را رها کنیم، پیش نیامد.

خانم B : نمی‌خواستم امروز بیایم، اما نمی‌توانستم فردا کاری را که باید انجام بگیرد، انجام بدهم.

خانم C : می‌توانستم دیروز و پریروز هم مثل امروز اقدام کنم.

خانم D : دیروز یا فردا مناسب کارم بود.

هر یک از این خانم‌ها نیاز به رفتن به کدام مکان داشته است؟



مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته

حمیدرضا امیری

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

شاید ساده‌ترین بیان برای تعریف فضاها یا مجموعه‌های پیوسته چنین باشد: فضای پیوسته به فضایی گفته می‌شود که اندازه‌گیری در آن، با شمارش امکانپذیر نباشد. در واقع، بعضی از فضاها برای اندازه‌گیری، مقیاس‌های اندازه‌گیری خاص خودشان را دارند و با همان مقیاس‌ها اندازه‌گیری می‌شوند؛ مثل: طول، سطح، حجم، وزن، زمان و... برای مثال، ما هیچ‌گاه نمی‌گوییم طول آن درخت چندتاست! یا سطح این اتاق چندتاست! بلکه اولی را با متر و دومی را با متر مربع، حجم را با متر مکعب وزن را با کیلوگرم و زمان را با ثانیه یا ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. به چنین فضاهایی، فضای پیوسته می‌گوییم.

واضح است که اگر پدیده‌هایی تصادفی در فضاهای پیوسته رخ بدهند، فرمول $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ به کار نمی‌آید، زیرا n(A) یعنی تعداد اعضای A و n(S) یعنی تعداد اعضای S و می‌دانیم که تعداد (شمارش) در فضاهای پیوسته بی‌معنی است. بنابراین، احتمال رخداد A در فضای پیوسته‌ی S بر حسب این‌که S فضایی طولی، سطحی، حجمی، وزنی یا زمانی باشد، به یکی از این صورت‌ها محاسبه می‌شود:

I) در فضاهای طولی $\rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}$

II) در فضاهای سطحی $\rightarrow P(A)=\frac{a_A}{a_S}$

III) در فضاهای حجمی $\rightarrow P(A)=\frac{V_A}{V_S}$

IV) در فضاهای وزنی $\rightarrow P(A)=\frac{w_A}{w_S}$

V) در فضاهای زمانی $\rightarrow P(A)=\frac{t_A}{t_S}$

در حل مسائل احتمال در فضاهای پیوسته، غالباً از اطلاعات دیگری در زمینه‌های جبر، هندسه و هندسه تحلیلی باید استفاده کنیم که همین موضوع، گاهی اوقات دانش‌آموزان را آزار می‌دهد. ولی اگر اطلاعات ما در زمینه‌های لازم (در حد مقدماتی) کافی باشد، حل مسائل احتمال در فضاهای پیوسته چندان مشکل نیست. سعی می‌کنم با طرح و حل مسائلی، تا حد امکان این مشکل را ساده کنم. در حل مسأله‌ها کوشش کرده‌ام، نکته‌ها و ظرافت‌های موجود را نیز تذکر دهم.

مسأله‌ی ۱. عددی (عدد حقیقی) به تصادف از بازه‌ی [۸ و ۶-] انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آن که عدد انتخاب شده:

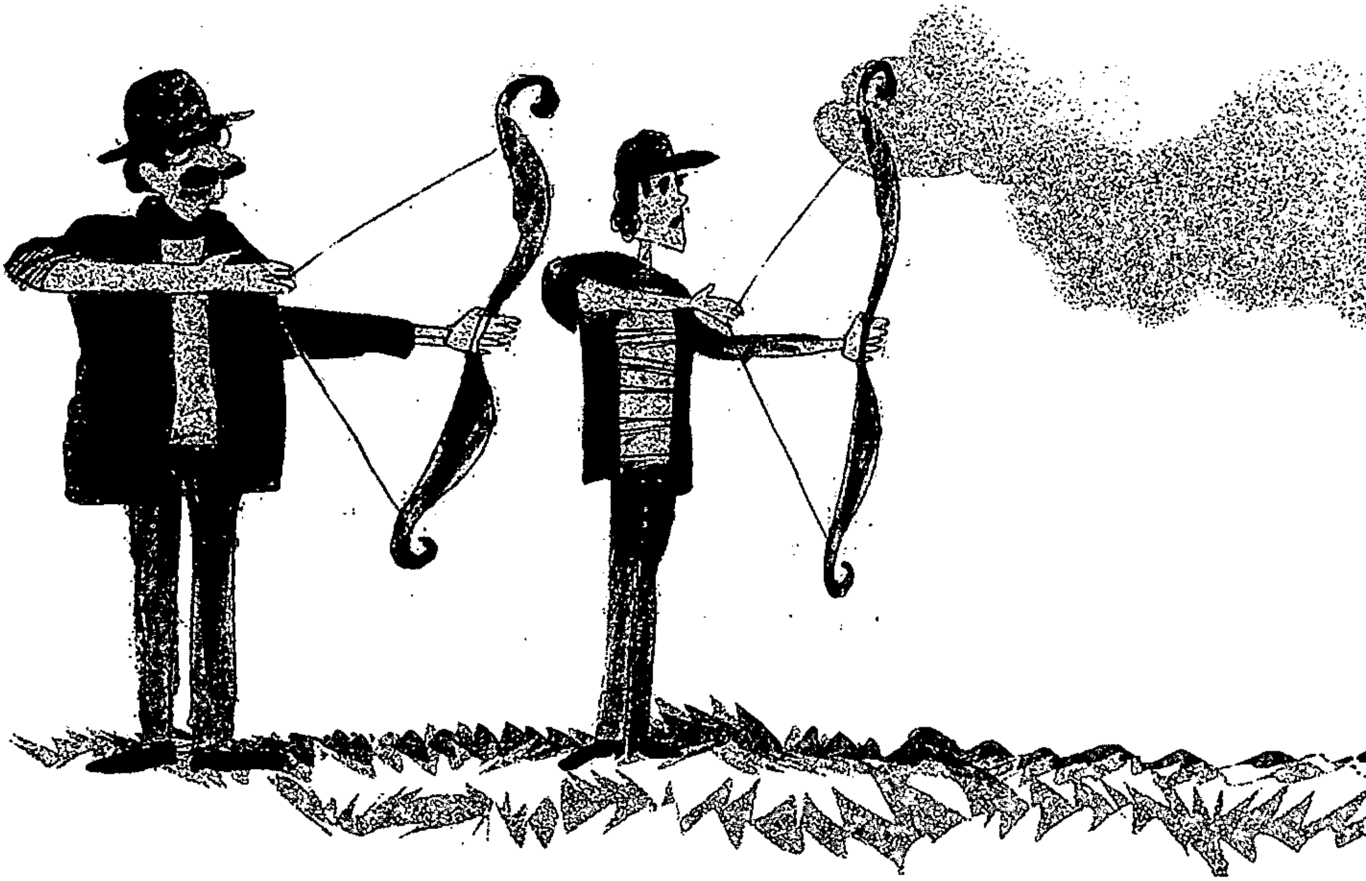
الف) مثبت باشد.

ب) بزرگ‌تر از ۵ باشد.

ج) بین ۱ و ۲ باشد.

د) صحیح باشد.

هـ) بین ۶- و ۸ باشد ($-6<x<8$).



حل: اگر فضای نمونه‌ای را S بنامیم، داریم:

$S = \{x \in \mathbb{R} | -۶ < x \leq ۸\}$

و می‌دانیم، بازه‌ها یا فاصله‌ها در اعداد حقیقی، مجموعه‌هایی پیوسته و دارای طول معینی هستند. همچنین می‌دانیم، نقطه یا مجموعه نقاط متناهی و یا حتی مجموعه نقاط نامتناهی ولی گسسته، دارای طول صفر هستند. برای مثال، طول مجموعه‌ی اعداد طبیعی یا طول مجموعه‌ی اعداد صحیح صفر است.

بنابراین، طول بازه‌ی [۸ و ۶-) برابر با ۱۴، و با طول بازه‌های (۸ و ۶-)، (۸ و ۶-] و [۸ و ۶-] برابر است. حتی طول مجموعه‌ی $(-۶,-۵) \cup (-۵,-۴) \cup \cdots \cup (۷,۸)$ نیز ۱۴ است. پس در این مسأله داریم:

$a_s = ۱۴$

الف) $A = \{x \in S | ۰ < x \leq ۸\} \Rightarrow l_A = ۸$

$\Rightarrow P(A) = \frac{۸}{۱۴} = \frac{۴}{۷}$

ب) $A = \{x \in S | ۵ < x \leq ۸\} \Rightarrow l_A = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۱۴}$

ج) $A = \{x \in S | ۱ < x < ۲\} \Rightarrow l_A = ۱ \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۱۴}$

د) $A = \{-۵,-۴,-۳,\ldots,۷,۸\} \Rightarrow l_A = ۰$

$\Rightarrow P(A) = \frac{۰}{۱۴} = ۰$

نظرتان در مورد قسمت (د) چیست؟

بله، احتمال این‌که از بازه‌ی [۸ و ۶-) عدد صحیح انتخاب شود، صفر است! البته مشاهده می‌کنید که مجموعه‌ی A دارای ۱۴ عضو است. شاید فکر کنید، حالا آمدیم و عدد صحیحی مانند ۵ انتخاب شد، آیا این امکان وجود دارد؟!

حل مسأله به احتمال صفر منتهی شد، یعنی احتمال رخداد این پیشامد صفر است و این در فضای پیوسته خیلی با فضای گسسته فرق دارد. از نظر شهودی، به‌دو طریق می‌توان به این ابهام پاسخ داد: اول این‌که ما می‌گوییم، احتمالِ رخداد صفر است. مثلاً وقتی حتی در فضای گسسته می‌گوییم، احتمال این که تاسی را بریزیم و عدد ۲ بیاید، $\frac{۱}{۶}$ است، یعنی چه؟ آیا به این معناست که اگر ۶ بار تاسی را بریزیم، حتماً باید یک بار ۲ بیاید؟ خیر، این‌طور نیست. در واقع، عدد $\frac{۱}{۶}$ به نوعی یک میانگین یا توقع ما از آمدن ۲ در ۶ بار پرتاب تاس است. بدین معنی که اگر تاسی را ۶ بار بریزیم و تعداد ۲ را در این شش بار پرتاب یادداشت کنیم، و این آزمایش (آزمایش ۶

بار ریختن تاس و یادداشت تعداد ۲ در هر آزمایش) را ۲۰ بار تکرار کنیم و در این ۱۲۰ بار ریختن تاس، تعداد روشدن‌های ۲، مثلاً مساوی با ۱۸ بار باشد، با تقسیم ۱۸ بر ۱۲۰ به کسر $\frac{۱۸}{۱۲۰}$ می‌رسیم. و اگر این آزمایش را ۵۰ بار تکرار کنیم و تعداد روشدن‌های ۲ را در این ۳۰۰ بار ریختن تاس یادداشت و بر ۳۰۰ تقسیم کنیم، به کسری می‌رسیم که این کسر کم‌کم به عدد $\frac{۱}{۶}$ میل خواهد کرد. و در نهایت، اگر تعداد آزمایش‌ها بی‌شمار باشد، مساوی با $\frac{۱}{۶}$ خواهد بود؟

پاسخ شهودی دیگر، نگاه ما به مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین ۶- و ۸ است که اگر این نگاه **حقیقی** باشد (بین هر دو عدد حقیقی، بی‌نهایت عدد حقیقی موجود است) و با این نگاه، یکی از این بی‌نهایت عدد را که ۱۴ تای آن‌ها صحیح است انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد، عدد صحیح انتخاب شود؟!

تذکر مهم: در فضاهای پیوسته، از $P(A)=۰$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A=\phi$ و از $P(A)=۱$، نمی‌توان نتیجه گرفت که: $A=S$.

د) $A=\{x\in S|-۶<x<۸\}\Rightarrow l_A=۱۴\Rightarrow P(A)=\frac{۱۴}{۱۴}$

(دیدیم که $P(A)=۱$، ولی $A\neq S$)

مسأله‌ی ۲. دو عدد x و y را به تصادف از بازه‌ی (۴ و ۰) انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد:

الف) مجموع دو عدد کوچک‌تر از ۳ باشد.

ب) مجموع دو عدد بین ۲ و ۴ باشد.

ج) مجموع دو عدد مساوی با ۴ باشد.

د) فاصله‌ی دو عدد (قدر مطلق تفاضل آن‌ها) کوچک‌تر از ۳ باشد.

هـ) حداقل یکی از دو عدد بزرگ‌تر از ۳ باشد.

حل: چون هم x و هم y از بازه‌ی (۴ و ۰) انتخاب می‌شوند، پس می‌توان فضای نمونه‌ای را به صورت زیر تعریف کرد:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲|۰<x<۴,۰<y<۴\}=(۰,۴)\times(۰,۴)$$

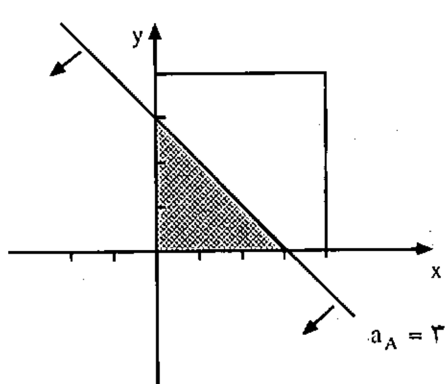
واضح است که مجموعه‌ی S دارای سطح است که همان سطح مربعی است به طول ضلع ۴ و مساحت S برابر است با: $۱۶=۴^۲$؛ یعنی $a_S=۱۶$.

الف) باید مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x+y<۳$ را که یک نیم صفحه است، مشخص کنیم، سپس اشتراک آن را با S به دست آوریم و مساحت این فصل مشترک را بر مساحت S تقسیم کنیم.

تذکر مهم: برای مشخص کردن مجموعه‌ی جواب نامعادلاتی به صورت $ax+by>c$ یا $ax+by<c$، کافی است نمودار خط $ax+by=c$ را رسم کنیم و نقطه‌ای دلخواه را از یکی از دو نیم صفحه‌ای که خط در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ ایجاد کرده است، در نظر بگیریم و مختصات آن را در نامعادله قرار دهیم. اگر صدق کند، همان نیم صفحه‌ای که شامل آن نقطه است، مجموعه‌ی جواب را تشکیل می‌دهد و اگر صدق نکند، نیم صفحه‌ی دیگر، مجموعه‌ی جواب است.

صدق می‌کند $۳>۰+۰\Leftarrow$ نقطه اختیاری $\left|\begin{smallmatrix}۰\\۰\end{smallmatrix}\right.$

(منطقه‌ی جواب با پیکان مشخص شده است.)

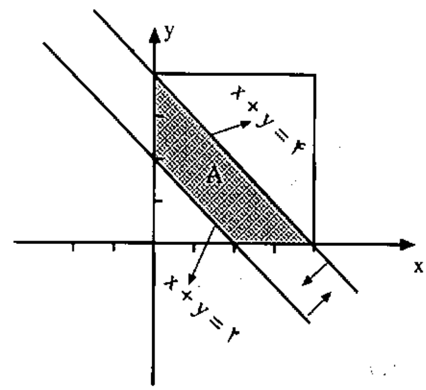


$$a_A=۳\times۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

$$P(A)=\frac{\frac{۹}{۲}}{۱۶}=\frac{۹}{۳۲}$$

ب) در این قسمت باید $۲<x+y<۴$ باشد که به حل دو نامعادله‌ی $x+y<۴$ و $x+y>۲$ می‌انجامد. از اشتراک مجموعه جواب‌های این دو نامعادله با S باید اشتراک گرفته

شود و مساحت حاصل را به دست آوریم:



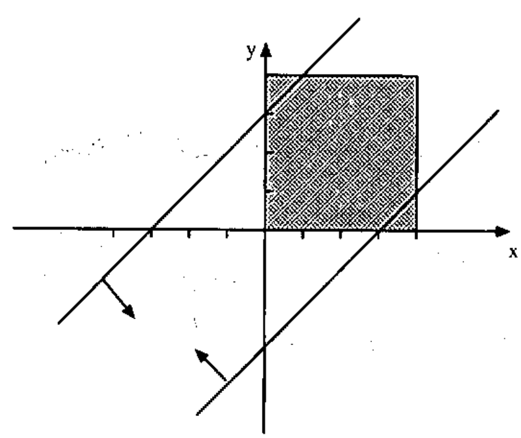
$S = ۱۶ - ۸ - ۲ = ۶$ (مساحت ذوزنقه)

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

(مساحت دو مثلث را از مساحت مربع کم کردیم تا مساحت ذوزنقه به دست آید.)

ج) باید مجموع دو عدد مساوی با ۴ باشد؛ یعنی $x+y=۴$ که اشتراک این خط با مربع، پاره‌خطی با مساحت صفر است و در نتیجه: $P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۰}{۱۶} = ۰$

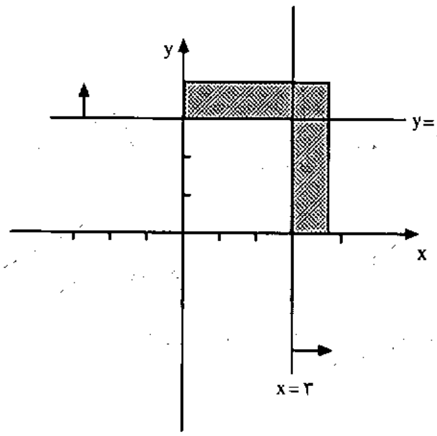
د) باید $|x - y| < ۳$ باشد. این نامعادله به دو نامعادله‌ی $-۳ < x - y < ۳$ یا $x - y < ۳$ و $x - y > -۳$ می‌انجامد که روی شکل مشخص کرده‌ایم:



$$a_A = ۱۶ - (۱ \times ۱ \times \frac{۱}{۲}) - (۱ \times ۱ \times \frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow a_A = ۱۶ - ۱ = ۱۵ \Rightarrow P(A) = \frac{۱۵}{۱۶}$$

هـ) طبق فرض باید $x>۳$ یا $y>۳$ باشد که باید از اجتماع دو مجموعه جوابِ نامساوی‌ها با S، اشتراک گرفته شود:

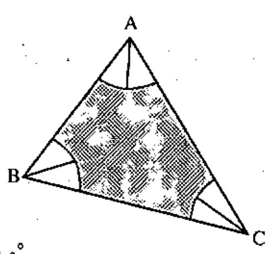


مساحت منطقه‌ی هاشور خورده $= a_A = ۱۶ - ۹ = ۷$

$$P(A) = \frac{۷}{۱۶}$$

مسأله‌ی ۳. اگر نقطه‌ای به تصادف از داخل سطح مثلثی با مساحت K انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد فاصله‌ی این نقطه تا هر یک از رأس‌های مثلث بیش‌تر از l باشد (طول هر ضلع مثلث بزرگ‌تر از ۲l است).

حل: ابتدا به مرکز هر یک از رأس‌ها و به شعاع l، دایره‌هایی می‌زنیم تا مطابق شکل، منطقه‌ی موردنظر و مطلوب را که قسمت هاشور خورده است، مشخص کنیم.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

مساحت دایره به شعاع l $\times \frac{۱}{۲} =$ مساحت سه قطاع

مساحت سه قطاع $= \frac{۱}{۲} \times \pi l^۲$

مساحت قسمت هاشور خورده $= K - \frac{\pi l^۲}{۲} \Rightarrow P(A) = \frac{K - \frac{\pi l^۲}{۲}}{K}$

$$\Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{\pi l^۲}{۲K}$$

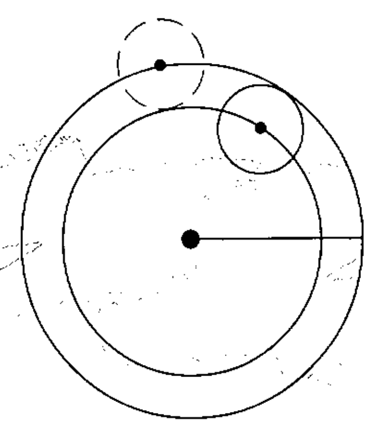
مسأله‌ی ۴ . سکه‌ای به شعاع ۲ را روی صفحه‌ی دایره‌ای شکل به شعاع ۸ پرتاب می‌کنیم . با فرض این که سکه به تمامی خارج صفحه قرار نگیرد، مطلوب است احتمال آن که :

الف) سکه به تمامی داخلِ صفحه واقع شود .

ب) سکه روی مرکز صفحه را بپوشاند .

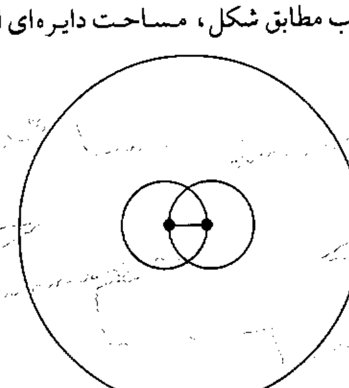
ج) فاصله ی مرکز سکه تا مرکز صفحه بیش‌تر از ۳ باشد .

حل : الف) مطابق شکل ، اگر دایره‌ای به شعاع ۶=۲-۸ و به مرکزِ صفحه رسم کنیم ، معلوم می‌شود : در صورتی که مرکز سکه خارج دایره‌ی رسم شده واقع شود ، سکه حتماً محیط صفحه را قطع می‌کند . پس منطقه‌ی جواب سطح دایره‌ای است به شعاع ۶ :



$$a_A = ۳۶\pi \Rightarrow P(A) = \frac{۳۶\pi}{۶۴\pi} = \frac{۳۶}{۶۴} = \frac{۹}{۱۶}$$

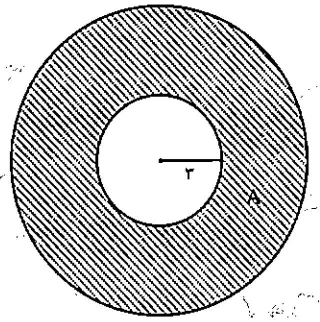
ب) برای این که سکه مرکز دایره را بپوشاند ، کافی است مرکز سکه داخلِ سطح دایره‌ای به شعـاع ۲ واقع شود . پس مساحت مطلوب مطابق شکل ، مساحت دایره‌ای است به شعاع ۲ :



$$a_A = ۴\pi \Rightarrow P(A) = \frac{۴\pi}{۶۴\pi} = \frac{۱}{۱۶}$$

(اگر مرکز سکّه روی محیط دایره‌ای به شعـاع ۲ واقـع شود ، سکه بر مرکز صفحه مماس می‌شود .)

ج) در این حالت ، مرکز سکه باید در خارج از دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز ، مرکز صفحه واقع شود که مطابق شکل ، قسمت هاشور خورده منطقه‌ی مطلوب است که آن را A می‌نامیم :



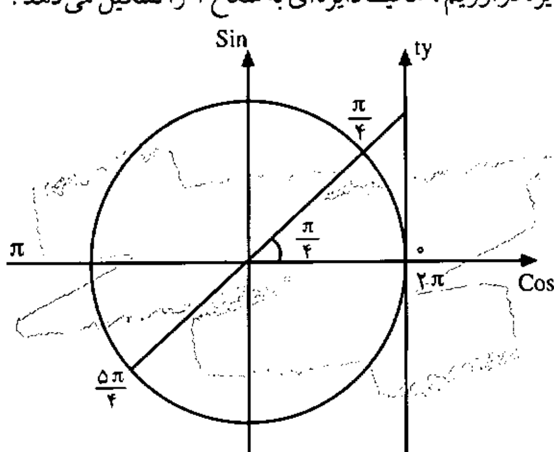
$$a_A = ۶۴\pi - ۹\pi = ۵۵\pi$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۵۵\pi}{۶۴\pi} = \frac{۵۵}{۶۴}$$

مسأله‌ی ۵ . عددی مانند x را به تصادف از بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ انتخاب می‌کنیم . مطلوب است احتمال آن که :

الف) $tgx \le ۱$ ؛ ب) $۰ < Sinx < \frac{۱}{۲}$ ؛ ج) $Cos\,x > \frac{۱}{۲}$

حل : چون یک عدد به تصادف از یک بازه انتخاب می‌کنیم ، پس فضای نمونه‌ای دارای طول است که همان طول بازه ، یعنی ۲π می‌باشد . و اگر این بازه را به صورت یک دایره درآوریم ، محیط دایره‌ای به شعاع ۱ را تشکیل می‌دهد .

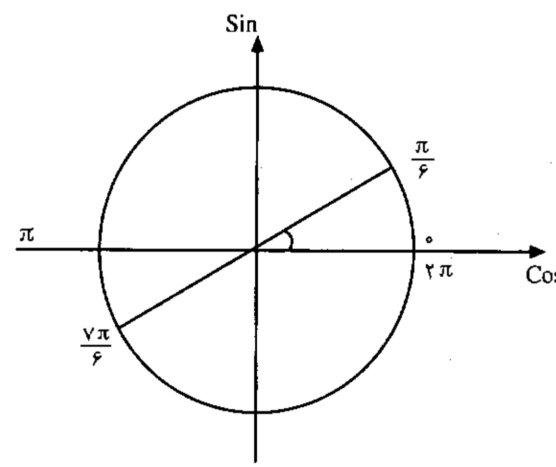


الف) اگر x در فاصله‌ی $[0,\frac{\pi}{4}]$ یا در فاصله‌ی $[\pi,\frac{5\pi}{4}]$ انتخاب شود، همواره $0 \le tg\,x \le 1$ ، و اگر در ناحیه‌ی دوم یا ناحیه‌ی چهارم انتخاب شود نیز، $tg\,x \le 1$ خواهد بود؛ زیرا در این دو ناحیه $tg\,x < 0$ است. پس:

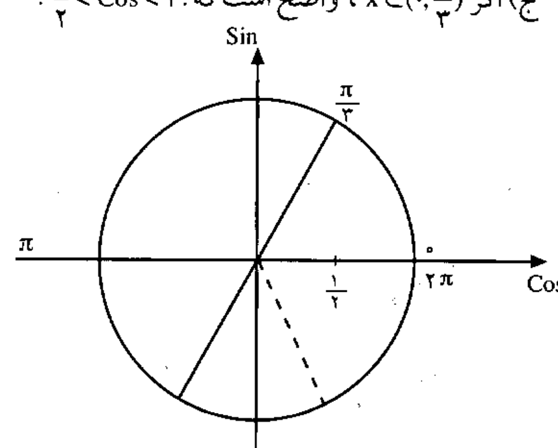
$$l_A = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi}=\frac{3}{4}$$

ب) برای آن‌که $0 < \sin x < \frac{1}{2}$ باشد، مطابق شکل، باید x از بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{6})$ یا $(\pi,\frac{7\pi}{6})$ انتخاب شود؛ پس:

$$l_A=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}\Rightarrow P(A)=\frac{\frac{2\pi}{6}}{2\pi}=\frac{1}{6}$$



ج) اگر $x\in(0,\frac{\pi}{3})$ ، واضح است که: $\frac{1}{2} < \cos < 1$.



و نیز اگر: $x\in(-\frac{\pi}{3},0)$ ، در این صورت: $\frac{1}{2} < \cos < 1$.

پس طول بازه‌ی موردنظر عبارت است از:

$$l_A=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow P(A)=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{3}$$

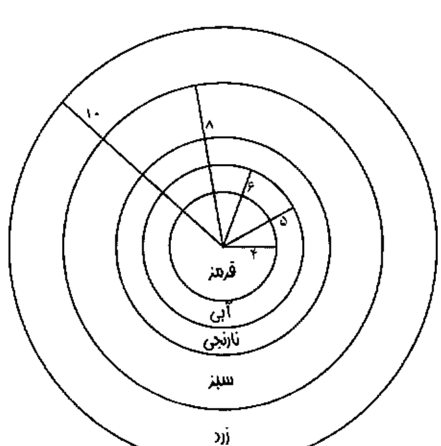
مسأله‌ی ۶. شخصی به سمت یک هدف دایره شکل مطابق نمودار زیر به طور تصادفی تیراندازی می‌کند. اگر قسمت قرمز رنگ ۱۰ امتیاز، قسمت آبی‌رنگ ۸ امتیاز، قسمت نارنجی رنگ ۶ امتیاز، قسمت سبز رنگ ۵ امتیاز و قسمت زرد رنگ ۴ امتیاز داشته باشد، در این صورت چه‌قدر احتمال دارد:

الف) با شلیک ۲ تیر حداقل ۱۶ امتیاز بگیرد.

ب) با شلیک ۳ تیر ۲۲ امتیاز بگیرد.

(فرض بر این است که هر تیر این شخص به صفحه‌ی دایره شکل اصابت می‌کند.)

حل: الف) حداقل ۱۶ امتیاز، یعنی ۱۶ امتیاز، یا ۱۸ امتیاز و یا ۲۰ امتیاز. به عبارت دیگر، برای این‌که ۱۶ امتیاز بگیرد، باید هر دو تیر او به منطقه‌ی ۸ امتیازی، یا یک تیر به منطقه‌ی ۱۰ امتیازی و یک تیر به منطقه‌ی ۶ امتیازی اصابت کند. برای کسب ۱۸ امتیاز باید یک تیر را به منطقه‌ی ۱۰ امتیازی (قرمز رنگ) و یک تیر را به منطقه‌ی ۸ امتیازی (آبی رنگ) بزنند. و برای کسب ۲۰ امتیاز، باید هر دو تیر او در



منطقه‌ی ۱۰ امتیازی (دایره‌ای به شعاع ۴) بنشینند.

از طرف دیگر، می‌دانیم که مساحت کل یا a_s برابر با مساحت دایره به شعاع ۱۰ است؛ پس: $a_s = ۱۰۰\pi$

(مساحت دایره به شعاع ۴)- (مساحت دایره به شعاع ۵)=مساحت قسمت آبی

$a_{\text{آبی}} = ۲۵\pi - ۱۶\pi = ۹\pi$

$a_{\text{نارنجی}}$=(مساحت دایره به شعاع ۶)-(مساحت دایره به شعاع ۵)

$= ۳۶\pi - ۲۵\pi = ۱۱\pi$

P (۲۰ امتیاز) +P (۱۸ امتیاز) +P (۱۶ امتیاز) = P (حداقل ۱۶ امتیاز)

$$= [\underbrace{(\frac{۹\pi}{۱۰۰\pi} \times \frac{۹\pi}{۱۰۰\pi})}_{\text{هر دو تیر ۸ امتیازی}} + \underbrace{۲(\frac{۱۶\pi}{۱۰۰\pi} \times \frac{۱۱\pi}{۱۰۰\pi})}_{\text{۱ تیر ۱۰ و دیگری ۶ امتیازی}}]$$

$$+[\underbrace{۲ \times (\frac{۱۶\pi}{۱۰۰\pi} \times \frac{۹\pi}{۱۰۰\pi})}_{\text{هر دو تیر ۱۰ امتیازی}} + \underbrace{(\frac{۱۶\pi}{۱۰۰\pi} \times \frac{۱۶\pi}{۱۰۰})}_{\text{۱ تیر ۱۰ و دیگری ۸ امتیاز}}]$$

$$= \frac{۸۱}{۱۰۰۰۰} + \frac{۱۷۶}{۱۰۰۰۰} \times ۲ + \frac{۱۴۴}{۱۰۰۰۰} \times ۲ + \frac{۲۵۶}{۱۰۰۰۰} = \frac{۹۷۷}{۱۰۰۰۰}$$

ب) حالت‌های ممکن برای کسب ۲۲ امتیاز به صورت‌های زیرند:

۱. اصابت تیر به قسمت‌های ۱۰، ۸ و ۴ امتیازی که به شش طریق امکان‌پذیر است (اول ۱۰، دوم ۸ و سوم ۴ امتیازی، یا اول ۱۰، دوم ۴ و سوم ۸ یا...).

۲. اصابت دو تیر به قسمت‌های ۸ و ۱ تیر به قسمت ۶ امتیازی که به سه طریق امکانپذیر است.

۳. اصابت دو تیر به قسمت ۶ امتیازی و ۱ تیر به قسمت ۱۰ امتیازی که به سه طریق امکانپذیر است.

$a_{\text{زرد}} = ۱۰۰\pi - ۶۴\pi = ۳۶\pi$ (مساحت قسمت ۴ امتیازی)

$$P(\text{۲۲ امتیاز}) = \left[۶ \times (\frac{۱۶}{۱۰۰} \times \frac{۹}{۱۰۰} \times \frac{۳۶}{۱۰۰})\right]$$

$$+\left[۳ \times (\frac{۹}{۱۰۰} \times \frac{۹}{۱۰۰} \times \frac{۱۱}{۱۰۰})\right] + \left[۳ \times (\frac{۱۱}{۱۰۰} \times \frac{۱۱}{۱۰۰} \times \frac{۱۶}{۱۰۰})\right]$$

$$P(\text{۲۲ امتیاز}) = \frac{۳۹۵۸۵}{۱۰۰۰۰۰۰}$$

مسأله‌ی ۷. سه عدد x، y و z به تصادف از بازه‌ی [۴ و ۰] انتخاب می‌شوند. چه قدر احتمال دارد:

الف) $z>۳$؛ ب) $z>۳$ و $y>۲$؛ ج) $z>۲$ و $y>۲$ و $x>۲$

حل: فضای نمونه‌ای، یعنی $S = \{(x,y,z)|x,y,z \in [۰,۴]\}$، عبارت است از مجموعه‌ی نقاطی از فضای سه بعدی که داخل یک مکعب به ضلع ۴ قرار دارند (حجم مکعبی به ضلع ۴)؛ پس: $V_S = ۴^۳ = ۶۴$

الف) چون باید $z>۳$، پس: $۳ < z \le ۴$. و حجم مطلوب عبارت است از حجم مکعب مستطیلی به طول ۴، عرض ۴ و ارتفاع ۱؛ یعنی: $V_A = ۴ \times ۴ \times ۱$. در نتیجه:

$$P(A) = \frac{V_A}{V_S} = \frac{۱۶}{۶۴} = \frac{۱}{۴}$$

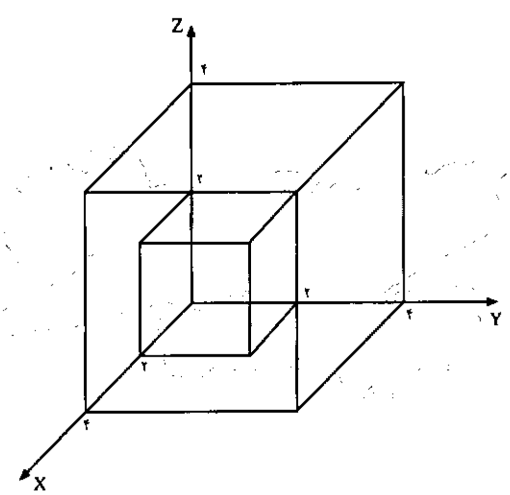
ب) باید $z>۳$ و $y>۲$، پس باید: $۳ < z \le ۴$ و $۲ < y \le ۴$. بنابراین، حجم مطلوب عبارت است از حجم مکعب مستطیلی به طول ۴، عرض ۲ و ارتفاع ۱؛ یعنی: $V_B = ۴ \times ۲ \times ۱$. پس:

$$P(B) = \frac{V_B}{V_S} = \frac{۸}{۶۴} = \frac{۱}{۸}$$

ج) در این قسمت باید: $۲ < x \le ۴$، $۲ < y \le ۴$ و $۲ < z \le ۴$. پس حجم مطلوب حجم مکعبی است به طول، عرض و ارتفاع ۲؛ یعنی: $V_C = ۲ \times ۲ \times ۲$.

پس:

$$P(C) = \frac{V_C}{V_S} = \frac{۸}{۶۴} = \frac{۱}{۸}$$

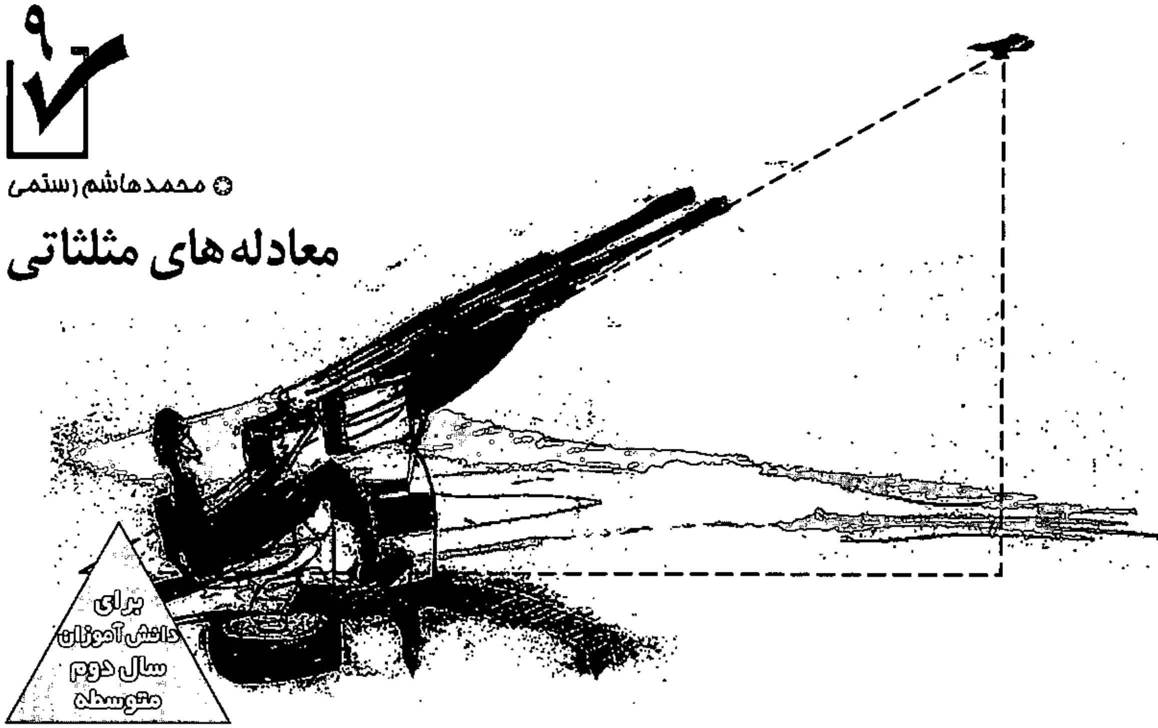


حالا که با مقدمات احتمال در فضاهای پیوسته آشنا شدیم، در شماره‌های بعدی سعی می‌کنیم مثال‌های پیشرفته‌تر و متفاوت‌تری طرح و حل کنیم؛ مسائلی در زمینه‌های هندسی، زمان و مسائل معروف در فضاهای پیوسته. پس تا شماره‌ی بعد!

۹

محمدهاشم رستمی

معادله‌های مثلثاتی



حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی حل معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی بحث شد، اینک ادامه‌ی مطلب را در بخش نهم پی می‌گیریم:

دستور بیوش

یکی از روش‌های انتخاب مجهول کمکی برای معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی یک مجهولی، به ویژه معادله‌های غیر کلاسیک، یعنی معادله‌هایی که صورت (فرم) و راه حل مشخصی ندارند، استفاده از قاعده‌ی بیوش است. در این قاعده، اگر مجهول معادله‌ی مثلثاتی، x یا مضربی از x باشد، برای حل آن چند حالت خواهیم داشت. اگر در معادله‌های مثلثاتی داده شده:

۱. کمان x را به $(-x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، $\cos x$ را مجهول کمکی قرار می‌دهیم.

۲. کمان x را به $(\pi - x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، $\sin x$ را مجهول کمکی قرار می‌دهیم.

۳. کمان x را به $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، $\text{tg}x$ را مجهول کمکی قرار می‌دهیم.

۴. کمان x را به $(-x)$ ، $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و در هر سه حالت، معادله‌ی مثلثاتی تغییر نکند، هر یک از سه تابع مثلثاتی $\cos x$ ، $\sin x$ و یا $\text{tg}x$ را می‌توانیم به عنوان مجهول کمکی اختیار کنیم. همچنین، برای پائین آوردن درجه‌ی معادله، می‌توان $\cos 2x$ را که با هر سه تبدیل نام‌برده بدون تغییر می‌ماند، مجهول کمکی قرار داد.

۵. کمان x را به $(-x)$ ، $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند، می‌توانیم $\text{tg}\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار دهیم.

مثال ۱. معادله‌ی $\cot gx = \frac{3}{\cot gx} + \frac{4}{\sin x}$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ ، معادله تغییر می‌کند؛ زیرا داریم:

$$x \to \pi - x \Rightarrow \frac{4}{\sin(\pi - x)} + \frac{3}{\cot g(\pi - x)} =$$

$$\cot g(\pi - x) \Rightarrow \frac{4}{\sin x} - \frac{3}{\cot gx} = -\cot gx$$

$$x \to \pi + x \Rightarrow \frac{4}{\sin(\pi + x)} + \frac{3}{\cot g(\pi + x)} =$$

$$\cot g(\pi + x) \Rightarrow \frac{-4}{\sin x} + \frac{3}{\cot gx} = \cot gx$$

اما با تبدیل x به $(-x)$ ، معادله تغییر نمی‌کند ، زیرا داریم :

$$x \to (-x) \Rightarrow \frac{4}{\sin(-x)} + \frac{3}{\cot g(-x)} = \cot g(-x)$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{\sin x} - \frac{3}{\cos x} = -\cot gx$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sin x} + \frac{3}{\cot gx} = \cot gx$$

بنابراین برای حل این معادله ، cosx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم . یعنی در صورت امکان معادله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم و آن گاه تمام نسبت‌های مثلثاتی موجود در آن را برحسب cosx می‌نویسیم ، داریم :

$$\frac{4}{\sin x} + \frac{3\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4\cos x + 3\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos x + 3(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$-4\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

اکنون فرض می‌کنیم $\cos x = y$ باشد ، خواهیم داشت :

$$4y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{+2 \pm \sqrt{4 + 12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{3}{2} > 1$$

جواب $y = \frac{3}{2}$ قابل قبول نیست ، زیرا $-1 \le y = \cos x \le 1$ است . بنابراین برای جواب قابل قبول $y = -\frac{1}{2}$ داریم :

$$\cos x = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \qquad \text{جواب کلی معادله}$$

نکته : دامنه‌ی تعریف معادله‌ی داده شده به صورت زیر است :

$$\left\{x \in R \middle| x \neq k\pi ,\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

بنابراین هر دو جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ قابل قبول هستند . به طور کلی ، برای تعیین جواب‌های یک معادله اعم از معادله‌ی جبری یا معادله‌ی مثلثاتی ، باید به دامنه‌ی تعریف آن توجه داشته باشیم و در صورت وجود جواب‌های غیر قابل قبول ، آن‌ها را از مجموعه جواب‌های به دست آمده حذف کنیم .

مثال ۲ . معادله‌ی $1 + \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$ را حل کنید .

حل : با تبدیل x به (-x) یا (π+x)، این معادله تغییر می‌کند ، زیرا داریم :

$$x \to (-x) \Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin(-3x) = \cos(-2x)$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$$

$$x \to (\pi + x) \Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin(3\pi + 3x) = \cos(2\pi + 2x)$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$$

اما با تبدیل x به(π-x)، معادله تغییر نمی‌کند ، زیرا داریم :

$$x \to (\pi - x) \Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin(3\pi - 3x) = \cos(2\pi - 2x)$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x$$

بنابراین sinx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم . یعنی تمام تابع‌های مثلثاتی موجود در معادله را برحسب sinx می‌نویسیم . داریم :

$$1 + \sqrt{2}\sin 3x = \cos 2x \Rightarrow 1 + \sqrt{2}(3\sin x - 4\sin^3 x) =$$

$$1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 3\sqrt{2}\sin x - 4\sqrt{2}\sin^3 x + 2\sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow -\sin x(4\sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x - 3\sqrt{2}) = 0$$

با فرض $\sin x = y$ خواهیم داشت :

$$-y(4\sqrt{2}y^2-2y-3\sqrt{2})=0\Rightarrow -y=0\Rightarrow y=0,$$
$$4\sqrt{2}\ y^2-2y-3\sqrt{2}=0\Rightarrow$$
$$y=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4\sqrt{2}}=\frac{1\pm 5}{4\sqrt{2}}\Rightarrow$$
$$y=\frac{6}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\cong\frac{4/2}{4}>1$$ غیرقابل قبول

$$y=\frac{-4}{4\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$ قابل قبول

از آن‌جا داریم:

$$y=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi$$ و
$$y=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin(-\frac{\pi}{4})$$
$$\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$$
و
$$x=2k\pi+\pi-(\frac{-\pi}{4})\ \text{یا}\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$$

نکته: با توجه به این که دامنه‌ی تعریف معادله‌ی داده شده، $\mathbb{R}$ یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، هر سه جواب کلی به‌دست آمده قابل قبول هستند.

مثال ۳. معادله‌ی $3\cos x+\cos 3x=2\sin 3x$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (x-) و (π-x)، این معادله تغییر می‌کند، زیرا داریم:

$$x\to(-x)\Rightarrow 3\cos(-x)+\cos(-3x)=2\sin(-3x)$$
$$\Rightarrow 3\cos x+\cos 3x=-2\sin 3x$$
$$x\to(\pi-x)\Rightarrow 3\cos(\pi-x)+\cos(3\pi-3x)=2\sin(3\pi-3x)$$
$$\Rightarrow -3\cos x-\cos 3x=2\sin 3x$$

اما با تبدیل x به $(\pi+x)$، معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x\to\pi+x\Rightarrow 3\cos(\pi+x)+\cos(3\pi+3x)=2\sin(3\pi+3x)$$
$$\Rightarrow -3\cos x-\cos 3x=-2\sin 3x\Rightarrow$$
$$3\cos x+\cos 3x=2\sin 3x$$

بنابراین tgx را مجهول کمکی قرار می‌دهیم. یعنی پس از ساده کردن معادله، تمام تابع‌های مثلثاتی موجود در معادله را برحسب tgx می‌نویسیم. داریم:

$$3\cos x+\cos 3x=2\sin 3x$$
$$\Rightarrow 3\cos x+4\cos^3 x-3\cos x=2(3\sin x-4\sin^3 x)$$
$$\Rightarrow 4\cos^3 x-6\sin x+8\sin^3 x=0$$

با فرض $\cos x\neq 0$ یعنی $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$، طرفین معادله‌ی بالا را بر $\cos^3 x$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{4\cos^3 x}{\cos^3 x}-\frac{6\sin x}{\cos^3 x}+\frac{8\sin^3 x}{\cos^3 x}=0$$
$$\Rightarrow 4-6tgx(1+tg^2x)+8tg^3x=0$$
$$\Rightarrow 2tg^3x-6tgx+4=0\Rightarrow tg^3x-3tgx+2=0$$

حال فرض می‌کنیم $tgx=y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^3-3y+2=0;(1-3+2)=0$$

مجموع ضریب‌های این معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $y=1$ و معادله بر $y-1$ بخش‌پذیر است. خواهیم داشت:

$$y^3-3y+2=(y-1)(y^2+y-2)=0$$
$$\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1\ \text{و}\ y^2+y-2=0\Rightarrow y=1\ \text{و}\ y=-2$$

بنابراین، معادله یک ریشه‌ی مضاعف $y=1$ و یک ریشه‌ی ساده‌ی $y=-2$ دارد که هر دو قابل قبول هستند، بنابراین داریم:

$$y=1\Rightarrow tgx=1=tg\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$y=-2\Rightarrow tgx=-2$$
$$x=k\pi+Arctg(-2)$$

نکته: جواب‌های معادله با شرط $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ سازگارند.

مثال ۴. معادله‌ی $2\sin x\sin 3x=1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (x-)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر نمی‌کند، زیرا داریم:

$$x\to(-x)\Rightarrow 2\sin(-x)\sin(-3x)=1$$
$$\Rightarrow 2(-\sin x)(-\sin 3x)=1\Rightarrow 2\sin x\sin 3x=1$$
$$x\to(\pi-x)\Rightarrow 2\sin(\pi-x)\sin(3\pi-3x)=1$$
$$\Rightarrow 2\sin x\sin 3x=1$$
$$x\to(\pi+x)\Rightarrow 2\sin(\pi+x)\sin(3\pi+3x)=1$$
$$\Rightarrow 2(-\sin x)(-\sin 3x)=1\Rightarrow 2\sin x\sin 3x=1$$

بنابراین هر یک از تابع های cosx یا sinx یا tgx را می توان مجهول کمکی قرار داد. اما بهتر است $\cos 2x$ را مجهول کمکی بگیریم. برای این کار چنین عمل می کنیم:

$$2\sin x\cos 3x = 1 \Rightarrow \cos(x-3x) - \cos(x+3x) = 1$$
$$\Rightarrow \cos(-2x) - \cos 4x = 1 \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 1$$
$$\Rightarrow \cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 \Rightarrow -2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$$

با فرض $\cos 2x = y$ داریم:

$$-2y^2 + y = 0 \Rightarrow y(-2y+1) = 0 \Rightarrow y = 0\ ,\ \ y = \frac{1}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند، زیرا y به بازه ی $[-1,+1]$ تعلق دارد. بنابراین داریم:

$$y = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

نکته:

۱. می دانیم که $\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ است. بنابراین:

$$\sin x\sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 4x]$$

اما $\cos(-2x) = \cos 2x$ بنابراین:

$$\sin x\sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

۲. چون $\cos 2x = y$ فرض شده است، پس دامنه ی تغییرات y بازه ی $[-1,+1]$ است.

۳. با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$، داریم:

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$$

مثال ۵. معادله ی $\sin x - 2\cos x = 1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (x-)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر می کند، زیرا داریم:

$$x \to (-x) \Rightarrow \sin(-x) - 2\cos(-x) = 1 \Rightarrow -\sin x - 2\cos x = 1$$
$$x \to (\pi - x) \Rightarrow \sin(\pi - x) - 2\cos(\pi - x) = 1 \Rightarrow \sin x + 2\cos x = 1$$
$$x \to (\pi + x) \Rightarrow \sin(\pi + x) - 2\cos(\pi + x) = 1 \Rightarrow -\sin x + 2\cos x = 1$$

بنابراین، $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار می دهیم. یعنی تابع های مثلثاتی موجود در معادله را بر حسب $tg\frac{x}{2}$ می نویسیم. داریم:

$$\sin x - 2\cos x = 1 \Rightarrow \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{2(1-tg^2\frac{x}{2})}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2tg\frac{x}{2} - 2 + 2tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2} \Rightarrow tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 3 = 0$$

حال فرض می کنیم $tg\frac{x}{2} = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1\ ,\ \ y = -3$$

هر دو جواب قابل قبولند، بنابراین داریم:

$$y = 1 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$y = -3 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = -3 \Rightarrow x = 2k\pi + 2Arctg(-3)$$

نکته: معادله ی $\sin x - 2\cos x = 1$، کلاسیک نوع اول است که روش بالا یکی از روش های حل آن است.

مثال ۶. معادله ی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ را حل کنید.

حل: با تبدیل x به (x-)، (π-x) و (π+x)، این معادله تغییر می کند. چرا؟ بنابراین می توانیم $tg\frac{x}{2}$ را مجهول کمکی قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)^3 + \left(\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)^3 = 1 \Rightarrow$$

پس از ساده کردن این معادله خواهیم داشت:

$$8tg^3\frac{x}{2} - 2tg^6\frac{x}{2} - 6tg^2\frac{x}{2} = 0$$ یا

$$4tg^3\frac{x}{2} - tg^6\frac{x}{2} - 3tg^2\frac{x}{2} = 0$$

حال با فرض $tg\frac{x}{2} = y$ داریم:

$$4y^3 - y^6 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2(4y - y^4 - 3) = 0$$
$$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0\ ,\ \ 4y - y^4 - 3 = 0 \Rightarrow y^4 - 4y + 3 = 0$$

مجموع ضریب‌های این معادله مساوی صفر است. بنابراین یک جواب آن $y=1$ و معادله بر $y-1$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$y^4 - 4y + 3 = (y-1)(y^3+y^2+y-3) = 0$$

$$\Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1\ ,\ \ y^3+y^2+y-3=0\ ,\ 1+1+1-3=0$$

مجموع ضریب‌های این معادله نیز صفر است. پس یکی از جواب‌های آن $y=1$ و معادله بر $y-1$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$y^3+y^2+y-3=(y-1)(y^2+2y+3)=0$$

$$\Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1\ ,\ \ y^2+2y+3=0\ ,$$

$\Delta' = 1-3 = -2 < 0$ ریشه ندارد

بنابراین، جواب‌های به‌دست آمده برای y که همه قابل قبول هستند، عبارتند از: $y=0$ و $y=1$. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$y=0 \Rightarrow tg\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi \Rightarrow x=2k\pi$$

$$y=1 \Rightarrow tg\frac{x}{2}=1=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

نکته‌ی مهم: علاوه بر قاعده‌ی بیوش که یک روش کلی برای حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی است، در بسیاری از موارد، روش‌های دیگری برای حل آن‌ها وجود دارد که راه‌حل‌های بسیار جالب و سریع‌تری به دست می‌دهند. برخی از این روش‌ها و مثال‌هایشان را قبلاً دیدید. اینک به چند مثال دیگر توجه کنید:

مثال ۱. معادله‌ی $\sin^2 x + 2\cos 2x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

حل: با استفاده از اتحاد $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ داریم:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + 2\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\cos 2x + 4\cos 2x = 1$$

$$\Rightarrow 3\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲. معادله‌ی $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

و $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ داریم:

$$1+\cos 2x+\cos x+\cos 3x=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos 2x\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(\cos x+\cos 2x)=0$$

$$\Rightarrow 2\cos x \times 2\cos\frac{x+2x}{2}\cos\frac{x-2x}{2}=0$$

$$\Rightarrow 4\cos x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,$$

$$\cos\frac{3x}{2}=0 \Rightarrow \frac{3x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\pi$$

مثال ۳. معادله‌ی $\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0$ را حل کنید.

حل: این معادله را به یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2x = 2k\pi \pm (\pi - \frac{x}{2}) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{x}{2}, 2x = 2k\pi - \pi + \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4k\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}, x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

مثال ۴. معادله‌ی $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$ و $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ است. بنابراین داریم:

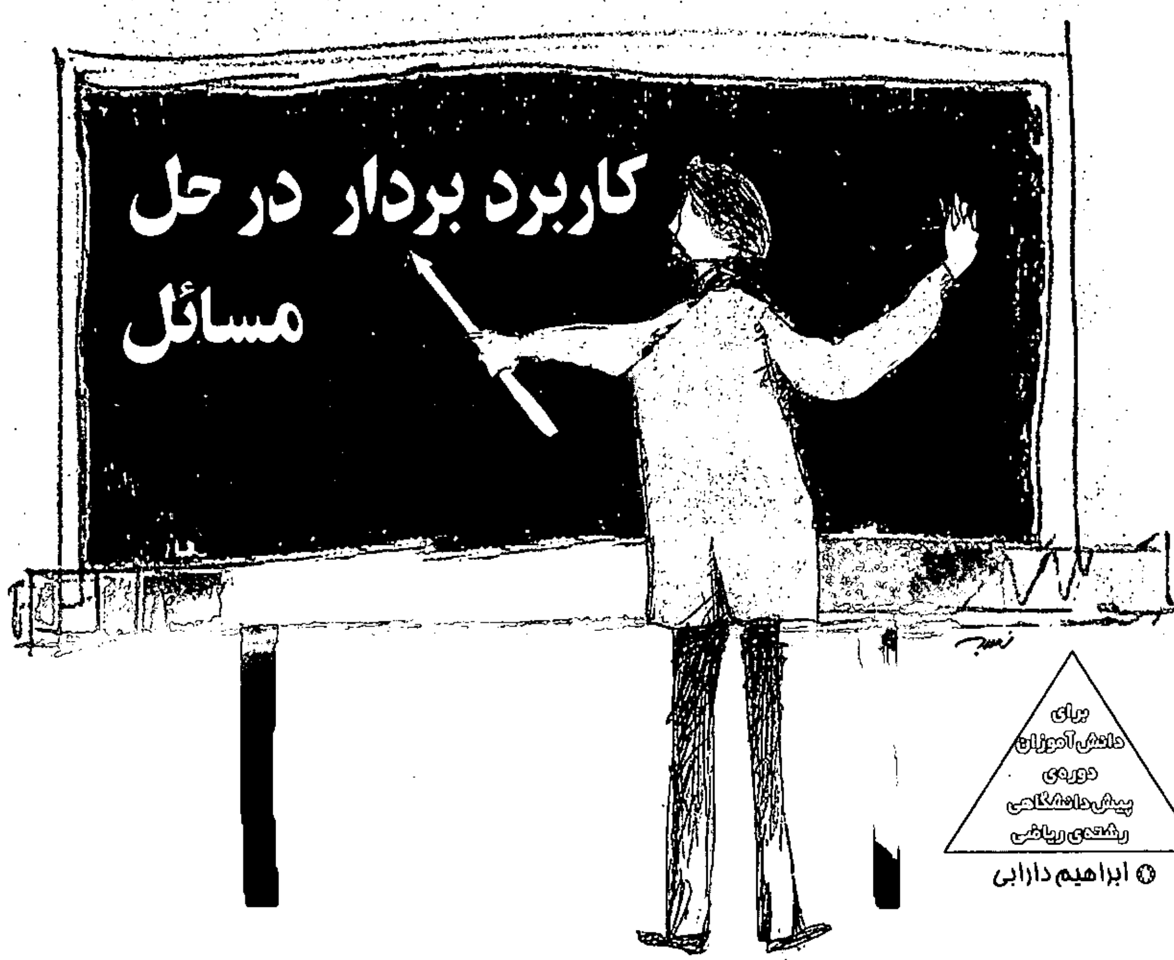
$$1 - 3\sin^2 x\cos^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{4}\sin^2 2x = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow 1-\cos 4x = 2 \Rightarrow$$

$$\cos 4x = -1 = \cos\pi \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

کاربرد بردار در حل مسائل



برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

ابراهیم دارابی

بردار در همه‌ی عرصه‌های علوم، از جملـه ریـاضیـات کاربرد زیادی دارد. در این‌جا کاربرد بردار در حل معـادلـه، نامعادله، اثبات نامساوی‌ها، تعیین ماکزیمم توابع و نیز حل دستگاه معادله‌ها مورد توجه ما است.

برای یادآوری، به بعضی از ویژگی‌های بردار اشاره می‌کنیم:

۱. هر پاره‌خط جهت‌دار را بردار می‌نامند. برداری که ابتدای آن A و انتهای آن B باشد، با نماد $\overrightarrow{AB}$ نشان داده می‌شود.

بردار را با حروف کوچک لاتین، مانند: $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم نشان می‌دهند.

۲. تصویرهای بردار a را روی محورهای ox ، oy و oz در دستگاه oxyz ، به ترتیب با x ، y و z نشان می‌دهند و آن‌ها را مختصات بردار a می‌نامند و می‌نویسند:

$\vec{a}(x,y,z)$ یا $\vec{a}=(x,y,z)$

۳. دو بـردار a ، b بـا مـخـتـصـات $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ با یکدیگر مساوی هستند؛ اگر و تنها اگر:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

۴. طول $\vec{a}(x,y,z)$ از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

۵. $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ موازی و یا بر یک استقامت هستند، اگر:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

۶. ضرب داخلی و یا ضرب اسکالر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\varphi$$

که در آن φ زاویه‌ی بین دو بردار است.

از تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

۷. ضرب داخلی دو بردار بر حسب مختصات آن‌ها، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

۸. از ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نتیجه می‌شود که اگر این دو بردار موازی و یا بر یک استقامت باشند، آن‌گاه:

(ب) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$

(پ) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$

و اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر یکدیگر عمود باشند، آن‌گاه:

(ت) یا: $\begin{cases}\vec{a}.\vec{b} = 0\\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0\end{cases}$

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در صفحه‌ی xoy قرار داشته باشند، آن‌گاه:

$z_1 = z_2 = 0$

چون در این مقاله به ویژگی‌های دیگر بردارها نیازی نیست، از آوردن آن‌ها خودداری می‌شود.

مقاله را با حل مثال پی می‌گیریم و به پایان می‌بریم.

مثال ۱. معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x^3+4x^2+2x+8} = x\sqrt{x}+2\sqrt{2}$$

حل: ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x^2+2)(x+4)} = x\sqrt{x}+2\sqrt{2}$$

اکنون با توجه به صورت مسأله، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(x,\sqrt{2}) \ , \ \vec{b}(\sqrt{x},2)$$

داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+2} \ , \ |\vec{b}| = \sqrt{x+4}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = x\sqrt{x}+2\sqrt{2}$$

بنابر فرمول (الف) داریم:

$$\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

اما چون در این مسأله داریم:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

(صورت مسأله را نگاه کنید).

پس بنابر فرمول (ب)، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند و داریم:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$x=\frac{1}{2}$ در دامنه‌ی تعریف معادله قرار دارد ($D=\{x\in R | x>0\}$) و در معادله صدق می‌کند. پس $x=\frac{1}{2}$ جواب معادله است.

مثال۲. معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\cos x\sqrt{۲-۲\sin^۲ x}+\sqrt{۱-۲\cos^۲ x}=\sqrt{\cos^۲ x+۱}$$

حل: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(\cos x,۱),\ \vec{b}\left(\sqrt{۲-۲\sin^۲ x}\ ,\ \sqrt{۱-۲\cos^۲ x}\right)$$

داریم:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\cos^۲ x+۱}\ ,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{۲-۲\sin^۲ x+۱-۲\cos^۲ x}=۱$$

با توجه به صورت مسأله و بنابر فرمول (ب) داریم:

$$\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=\cos x\sqrt{۲-۲\sin^۲ x}+\sqrt{۱-۲\cos^۲ x}\\ \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|=۱\times\sqrt{\cos^۲ x+۱}\Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{x_۱}{x_۲}=\frac{y_۱}{y_۲}\Rightarrow$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{۲-۲\sin^۲ x}}=\frac{۱}{\sqrt{۱-۲\cos^۲ x}}\Rightarrow$$

$$\cos^۲ x(۱-۲\cos^۲ x)=۲-۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۴ x-\cos^۲ x+۲-۲(۱-\cos^۲ x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۴ x+\cos^۲ x=۰\Rightarrow \cos^۲ x(۲\cos^۲ x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}+k\pi\ ,\ k\in z$$

مثال۳. اگر $a+b+c=۱۱$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\sqrt{۲a+۳}+\sqrt{۲b+۴}+\sqrt{۲c+۷}\le ۶\sqrt{۳}$$

اثبات: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{x}(\sqrt{۲a+۳},\sqrt{۲b+۴},\sqrt{۲c+۷}\ ,\ \vec{y}(۱,۱,۱)$$

داریم:

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{(۲a+۳)+(۲b+۴)+(۲c+۷)}=\sqrt{۲\underbrace{(a+b+c)}_{۱۱}+۱۴}=۶$$

$$\left|\vec{y}\right|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

$$\vec{x}.\vec{y}=۱\times\sqrt{۲a+۳}+۱\times\sqrt{۲b+۴}+۱\times\sqrt{۲c+۷}$$

بنابر فرمول (الف) داریم:

$$\vec{x}.\vec{y}\le\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|\Rightarrow\sqrt{۲a+۳}+\sqrt{۲b+۴}+\sqrt{۲c+۷}\le ۶\sqrt{۳}$$

مثال۴. اگر x، y و z اعداد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$x^۲+y^۲+z^۲\ge xy+yz+zx$$

اثبات: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(x,y,z)\quad,\quad\vec{b}(y,z,x)$$

داریم:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\quad,\quad\left|\vec{b}\right|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\ \Rightarrow xy+yz+zx\le\left(\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\le x^۲+y^۲+z^۲$$

مثال ۵. ماکزیمم تابع $y=\sqrt{۳-x}+\sqrt{۱+x}$ را در بازه‌ی $[-۱,۰]$ پیدا کنید.

حل: بردارهای $\vec{a}\left(\sqrt{۳-x},\sqrt{۱+x}\right)$ و $\vec{b}(۱,۱)$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{۳-x+۱+x}=\sqrt{۴}=۲\ ,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\Rightarrow ۱\times\sqrt{۳-x}+۱\times\sqrt{۱+x}\le ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۳-x}+\sqrt{۱+x}\le ۲\sqrt{۲}$$

مقدار تابع را در کرانه‌های بازه‌ی $[-۱,۰]$ حساب

می‌کنیم:

$$f(-1)=2,\quad f(0)=\sqrt{3}+1$$

$$2\sqrt{2}>\sqrt{3}+1>2 \Rightarrow Max(y)=2\sqrt{2}$$

مثال ۶. ماکزیمم تابع $y=\sqrt{3\cos^2 2x+2}+\sqrt{3\sin^2 2x+4}$ را حساب کنید.

حل: بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}\left(\sqrt{3\cos^2 2x+2},\sqrt{3\sin^2 2x+4}\right),\quad \vec{b}(1,1)$$

داریم:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3\cos^2 2x+2+3\sin^2 2x+4}=\sqrt{3(\sin^2 2x+\cos^2 2x)+6}$$

$$=\sqrt{3+6}=3$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=1\times\sqrt{3\cos^2 2x+2}+1\times\sqrt{3\sin^2 2x+4}$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\Rightarrow y=\sqrt{3\cos^2 2x+2}+\sqrt{3\sin^2 2x+4}\le 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Max(y)=3\sqrt{2}$$

مثال ۷. ماکزیمم عبارت $S=a\sin x+b\cos x$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{a}(a,b)$ و $\vec{b}(\sin x,\cos x)$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a^2+b^2},\quad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=1$$

$$\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\Rightarrow a\sin x+b\cos x\le 1\times\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow Max(S)=\sqrt{a^2+b^2}$$

مثال ۸. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}4x^2+y^2+y(2x+z)=0\\4x^2+2x+y+2yz=0\\12x^2+8y^2+16xy+8yz=4x+4z+2\end{cases}\qquad(1)$$

حل: دستگاه (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}2x(2x+y)+y(y+z)=0\\2x(2x+1)+y(2z+1)=0\\4(2x+y)^2+4(y+z)^2=(2x+1)^2+(2z+1)^2\end{cases}\qquad(2)$$

اکنون با توجه به معادله‌های دستگاه (۲)، بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}(2x,y),\ \vec{b}(2x+y,y+z),\ \vec{c}(2x+1,2z+1)$$

داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=2x(2x+y)+y(y+z)$$

$$\vec{a}.\vec{c}=2x(2x+1)+y(2z+1)$$

$$\vec{b}^2=(2x+y)^2+(y+z)^2$$

$$\vec{c}^2=(2x+1)^2+(2z+1)^2$$

با توجه به معادله سوم دستگاه (۲) و مقدار $\vec{c}(2x+1,2z+1)$ معلوم می‌شود که:

$$4\vec{b}^2=\vec{c}^2$$

اکنون دستگاه (۲) را بر حسب $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=0\\\vec{a}.\vec{c}=0\\4\vec{b}^2=\vec{c}^2\end{cases}\qquad(3)$$

این دستگاه را حل می‌کنیم.

اگر $\vec{a}(2x, y) = 0$، آن‌گاه:

$$2x = y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

اما اگر $\vec{a} = 0$، آن‌گاه: $\vec{a}.\vec{c} = 0$

در نتیجه دو حالت وجود دارد:

$$\begin{cases} \vec{c} = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{c} \end{cases} \text{ یا}$$

از یک طرف، اگر $\vec{c}(2x + 1, 2z + 1) = 0$، آن‌گاه:

$$\vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون با فرض x=y=۰ این دستگاه را تشکیل داده‌ایم، پس در این حالت این جواب‌ها قابل قبول نیستند.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow$$
$$2x(2x + y) + y(2z + 1) = 0$$
$$\Rightarrow 0 + y(2z + 1) = 0$$
$$\Rightarrow y = 0,\ z = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $\vec{a} \neq 0$، آن‌گاه از دستگاه (۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{b} \| \vec{c}$$

و چون $\vec{c}^2 = 4\vec{b}^2$ و یا $\vec{c} = \pm 2\vec{b}$، بنابراین در حالت $\vec{c} = 2\vec{b}$، طول و عرض $\vec{c}$، دو برابر طول و عرض $\vec{b}$ خواهد بود:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 2(2x + y) \\ 2z + 1 = 2(y + z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0,\ y = \frac{1}{2},\ z \in R$$

به ازای x=۰ و $y = \frac{1}{2}$، از معادله‌ی دوم دستگاه (۲) مقدار z را پیدا می‌کنیم:

$$2x(2x + 1) + y(2z + 1) = 0$$
$$0 + \frac{1}{2}(2z + 1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

پس در این حالت داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

در حالت $\vec{c} = -2\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a} \| -2\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -2(2x + y) \\ 2z + 1 = 2(y + z) \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = -\frac{1}{2}$$

اگر این مقادیر را در معادله‌ی دوم دستگاه (۲) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$0 - \frac{1}{2}(2z + 1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

منبع مقاله و توضیح آن..

در یکی از شماره‌های مجله‌ی «ریاضیات در مدرسه» (چاپ مسکو)، مقاله‌ای در ارتباط با این موضوع چاپ شده بود. من آن را ترجمه کردم و در کتاب «نخستین گام‌ها در المپیادهای ریاضی» (جلد سوم، ویرایش دوم، انتشارات پیشروان ـ مبتکران) آوردم. با توجه به محتوای مقاله و قابل درک بودن آن برای دانش‌آموزان، فکر می‌کنم آوردن آن در مجله‌ی رشد برهان متوسطه به گونه‌ی دیگر، می‌تواند دیدگاه دیگری از کاربرد بردارها پیش‌روی دانش‌آموزان بگشاید. بر این اساس و با حفظ محتوای مقاله، مسائلی را متمایز از مسائل مطرح در آن کتاب، تنها برای چاپ در این مجله طرح و حل کرده‌ام. با توجه به برد وسیعی که مجله‌ی رشد برهان دارد، امیدوارم گروه وسیعی از دانش‌آموزان از آن بهره ببرند.

۳

سلسله درس‌هایی از ریاضیات گسسته (نظریه اعداد)

سید محمدرضا هاشمی موسوی



مبناها

چهار عمل اصلی در مبناهای متفاوت

اشاره: در شماره قبل درباره‌ی بسط یک عدد در مبناهای مختلف بحث کردیم، اینک چهار عمل اصلی در مبناهای مختلف را در پی می‌آوریم.

۱. جمع اعداد در مبناهای متفاوت

اعمال مربوط به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در مبنای غیر از ۱۰، همانند عملیات در مبنای ۱۰ صورت می‌گیرد؛ با این تفاوت که جای مبنای ۱۰ با اعداد دیگری مثل ۲، ۳، ۴، ... و ۹ عوض خواهد شد.

پیش از توضیح عمل جمع در مبنایی غیر از ۱۰ بهتر است، عمل جمع در مبنای ۱۰ را بررسی کنیم تا قواعد جمع که در مبناهای دیگر انجام می‌گیرد، ملموس‌تر شود؛ زیرا قواعد جمع در مبناهای غیر از ۱۰ نیز، دقیقاً همانند قواعد جمع در مبنای ۱۰ است. ابتدا با یک مثال، عملیات جمع در مبنای ۱۰ را مرور می‌کنیم.

$$\left(\begin{array}{r} ۳۴۲ \\ +\underline{۱۷۶} \\ ۵۱۸ \end{array}\right)_{۱۰}$$

در این‌جا برای جمع در مبنای ۱۰ چه کرده‌ایم؟ چرا حاصل جمع دو عدد برابر ۵۱۸ شد؟

می‌خواهیم عدد ۱۷۶ را به عدد ۳۴۲ بیفزاییم. برای این منظور، یکان عدد ۱۷۶ را با یکان عدد ۳۴۲، دهگان ۱۷۶ را با دهگان ۳۴۲ و به همین ترتیب، صدگان ۱۷۶ را با صدگان ۳۴۲ جمع می‌کنیم؛ چون مبنای ۱۰ موردنظر است. بنابراین، در صورتی که مجموع هر دو عدد، از عدد ۱۰ تجاوز کرد(۱۱ = ۴+۷)، باید ۱۰ واحد از عدد فوق را حذف و به صورت ۱ واحد، به ستون بعدی (در این‌جا صدگان) اضافه کنیم.

در ادامه، پس از جمع کردن صدگان‌های دو عدد، باید ۱ واحدی را که از جمع ستون دهگان دو عدد حاصل شده است نیز به آن اضافه کنیم. واضح است که مجموع دو عدد ۳۴۲ و ۱۷۶ برابر ۵۱۸ در مبنای ۱۰ خواهد شد.

اکنون اگر عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، در



مبنای m صورت بگیرد، همیشه به جای هر m در یک ستون، یک واحد به ستون سمت چپ آن می‌افزاییم.

مثال ۱. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\left(\begin{array}{r} ۲۳۴ \\ +\underline{۳۴۷} \\ \cdots \end{array}\right)_۸$$

حل: چون مبنای عمل برابر ۸ است، کافی است که هرجا حاصل جمع ستونی از ۸ تجاوز کرد، به اندازه‌ی ۸ واحد (مبنا) از حاصل جمع ستون موردنظر کم کنیم و به صورت ۱ واحد به ستون بعدی (سمت چپ) اضافه کنیم. کار جمع کردن ستون‌ها را به ترتیب از سمت راست به چپ انجام می‌دهیم.

(رقم یکان حاصل جمع) ۳ = ۱۱ − ۸ و ۱۱ = ۴+۷ (ستون اول)

(به ستون بعد، یک واحد اضافه شود)

(رقم دهگان حاصل جمع) ۶ = ۸ − ۸ و ۸ = ۱+۷ و ۷ = ۳+۴ (ستون دوم)

(به ستون بعد ۱ واحد اضافه شود)

(رقم صدگان حاصل جمع) ۶ = ۱ + ۵ و ۵ = ۲+۳ (ستون سوم)

بنابراین جواب نهایی چنین است:

$$\left(\begin{array}{r} ۲۳۴ \\ +\underline{۳۴۷} \\ ۶۰۳ \end{array}\right)_۸$$

مثال ۲. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} ۲۰۲+ \\ ۳۴۱ \\ ۵۱۳ \\ ۴۳۴ \end{array}\right)_۶ \\ \hline \cdots \end{array}$$

حل: عملیات جمع در مبنای ۶ را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

(رقم یکان) ۴ = ۶ − ۱۰ و ۱۰ = ۲+۱+۳+۴ (ستون اول)

(به ستون سمت چپ ۱ واحد اضافه شود)

(رقم دهگان) ۳ = ۶ − ۹ و ۹ = ۱+۸ و ۸ = ۰+۴+۱+۳ (ستون دوم)

(به ستون سمت چپ ۱ واحد اضافه شود)

(رقم صدگان) ۳ = ۱۲ − ۱۵ = ۲×۶ − ۱۵ و ۱۵ = ۱+۱۴ و ۱۴ = ۲+۳+۵+۴ (ستون سوم)

(به ستون سمت چپ ۲ واحد اضافه شود)

توجه: در واقع ستون چهارم ستونی است که همه‌ی ارقام آن صفر هستند.

پس حاصل جمع در مبنای ۶ برابر $(۲۳۳۴)_۶$ است:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} ۰۲۰۲+ \\ ۰۳۴۱ \\ ۰۵۱۳ \\ ۰۴۳۴ \end{array}\right)_۶ \\ \hline ۲۳۳۴ \end{array}$$

$$(۲۰۲)_۶+(۳۴۱)_۶+(۵۱۳)_۶+(۴۳۴)_۶=(۲۳۳۴)_۶$$

مثال ۳. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} ۷۸۳۱+ \\ ۴۰۳۲ \\ ۵۱۷۸ \\ ۲۱۰۱۸ \\ ۱۸۳۴۰ \end{array}\right)_۹ \\ \hline \cdots \end{array}$$

حل: عملیات در مبنای ۹ را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

(۲+) (رقم یکان) ۱ = ۱۸ − ۱۹ و ۱۹ = ۱+۲+۸+۸+۰ (ستون اول)

(۲+) (رقم دهگان) ۲ = ۱۸ − ۲۰ و ۲۰ = ۲+۱۸ و ۱۸ = ۳+۳+۷+۱+۴ (ستون دوم)

(۱+) (رقم صدگان) ۵ = ۹ − ۱۴ و ۱۴ = ۲+۱۲ و ۱۲ = ۸+۰+۱+۰+۳ (ستون سوم)

(۲+) (رقم هزارگان) ۸ = ۱۸ − ۲۶ و ۲۶ = ۱+۲۵ و ۲۵ = ۷+۴+۵+۱+۸ (ستون چهارم)

(رقم ده هزارگان) ۵ = ۲ + ۳ و ۳ = ۰+۰+۰+۲+۱ (ستون پنجم)

پس حاصل جمع در مبنای ۹ برابر $(۵۸۵۲۱)_۹$ است.

توجه داشته باشید که در واقع در عملیات جمع در هر

مبنا، مجموع اعداد هر ستون در آن مبنا (و در این جا در مبنای ۹) نوشته می‌شود. سپس رقم یکان عدد حاصل در ستون خود نوشته و ارقام بعدی به اعداد ستون بعدی در سمت چپ خود افزوده می‌شود. برای مثال در ستون اول حاصل شد:

$$۰+۸+۸+۲+۱=۱۹$$

اگر ۱۹ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(۲۱)_۹=(۱۹)_{۱۰}$$

در این عدد یعنی ۲۱، رقم یکان یعنی ۱ در ستون حاصل جمع نوشته شده و رقم دوم آن یعنی ۲، به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده شده است.

در ستون دوم به دست آمد: $۲+۴+۱+۷+۳+۳=۲۰$

اگر ۲۰ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(۲۲)_۹=(۲۰)_{۱۰}$$

در عدد ۲۲، رقم یکان یعنی ۲ به ستون دوم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۲ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می‌شود.

در ستون سوم به دست آمد: $(۲)+۳+۰+۱+۰+۸=۱۴$

اگر ۱۴ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(۱۵)_۹=(۱۴)_{۱۰}$$

در عدد ۱۵، رقم یکان یعنی ۵ به ستون سوم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۱ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می‌شود.

در ستون چهارم به دست آمد:

$$(۱)+۸+۱+۵+۴+۷=۲۶$$

اگر ۲۶ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(۲۸)_۹=(۲۶)_{۱۰}$$

در عدد ۲۸، رقم یکان یعنی ۸ به ستون چهارم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۲ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می‌شود.

در نهایت برای ستون پنجم نوشته شد:

$$(۲)+۱+۲+۰+۰=۵$$

چون عدد ۵ در مبنای ۹ و ۱۰ برابر است:



$$(۵)_۹=(۵)_{۱۰}$$

بنابراین، در ستون پنجم خود ۵ (رقم یکان ۵) نوشته می‌شود.

پس، حاصل جمع نهایی به صورت زیر است:

$$(۷۸۳۱)_۹+(۴۰۳۲)_۹+(۵۱۷۸)_۹+(۲۱۰۱۸)_۹+(۱۸۳۴۰)_۹=(۵۸۵۲۱)_۹$$

نکته‌ی ۱. واضح است که وقتی دو یا چند عدد را جمع می‌کنیم، مبناهای آن‌ها باید برابر باشند. بنابراین اگر هدف جمع کردن چند عدد در مبناهای متفاوت باشد، ابتدا باید همه‌ی آن‌ها را در یک مبنا بنویسیم و سپس آن‌ها را با هم جمع کنیم.

نکته‌ی ۲. اشاره شد که اگر در یک جمع، مجموع ارقام یک ستون در یک پایه، عدد سه و یا چند رقمی باشد، فقط رقم یکان آن را در ستون اول حاصل جمع می‌نویسیم و بقیه‌ی ارقام آن را به ستون سمت چپ اضافه می‌کنیم. برای مثال، اگر مبنای عددنویسی در یک جمع ۵ و مجموع ارقام ستون اول $(۳۴۴)_۵$ باشد، رقم ۴ را در ستون اول حاصل جمع می‌نویسیم و ۳۴ را به ستون دوم اضافه می‌کنیم.

مثال ۴. حاصل جمع $(۲۳۳)_۴+(۱۲)_۵$ را بیابید.

حل: برای یافتن حاصل این جمع، چندین روش را می‌توان به کار برد.

روش اول: هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم و سپس جمع می‌کنیم:

$$(۲۳۳)_۴=۳+۳\times۴+۲\times۴^۲=(۴۷)_{۱۰}$$

$$(۱۲)_۵=۲+۱\times۵=(۷)_{۱۰}$$

$$(۲۳۳)_۴+(۱۲)_۵=(۴۷)_{۱۰}+(۷)_{۱۰}=(۵۴)_{۱۰}=۵۴$$

روش دوم: عدد $(۲۳۳)_۴$ را در مبنای ۵ می‌نویسیم و سپس با عدد $(۱۲)_۵$ جمع می‌کنیم:

$$(۲۳۳)_۴=۳+۳\times۴+۲\times۴^۲=(۴۷)_{۱۰}$$

$$(۴۷)_{۱۰}=(۱۴۲)_۵=(۲۳۳)_۴$$

$$(۲۳۳)_۴+(۱۲)_۵=(۱۴۲)_۵+(۱۲)_۵=(۲۰۴)_۵$$

توجه: برای حل مثال ۴ می‌توان $(۱۲)_۵$ را در مبنای ۴ نوشت، سپس آن را با $(۲۳۳)_۴$ جمع کرد.

۲. تفریق اعداد در مبناهای متفاوت

تفاضل اعداد در مبناهای متفاوت هم مانند جمع آن‌ها صورت می‌گیرد. فقط باید به جای عمل جمع، عمل تفریق را انجام دهیم (در صورتی که پایه‌ها برابر نباشند، ابتدا باید پایه‌ها را یکسان کرد).

مثال ۱. تفریق در مبنای ۸ را محاسبه کنید:

$(۷۶۵)_۸-(۵۶۴)_۸=?$

حل: این دو عدد را در مبنای ۸ زیر یکدیگر می‌نویسیم:

$$\left(\begin{array}{r} ۷۶۵ \\ -\underline{۵۶۴} \\ ۲۰۱ \end{array}\right)_۸$$

بنابراین:

$(۷۶۵)_۸-(۵۶۴)_۸=(۲۰۱)_۸$

مثال ۲. تفریق در مبنای ۷ را محاسبه کنید:

$(۳۴۵)_۷-(۲۵۶)_۷=?$

حل: می‌بینیم که رقم ۶ را نمی‌توان از ۵ کم کرد.

$$\left(\begin{array}{r} ۳۴۵ \\ -\underline{۲۵۶} \\ ... \end{array}\right)_۷$$

بنابراین در عدد ۳۴۵ از رقم سمت چپ ۵ (در بالای ۶ که هر واحد آن ۷ واحد یکان است) ۱ واحد کم می‌کنیم و در عوض ۷ واحد به رقم یکان ۳۴۵ یعنی ۵ می‌افزاییم. پس:

$$\left(\begin{array}{r} ۳۳\overset{(۷)}{۵} \\ -\underline{۲۵\ ۶} \\ ۶ \end{array}\right)_۷$$

در ستون دوم باز رقم ۵ را نمی‌توان از رقم ۳ (در بالای آن) کم کرد. بنابراین در ستون سوم، از رقم ۳ در عدد ۳۳۵، ۱ واحد کم می‌کنیم و در عوض ۷ واحد به رقم ۳ در سمت راست آن می‌افزاییم. پس:

$$\left(\begin{array}{r} ۲\ \overset{(۷)}{۳}\ \overset{(۷)}{۵} \\ -\underline{۲\ ۵\ ۶} \\ ۰\ ۵\ ۶ \end{array}\right)_۷$$

حال می‌توان ارقام پائین را از ارقام نظیر خود در بالا کم کرد. بنابراین:

$(۳۴۵)_۷-(۲۵۶)_۷=(۵۶)_۷$

امتحان عملیات در مبنای ۱۰:

$(۳۴۵)_۷-(۲۵۶)_۷=(۵+۴\times۷+۳\times۷^۲)_{۱۰}-(۶+۵\times۷+۲\times۷^۲)_{۱۰}$

$=(۱۸۰)_{۱۰}-(۱۳۹)_{۱۰}=(۴۱)_{۱۰}$

$(۴۱)_{۱۰}=(۵۶)_۷$

۳. ضرب اعداد در مبناهای متفاوت

ضرب اعداد در هر مبنا نیز مانند ضرب دو عدد در مبنای ۱۰ صورت می‌گیرد، با این تفاوت که باید به جای مبنای ۱۰، در مبنای دیگر کار کنیم (در صورتی که مبناها برابر نباشند، ابتدا باید مبناها را برابر کنیم).

مثال ۱. ضرب این دو عدد در مبنای ۴ را محاسبه کنید:

$(۲۳۳)_۴\times(۲)_۴=?$

حل: دو عدد را در مبنای ۴ زیر هم می‌نویسیم:

$$\left(\begin{array}{r} ۲۳۳\times \\ \underline{۲} \\ ... \end{array}\right)_۴$$

در ستون اول داریم: $۲\times۳=(۶)_{۱۰}$. حال اگر ۶ را در مبنای ۴ بنویسیم، خواهیم داشت:

$(۶)_{۱۰}=(۱۲)_۴$

از عدد $(۱۲)_۴$ رقم ۲ را در ستون اول می‌نویسیم و رقم ۱ را به حاصل ضرب (۳×۲) در ستون دوم اضافه می‌کنیم. یعنی در ستون دوم حاصل ضرب، $۲\times۳+۱=۷$ را باید در مبنای ۴ بنویسیم:

$(۷)_{۱۰}=(۱۳)_۴$

رقم ۳ عدد $(۱۳)_۴$ را در ستون دوم می‌نویسم و رقم ۱ را به حاصل ضرب (۲×۲) در ستون دوم اضافه می‌کنیم:

$۲\times۲+۱=۵$

پس رقم سوم حاصل ضرب ۵ است. در نتیجه

حاصل ضرب نهایی را می‌توان نوشت:

$(۲۳۳)_۴\times(۲)_۴=(۵۳۲)_۴$

مثال ۲. ضرب این دو عدد در مبناهای متفاوت را محاسبه کنید:

$(۱۳۴)_۵\times(۱۰۱۱)_۲=?$

حل: ابتدا پایه‌ها را یکسان می‌کنیم. هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$(۱۳۴)_۵=(۴+۳\times۵+۱\times۵^۲)_{۱۰}=(۴۴)_{۱۰}$

$(۱۰۱۱)_۲=(۱+۱\times۲+۰\times۲^۲+۱\times۲^۳)_{۱۰}=(۱۱)_{۱۰}$

$(۱۳۴)_۵\times(۱۰۱۱)_۲=(۴۴)_{۱۰}\times(۱۱)_{۱۰}=۴۴\times۱۱=(۴۸۴)_{۱۰}$

تقسیم اعداد در مبناهای متفاوت

برای تقسیم دو عدد بر یکدیگر، ابتدا باید مبناها را یکسان کرد. فرض کنیم تقسیم زیر مورد نظر باشد:

$(۷۴)_۸:(۶)_۸$

برای محاسبه‌ی این تقسیم، بهترین و ساده‌ترین روش این است که هر دو عدد را در مبنای ۱۰ بنویسیم و سپس عمل تقسیم را انجام دهیم و در آخر، خارج قسمت را به هر مبنای دلخواهی که مورد نظر است، تبدیل کنیم:

$(۷۴)_۸=(۴+۷\times۸)_{۱۰}=(۶۰)_{۱۰}$ و $(۶)_۸=(۶)_{۱۰}$

$(۷۴)_۸:(۶)_۸=(۶۰)_{۱۰}:(۶)_{۱۰}=۶۰:۶=(۱۰)_{۱۰}$

$(۱۰)_{۱۰}=(۱۲)_۸$

در این جا می‌توان حاصل تقسیم را نوشت:

$(۷۴)_۸:(۶)_۸=(۱۲)_۸$

مثال ۱. حاصل تقسیم $(۱۲۵)_۵:(۲۶)_۷$ را در مبنای ۶ بنویسید.

حل: ابتدا هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$(۱۲۵)_۵=(۵+۲\times۵+۱\times۵^۲)_{۱۰}=(۴۰)_{۱۰}$

$(۲۶)_۷=(۶+۲\times۷)_{۱۰}=(۲۰)_{۱۰}$

$(۱۲۵)_۵:(۲۶)_۷=(۴۰)_{۱۰}:(۲۰)_{۱۰}=۴۰:۲۰=(۲)_{۱۰}=(۲)_۶$

$(۱۲۵)_۵:(۲۶)_۷=(۲)_۶$

مثال ۲. از برابری داده شده، مقدار x را پیدا کنید:

$(۲۴)_x:(۱۵)_۹=(۱۲)_۳$



حل: از تعریف تقسیم نتیجه می‌شود:

$(۱۵)_۹\times(۱۲)_۳=(۲۴)_x$

هر یک از عددها را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$(۱۵)_۹=(۵+۱\times۹)_{۱۰}=(۱۴)_{۱۰}$

$(۱۲)_۳=(۲+۱\times۳)_{۱۰}=(۵)_{۱۰}$

بنابراین:

$(۲۴)_x=(۱۵)_۹\times(۱۲)_۳=(۱۴)_{۱۰}\times(۵)_{۱۰}=(۷۰)_{۱۰}$

پس:

$(۲۴)_x=(۴+۲\times x)_{۱۰}=(۷۰)_{۱۰}$ ؛ $۴+۲x=۷۰$ ؛

$۲x=۶۶$ ؛ $x=\frac{۶۶}{۲}=۳۳$ ؛ $\boxed{x=۳۳}$

مثال۳. از برابری $(۳۱)_x=(۱۵)_{۲x}$ مقدار x را بیابید.

حل: ابتدا هر یک از اعداد را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$(۳۱)_x=(۱+۳x)_{۱۰}=۳x+۱$

$(۱۵)_{۲x}=(۵+۱\times(۲x))_{۱۰}=۲x+۵$

$۳x+۱=۲x+۵$ ؛ $\boxed{x=۴}$

مثال ۴. از برابری $(۳۱)_{۲x}=(۱۵)_{۲x+۲}$ مقدار x را بیابید.

حل:

$(۳۱)_{۲x}=(۱+۳(۲x))_{۱۰}=۶x+۱$

$(۱۵)_{۲x+۲}=(۵+۱(۲x+۲))=۲x+۷$

$۶x+۱=۲x+۷$ ؛ $۴x=۶$ ؛ $x=\frac{۳}{۲}=۱/۵$

با جایگزین کردن مقدار x خواهیم داشت:

$(۳۱)_۳=(۱۵)_۵$

مقدار $x=۱/۵$ مورد قبول نیست؛ زیرا در $(۳۱)_{۲x}$ رقم ۳ و در $(۱۵)_{۲x+۲}$ نیز رقم ۵ موجود است. بنابراین مسأله جواب ندارد.

تمرین: جاهای خالی را با عددهای مناسب پر کنید.

۱) $(۳۴۵)_۷\times(۲۳۴)_۷=(...)_۵$

۲) $(۱۲۳)_۴+(۳۱۲)_۴+(۲۱۳)_۴+(۱۲۳۴)_۵=(...)_۶$

۳) $(۱۰۱۰۱۰۱)_۲+(۱۱۰۱۱۰۱۱)_۲=(...)_۲=(...)_۴$

۴) $(۶۵۴)_۸-(۵۴۳)_۸=(...)_۸=(...)_۲=(...)_۴$

۵) $(۲۳۴)_۵\times(۱۲۰۲۰۱)_۳=(...)_۵=(...)_۳=(...)_۴$

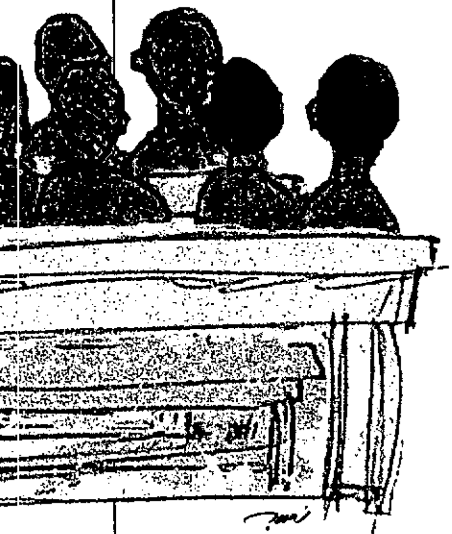
۶) $(۸۴)_۹:(۴)_۹=(...)_۹=(...)_۸=(...)_۷=(...)_۶$

۷. از برابری $(۳۴)_{x-۱}=(۱۴)_{x+۱}$ مقدار x را بیابید.

شرایط تدریس ریاضی

صاحبدلی به مدرسه آمد ز خانقاه — بگسست عهد صحبت اهل طریق را
گفتم میان عالم و عابد چه فرق بود — تا اختیار کردی از آن این فریق را
گفت آن گلیم خویش بدر می برد زموج — وین جهد می کند که بگیرد غریق را

دو سه سالی است که دوست و همکار گرامی، **آقای امیری**، مؤلف و سردبیر محترم مجله ی ریاضی رشد برهان متوسطه، بارها از چند نفراز ما، اعضای هیأت تحریریه ی مجله خواسته اند که روش تدریس ریاضی را بنویسیم. بنده بارها خدمت ایشان و همکاران عرض کرده ام، شاید به تعداد معلمان خوب، روش تدریس وجود داشته باشد؛ زیرا تدریس در یک کلاس به عوامل متفاوتی از جمله: تعداد دانش آموزان، بضاعت علمی آن ها، محل فیزیکی کلاس و مدرسه، شرایط معلم و... بستگی دارد. به همین علت، تاکنون نتوانسته ام در این مقوله کاری انجام دهم تا این که به فکر افتادم، به جای روش تدریس ریاضی، شرایط تدریس ریاضی یک معلم را تا آن جا که در بضاعت دارم، توضیح دهم.



ناگفته پیداست، آنچه که می نویسم، فقط و فقط حاصل تجربه ی چهل و چند ساله ی تدریس خودم است. امکان دارد، قسمت هایی از این نوشته که ارائه خواهد شد، صحیح نباشد و از این بابت از صاحب نظران و دست اندرکاران پوزش می طلبم.

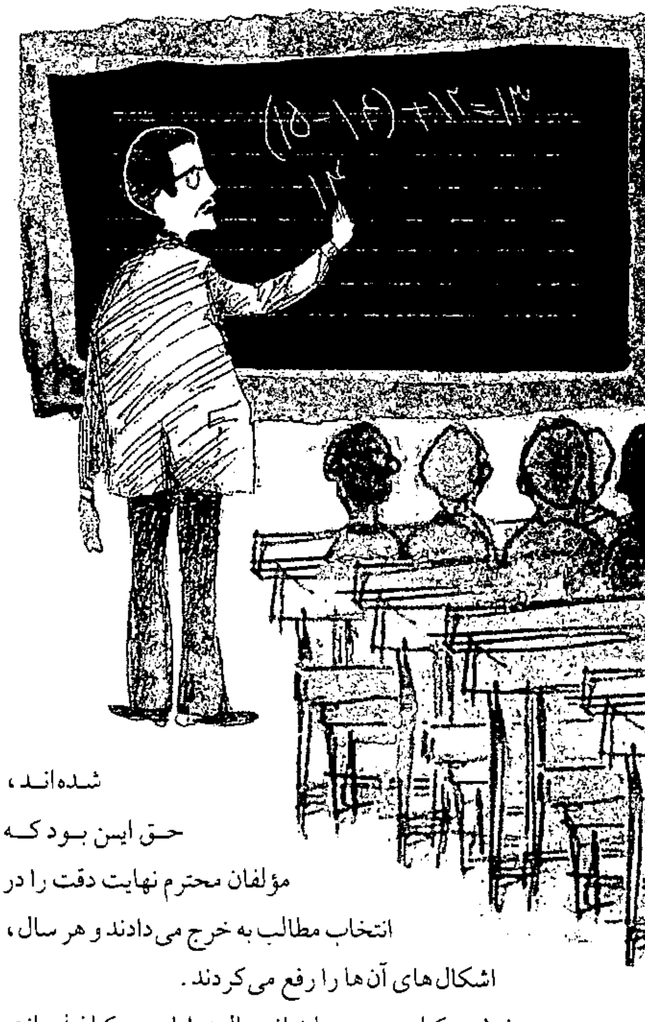
در این نوشته می کوشم، به موضوعات گوناگون مربوط به تدریس ریاضی یک معلم، تا آن جا که در توان دارم، فهرست وار اشاره کنم.

۱. بضاعت علمی معلم

مسلم است که برای انجام هر کاری ابزاری مورد نیاز است. برای تدریس هم بضاعت علمی مناسب برای یک مدرس لازم و ضروری است. معلم باید بر درس و حواشی آن کاملاً مسلط باشد. او باید از کتاب هایی که در زمینه ی تدریس آن درس نوشته شده اند، استفاده کند. البته کتاب های درسی ملاک اصلی تدریسند، ولی نباید فقط به کتاب های درسی اکتفا کرد. اگر چه در کتاب های درسی ریاضی، بعضی مطالب به خوبی نوشته شده اند، ولی مسلم است که این کتاب ها ضعف هایی هم دارند. باید بپذیریم که این کتاب ها کمی شتابزده نوشته شده اند و خالی از اشکال نیستند. برای مثال، در درس های حساب، جبر، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال، حتی ۵ مسأله ی ترکیبی هم آورده نشده است. چون این کتاب ها برای کل دانش آموزان کشور نوشته

درس اول

احمد قندهاری



شده اند،
حق این بود که
مؤلفان محترم نهایت دقت را در
انتخاب مطالب به خرج می‌دادند و هر سال،
اشکال‌های آن‌ها را رفع می‌کردند.

نوشتن کتاب درسی باید از حالت اداری و کاغذبازی معمول خارج شود و برای تألیف آن‌ها، باید گروه‌هایی تشکیل شوند و آنانی که هم علاقه‌مند هستند و هم از بضاعت علمی خوبی برخوردارند، تحت نظارت کلی وزارت آموزش، مبادرت به نوشتن کنند.

بارها در جلسات مجله‌ی برهان خدمت همکاران گرامی عرض کرده‌ام که باید برای کل ریاضیات دبیرستانی سه کتاب نوشته شود:

یک کتاب شامل تمام مطالب هندسه، یک کتاب شامل ریاضی ۱ و ۲، حسابان، مثلثات، حساب دیفرانسیل و انتگرال، و یک کتاب هم برای درس‌های آمار و احتمال، ریاضیات گسسته و ... در کتاب‌ها از کاغذ مرغوب و از مقوای قوی برای جلد استفاده شود و هر ساله، تعداد کمی کتاب چاپ شود. برای مثال، در کتاب ریاضی ۱ و ۲، حسابان، حساب دیفرانسیل و انتگرال، یک کتاب مثلاً با ۲۶ فصل نوشته شود و مثلاً ۵ فصل در سال اول، ۶ فصل در سال دوم، ۷ فصل در سال سوم و ۸ فصل در سال چهارم تدریس شود.

به این ترتیب، اولاً دیگر لازم نیست که مثلاً معادله‌ی درجه دوم، هم در کتاب ریاضی ۲ نوشته شود و هم در درس حسابان، یا مثلاً حد و پیوستگی و مشتق پذیری، هم در حسابان بیاید هم در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، و این دوباره کاری‌ها از بین می‌رود. ثانیاً، اگر معلمی که دارد فصل بیستم را درس می‌دهد، ضمن تدریس به موردی برخورد که مربوط به فصل هشتم است، کافی است شماره‌ی صفحه‌ی آن را یادآوری کند تا اگر دانش‌آموزی اشکال داشت، به راحتی به آن دسترسی داشته باشد.

کمی از موضوع بحث دور شدیم. داشتم عرض می‌کردم که اطلاعات علمی مناسب از لوازم اولیه‌ی تدریس هر معلمی است؛ البته اگر معلم به درستی انتخاب شود. امروزه متأسفانه اغلب داوطلبان رشته‌ی ریاضی که در رشته‌های مهندسی قبول نمی‌شوند، به ناچار دانشگاه تربیت معلم را انتخاب می‌کنند. به عواملی که موجب این شرایط شده است، اشاره نمی‌کنم؛ زیرا دست اندرکاران بهتر از بنده از موضوعات مطلع هستند. از طرف دیگر، سال‌هاست که ملاحظه می‌کنیم، مهندس یا پزشکی که نتواند کار مناسبی پیدا کند، به تدریس روی می‌آورد. در حالی که معلم، علاوه بر داشتن تحصیلات

دانشگاهی، باید روش تدریس، روان شناسی، تاریخ آموزش و پرورش و... را بداند که متأسفانه این آقایان در این زمینه‌ها مسلماً اطلاعات کافی ندارند. اگر هم کار بعضی از این آقایان مورد رضایت است، نه به خاطر علاقه‌مندی به تدریس، بلکه به دلیل کسب درآمد بیش‌تر است. در اکثر کشورها، حتی لوله کش باید اجازه‌ی کار لوله کشی را کسب کند تا بتواند، لوله کشی کند؛ ولی در این جا فرزندان خود را به دست کسانی می‌سپاریم که شاید بعضی از آن‌ها صلاحیت تدریس را نداشته باشند. گفتنی‌ها فوق‌العاده زیادند و هر دلسوزی را وامی‌دارند که از هر فرصتی برای طرح آن استفاده کند.

عرض می‌کردم که معلم باید استطاعت علمی کافی داشته باشد تا بتواند، به‌درستی از عهده‌ی تدریس برآید. فرض بفرمایید معلمی می‌خواهد اتحادها را تدریس کند. ممکن است این طور شروع کند که ابتدا اتحاد اول را بگوید و سپس چند مثال و احیاناً چند تست حل کند و کارش را پایان دهد. دانش‌آموزان هم که نمی‌دانند موضوع از چه قرار است، می‌گویند اتحاد را درس داد و مثال و تست هم حل کرد.

برای بسیاری از همکاران، تفاوت بین مثال، مسأله و تست روشن نیست! کسی که اتحاد را می‌خواهد تدریس کند، ابتدا باید معنی لغوی اتحاد را بیان کند و سپس تفاوت بین معادله و اتحاد را روشن سازد. تعریف معادله و تعریف اتحاد را روی تخته‌ی کلاس بنویسد و با ذکر مثال، مفاهیم آن‌ها را برای دانش‌آموزان روشن کند. پس از آن است که می‌تواند شروع کند به بیان اتحاد اول چنانچه بتواند اثبات هندسی اتحاد اول را هم بیان کند و شکل بکشد، مطلب جالب‌تر خواهد شد.

مسلم است لازمه‌ی این کار مراجعه به کتاب‌های مختلف است. آن‌ها که تازه کار تدریس را شروع کرده‌اند، حتماً باید یک بار درس خود را بنویسند و سپس اشکالات آن را رفع کنند. به جای دانش‌آموز از خود سؤال کنند و درصدد پاسخ برآیند، و پس از تسلط، خلاصه‌ی درس را یادداشت کنند. در این صورت می‌توان گفت، این معلم شرایط لازم را برای تدریس دارد.

ممکن است همکاران گرامی بفرمایند: «با این حقوق‌ها که نمی‌شود این کارها را انجام داد.» باید به اطلاع برسانم مسائل جانبی، هر قدر هم که مهم باشند، نباید در انجام کار، به‌خصوص در امر تدریس، دخالت داده شوند. یک مثال ساده عرض کنم. اگر پلیسی که شب‌ها مشغول گشت است، ببیند دزدی دارد از دیوار خانه‌ای بالا می‌رود و پیش خود بگوید، مگر چه‌قدر به من حقوق می‌دهند که با این دزد درگیر شوم و برای خودم دردسر درست کنم و دزد را تعقیب نکند، آیا بنده و شما می‌توانیم شب‌ها به راحتی استراحت کنیم؟ مسأله‌ی حقوق و دستمزد مهم است، ولی نباید در کار شخص،



به‌خصوص در امر تدریس، اثر سوء بگذارد.

اگر معلمی به کلاس درس برود و یاد کارهای دیگری بیفتد، به درد معلمی نمی‌خورد؛ باید به فکر کار دیگری باشد. تعدادی دانش‌آموز با نهایت علاقه نشسته‌اند که آموزش ببینند، والدین آن‌ها با چه علاقه و امیدی آن‌ها را به مدرسه می‌فرستند، آیا وجدان و انسانیت اجازه می‌دهد که تدریس به درستی انجام نشود؟ کمیِ حقوق و دستمزد، چه ربطی به دانش‌آموز و والدین آن‌ها دارد؟ یا نباید به کلاس رفت یا باید با همه‌ی آنچه در توان داریم کوشش کنیم تا وجدان ما از ما راضی باشد. به هیچ چیز دیگر هم جز آموزش این گل‌های سر سبد خانواده‌ها و این اداره کنندگان مملکت در آینده، فکر نکنیم.

۲. سرو وضع تمیز و مناسب

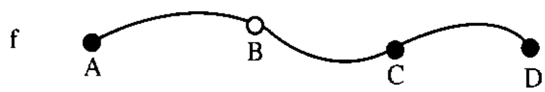
نباید با سرو وضع ژولیده و نامناسب به کلاس رفت. در ضمن نباید لباس‌های مد روز پوشید. لباس به معنی پوشش است. به خصوص لباس معلم برای بچه‌ها الگوست. اگر لباس شما تمیز و مناسب باشد، اثر مطلوبی روی دانش‌آموزان دارد. سرو وضع غیر عادی، مدتی ذهن دانش‌آموزان را به خود مشغول می‌کند و از توجه آن‌ها به درس می‌کاهد. باید توجه داشته باشیم، هر حرکتی و هر نوع رفتاری می‌تواند اثرات خوب و بد روی دانش‌آموزان داشته باشد.

۳. بیان مقدمه‌ی مناسب برای شروع درس

برای شروع تدریس در هر مبحث باید مقدمه‌ای طرح و عنوان کرد؛ به دو علت: اول آن‌که دانش‌آموز از حال و هوای خودش خارج شود و مطلب را جذب کند، و دوم آن‌که این مقدمه باید از مطالبی باشد که دانش‌آموزان با آن‌ها آشنا هستند تا باعث شود، با رغبت بیش‌تری به درس توجه کنند.

اگر معلم ریاضی برای تدریس مبحث پیوستگی، ابتدا معنی پیوستگی و متصل بودن را بیان کند و به طور خلاصه، حد تابع در یک نقطه را یادآوری کند و شکل بکشد، دانش‌آموزان با رغبت بیش‌تری به درس توجه خواهند کرد.

مثلاً می‌تواند شکل ساده‌ی زیر را بکشد.



و با همین شکل مختصر، بدون بیان تعریف ریاضی، شرح دهد:

۱. تابع در نقطه‌ی B حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

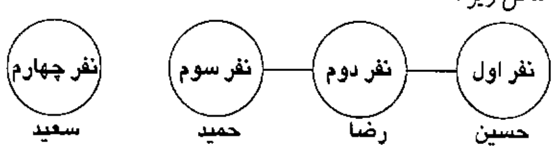
۲. تابع در نقطه‌ی C پیوسته است.

۳. تابع در نقطه‌ی A پیوسته نیست، ولی پیوستگی راست دارد.

۴. تابع در نقطه‌ی D پیوسته نیست، ولی پیوستگی چپ دارد.

در ریاضی باید مطالب دقیق بیان شوند. مثلاً اگر در مورد شکل قبل بگوییم، تابع در نقاط A، B و D پیوسته نیست، ضمن این‌که درست است، کامل نیست. همان طوری که عرض شد، نوع ناپیوستگی در نقاط A، B و D متفاوت است.

یادم می‌آید، هر وقت می‌خواستم مبحث پیوستگی در یک نقطه را تدریس کنم، چهار نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کردم. آن‌ها را پای تخته می‌آوردم و به آن‌ها می‌گفتم، پشت به دانش‌آموزان و رو به تخته بایستید و دست یکدیگر را بگیرید و به نفر چهارم می‌گفتم شما دست کسی را نگیر؛ مانند شکل زیر:



می‌گفتم، حسین پیوسته نیست، ولی پیوستگی چپ دارد. رضا پیوسته است. حمید هم پیوسته نیست، ولی پیوستگی راست دارد. و سعید کمی سرتق است: نه پیوستگی راست دارد، نه پیوستگی چپ. اگر این کار باعث تعجب و شاید لبخندی هم بشود، چه بهتر؛ خستگی بچه‌ها کم‌تر می‌شود، ولی هیچ گاه درس پیوستگی و مفهوم آن را فراموش نمی‌کنند. این مقدمه باعث می‌شود که بقیه‌ی درس هم در ذهن آن‌ها به درستی جایگزین شود.

معادله‌های گنگ

میرشهرام صدر

اشاره

در این شماره، درباره‌ی معادله‌های گنگ بحث خواهیم کرد و حل نامعادله‌های گنگ را در شماره‌ی آینده‌ی مجله ملاحظه خواهید کرد.

عبارت گنگ

اگر عبارت جبری گویا نباشد، «عبارت جبری گنگ» نامیده می‌شود. در چنین عبارت‌هایی، رادیکال‌های مجهول‌دار وجود دارند؛ مانند:

$$۲\sqrt{x+۲}-۱\ ;\ \ x^{۲}-۳x\sqrt{x^{۲}-۴}\ ;\ \ \frac{\sqrt[۳]{x+۱}}{x-۱}+۲\ ;$$

$$۳\sqrt{x+۱}-۳\sqrt{x^{۲}-۲x}$$

تذکر. عبارت جبری $(۲+\sqrt{۳})x^{۲}-\sqrt{۲}x+\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ گنگ نیست، بلکه چند جمله‌ای درجه دوم است و ضریب‌های آن اعداد گنگ هستند.

دامنه‌ی عبارت‌های جبری گنگ

هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه‌ی زوج موجود باشد، این رادیکال وقتی تعریف شده است که عبارت زیر آن بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. یعنی $\sqrt{f(x)}$ وقتی تعریف شده است که $f(x) \geq ۰$.

تذکر. عبارت $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ وقتی تعریف شده است که $g(x) > ۰$؛ چون کسر وقتی تعریف شده است که مخرج آن صفر نباشد.

هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه‌ی فرد موجود باشد، چون زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد، هر عددی می‌تواند قرار گیرد، پس در این حالت $D = \mathbb{R}$.

مثال۱. دامنه‌ی عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۳x+\sqrt{x-۲}$

ب) $۲\sqrt{۳x+۱}+\sqrt{۴-۲x}$

ج) $\sqrt{۳-x}-\sqrt{۷+x}+\sqrt{۱۶+۲x}$

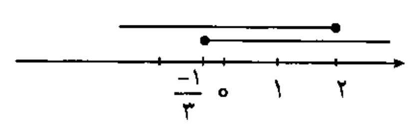
د) $\frac{\sqrt{x^{۲}-۱۶}}{\sqrt{x-۳}}+\sqrt{x+۳}$



حل: الف) $x-۲\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۲ \Rightarrow D=[۲,+\infty)$

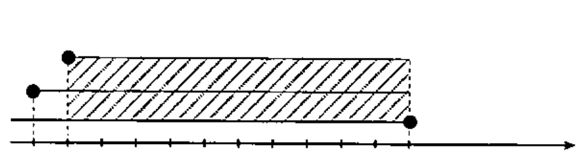
ب)

$$\begin{cases} ۳x+۱\ge ۰ \Rightarrow ۳x\ge -۱ \Rightarrow x\ge -\frac{۱}{۳} \\ \text{و} \\ ۴-۲x\ge ۰ \Rightarrow ۴\ge ۲x \Rightarrow x\le ۲ \end{cases} \Rightarrow D=[-\frac{۱}{۳},۲]$$



ج)

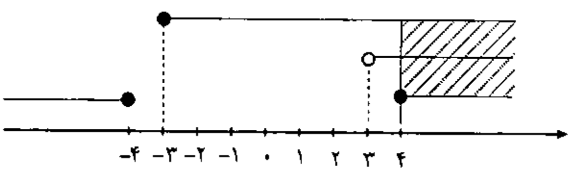
$$\begin{cases} ۳-x\ge ۰ \Rightarrow -x\ge -۳ \Rightarrow x\le ۳ \\ ۷+x\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۷ \\ ۱۶+۲x\ge ۰ \Rightarrow ۲x\ge -۱۶ \Rightarrow x\ge -۸ \end{cases} \Rightarrow D=[-۷,۳]$$



برای
دانش آموزان
سال دوم متوسطه

د)

$$\begin{cases} x^۲-۱۶\ge ۰ \Rightarrow x^۲\ge ۱۶ \Rightarrow x\ge ۴ \text{ یا } x\le -۴ \\ x-۳>۰ \Rightarrow x>۳ \\ x+۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۳ \end{cases} \Rightarrow D=[۴,+\infty)$$



حل معادله‌ی شامل عبارت گنگ

معادله‌هایی را که در آن‌ها عبارت‌های گنگ وجود داشته باشند، معادله‌های گنگ می‌نامیم. مراحل حل این معادله‌ها عبارتند از:

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب (دامنه‌ی متغیر) معادله را که همان دامنه‌ی عبارت‌های گنگ معادله است، به دست می‌آوریم و آن را D می‌نامیم. در صورتی که $D \ne \varnothing$، مراحل بعدی را انجام می‌دهیم و در غیر این صورت، معادله‌ی گنگ جواب ندارد.

مرحله‌ی دوم: اگر معادله شامل یک رادیکال باشد، آن رادیکال را یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر می‌بریم. سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

اگر معادله بیش از یک رادیکال داشته باشد، یک رادیکال را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها و رادیکال‌ها را به طرف دیگر می‌بریم. سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی آن رادیکال می‌رسانیم و پس از ساده کردن، این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر در معادله عبارت

گنگ موجود نباشد.

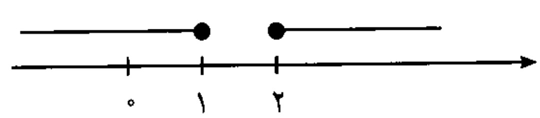
مرحله‌ی سوم: از مرحله‌ی دوم به یک معادله می‌رسیم که پس از حل آن، ریشه‌هایی به دست می‌آیند. این ریشه‌ها در صورتی قابل قبول هستند که هم در دامنه‌ی جواب معادله‌ی گنگ و هم در خود معادله‌ی گنگ صدق کنند.

مثال ۲. نشان دهید معادله‌ی $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۱-x}=x+۳$ ریشه ندارد.

حل:

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب معادله را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \\ ۱-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۱ \end{cases} \Rightarrow D=\varnothing$$



چون $D=\varnothing$، پس معادله ریشه ندارد.

مثال ۳. ابتدا دامنه‌ی متغیر هر یک از معادله‌های زیر را تعیین کنید و سپس آن‌ها را حل کنید.

الف) $۳+\sqrt{x-۷}=۸$

ب) $\sqrt{x}-x=-۲۰$

ج) $۵-۲\sqrt{۲x-۱}=۱$

د) $\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{x-۳}=۰$

هـ) $\sqrt{x}+\sqrt{x+۵}=۵$

و) $\sqrt{x}+۵=-\sqrt{۷x+۱}$

ز) $\frac{۱}{\sqrt{x-۵}}=۳$

ح) $\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}+\frac{۱}{۲-\sqrt{x}}=۲$

ط) $\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۳]{۴}$

ی) $\frac{۸}{\sqrt{۱۰-۲x}}-\sqrt{۱۰-۲x}=۲$

حل: الف) $۳+\sqrt{x-۷}=۸$

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب معادله را می‌یابیم:

$x-۷\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۷ \Rightarrow D=[۷,+\infty]$

مرحله‌ی دوم: رادیکال را یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر را به طرف دیگر معادله می‌بریم:

$۳+\sqrt{x-۷}=۸ \Rightarrow \sqrt{x-۷}=۵$

اکنون دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال، یعنی عدد ۲ می‌رسانیم:

$(\sqrt{x-۷})^۲=۵^۲ \Rightarrow x-۷=۲۵ \Rightarrow x=۳۲\in D$

مرحله‌ی سوم: x=۳۲ را در معادله قرار می‌دهیم:

$x=۳۲ \Rightarrow ۳+\sqrt{۳۲-۷}=۸ \Rightarrow ۳+\sqrt{۲۵}=۸ \Rightarrow ۳+۵=۸$

درست است.

چون ریشه‌ی به دست آمده یعنی x=۳۲ هم در دامنه‌ی معادله و هم در خود معادله صدق می‌کند، پس قابل قبول است.

ب) $\sqrt{x}-x=-۲۰$

مرحله‌ی اول:

$x\geq ۰ \Rightarrow D=[۰,+\infty)$

مرحله‌ی دوم:

$$\sqrt{x}-x=-20\Rightarrow \sqrt{x}=x-20$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x})^2=(x-20)^2$$
$$\Rightarrow x=x^2-40x+400\Rightarrow x^2-41x+400=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{41\pm 9}{2}\to \begin{cases} x=25\in D \\ x=16\in D\end{cases}$$

مرحله‌ی سوم:

$$x=25\Rightarrow \sqrt{25}-25=-20\Rightarrow 5-25=-20\Rightarrow -20=-20$$

درست است.

$$x=16\Rightarrow \sqrt{16}-16=-20\Rightarrow 4-16=-20\Rightarrow -12=-20$$

نادرست است.

چون $x=25$ هم در دامنه‌ی معادله و هم در معادله صدق می‌کند، پس $x=25$ ریشه‌ی معادله است و چون $x=16$ در معادله صدق نمی‌کند، پس این ریشه غیرقابل قبول است.

ج)

$$5-2\sqrt{2x-1}=1$$

مرحله‌ی اول: $2x-1\geq 0\Rightarrow x\geq \frac{1}{2}\Rightarrow D=[\frac{1}{2},+\infty)$

مرحله‌ی دوم: $5-2\sqrt{2x-1}=1\Rightarrow -2\sqrt{2x-1}=-4$

$$\Rightarrow (-2\sqrt{2x-1})^2=(-4)^2$$
$$\Rightarrow 4(2x-1)=16\Rightarrow 8x=20\Rightarrow x=\frac{5}{2}\in D$$

مرحله‌ی سوم:

$$x=\frac{5}{2}\Rightarrow 5-2\sqrt{2(\frac{5}{2})-1}=1\Rightarrow 5-2\sqrt{5-1}=1$$
$$\Rightarrow 5-4=1\Rightarrow 1=1$$

درست است.

$x=\frac{5}{2}$ جواب معادله است.

د)

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-3}=0$$

$$\begin{cases} 2x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{3}{2} \\ x-3\geq 0\Rightarrow x\geq 3\end{cases}\Rightarrow D=[3,+\infty)$$

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-3}=0\Rightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{x-3}$$

$$(\sqrt{2x+3})^2=(\sqrt{x-3})^2\Rightarrow 2x+3=x-3\Rightarrow x=-6\notin D$$

غیرقابل قبول

چون ریشه‌ی به دست آمده در دامنه‌ی معادله صدق نمی‌کند، پس این ریشه غیرقابل قبول است.

هـ)

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x+5\geq 0\Rightarrow x\geq -5\end{cases}\Rightarrow D=[0,+\infty)$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5\Rightarrow \sqrt{x+5}=5-\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x+5})^2=(5-\sqrt{x})^2$$
$$\Rightarrow x+5=25-10\sqrt{x}+x$$
$$\Rightarrow 10\sqrt{x}=20\Rightarrow \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4\in D$$

$x=4\Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt{4+5}=5\Rightarrow 2+3=5$ درست است.

$x=4$ جواب معادله است؛ چون هم در دامنه‌ی معادله و هم در معادله صدق می‌کند.

و) راه اول:

$$\sqrt{x}+5=-\sqrt{7x+1}$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 7x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{1}{7}\end{cases}\Rightarrow D=[0,+\infty)$$

$$(\sqrt{x}+5)^2=(-\sqrt{7x+1})^2\Rightarrow x+10\sqrt{x}+25=7x+1$$
$$\Rightarrow 10\sqrt{x}=6x-24\Rightarrow 5\sqrt{x}=3x-12\Rightarrow (5\sqrt{x})^2=(3x-12)^2$$
$$\Rightarrow 25x=9x^2-72x+144\Rightarrow 9x^2-97x+144=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{97\pm 65}{18}\Rightarrow \begin{cases} x=9\in D \\ x=\frac{16}{9}\in D\end{cases}$$

نادرست است . $x=9 \Rightarrow \sqrt{9}+5=-\sqrt{7\times 9+1} \Rightarrow 8=-8$

نادرست است . $x=\frac{16}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{9}}+5=-\sqrt{7\times\frac{16}{9}+1} \Rightarrow \frac{19}{3}=-\frac{11}{3}$

این معادله جواب ندارد، زیرا ریشه‌های به دست آمده در معادله صدق نمی‌کنند.

راه دوم: با توجه به صورت معادله یعنی $\sqrt{x}+5=-\sqrt{7x+1}$ ملاحظه می‌کنیم، سمت چپ معادله یعنی $\sqrt{x}+5$ همواره عددی بزرگ‌تر از صفر است و طرف راست معادله یعنی $-\sqrt{7x+1}$ همواره عددی منفی است و هیچ‌گاه عددی منفی با عددی بزرگ‌تر از صفر برابر نیست. بنابراین این معادله جواب ندارد.

ز)

$$3=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

چون $\sqrt{x-5}$ در مخرج کسر قرار دارد و مخرج کسر نباید برابر با صفر شود، پس برای یافتن دامنه‌ی جواب معادله، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

$$x-5>0 \Rightarrow x>5 \Rightarrow D=(5,+\infty)$$

$$3=\frac{1}{\sqrt{x-5}} \Rightarrow 3^2=\left(\frac{1}{\sqrt{x-5}}\right)^2 \Rightarrow 9=\frac{1}{x-5}$$

$$\Rightarrow 9-\frac{1}{x-5}=0 \Rightarrow \frac{9(x-5)-1}{x-5}=0$$

$$\Rightarrow 9x-45-1=0 \Rightarrow x=\frac{46}{9}=5/\overline{1}\in D$$

$$x=\frac{46}{9} \Rightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{\frac{46}{9}-5}} \Rightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} \Rightarrow 3=\frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 3=3$$

درست است.

پس $x=\frac{46}{9}$ جواب معادله است، چون هم در معادله و هم در دامنه‌ی جواب معادله صدق می‌کند.

ح)

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}=2$$

$$x\geq 0 \Rightarrow D=[0,+\infty)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}-2=0$$

$$\Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}+\sqrt{x}+2-2(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})}=0$$

$$\Rightarrow 4-2(4-x)=0 \Rightarrow 4-8+2x=0 \Rightarrow x=2\in D$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=2 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2}+2)(2-\sqrt{2})}=2$$

درست است . $\Rightarrow \frac{4}{4-2}=2 \Rightarrow 2=2$

پس $x=2$ جواب معادله است؛ چون در دامنه‌ی جواب معادله و در خود معادله صدق می‌کند.

ط)

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{4} \Rightarrow \sqrt{\sqrt[3]{x^3\times x}}=\sqrt[3]{4} \Rightarrow \sqrt[6]{x^4}=\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{4} \quad ; \quad D=R$$

$$\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2\in D$$

درست است . $x=2 \Rightarrow \sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$

درست است . $x=-2 \Rightarrow \sqrt[3]{(-2)^2}=\sqrt[3]{4}$

پس $x=\pm 2$ جواب معادله است.

ی)

$$\frac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2$$

$$\begin{cases} 10-2x > 0 \Rightarrow x < 5 \\ 10-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{cases} \quad \Rightarrow D = (-\infty, 5)$$

با فرض $t = \sqrt{10-2x}$ داریم:

$$\frac{8}{t} - t = 2 \Rightarrow \frac{8 - t^2 - 2t}{t} = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 8 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$$

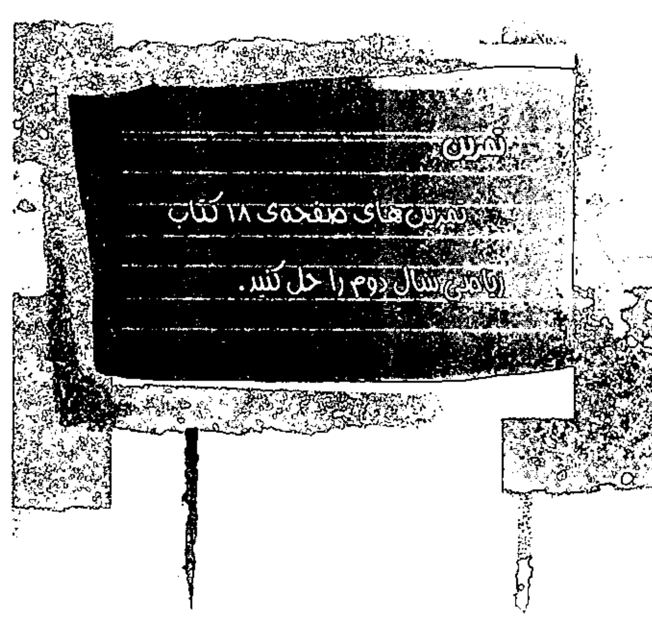
$$t = 2 \Rightarrow 2 = \sqrt{10-2x} \Rightarrow 4 = 10 - 2x \Rightarrow x = 3 \in D$$

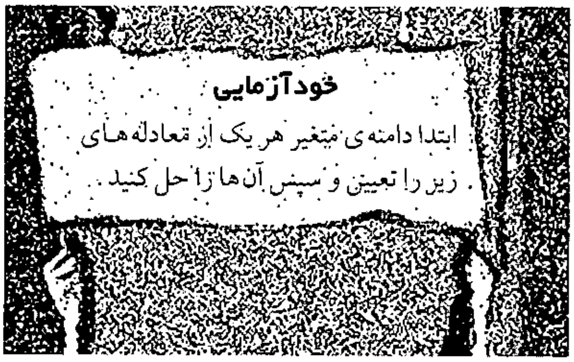
$x = 3 \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{10-6}} - \sqrt{10-6} = 2 \Rightarrow 4 - 2 = 2$ درست است.

پس $x=3$ جواب معادله است.

$$t = -4 \Rightarrow -4 = \sqrt{10-2x}$$

چون طرف چپ معادله همواره منفی و طرف راست آن همواره نامنفی است و این امکانپذیر نیست، پس در این حالت معادله جواب ندارد.





۱. $21 + \sqrt{2x-7} = x$

۲. $2\sqrt{x+5} = x + 2$

۳. $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 1$

۴. $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6$

۵. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

۶. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$

۷. $x + 12\sqrt{x} = 64$

۸. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x - 8$

۹. $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$

۱۰. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$

۱۱. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2+3x+9} = -3$

۱۲. $\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}$

۱۳. $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2} + \frac{\sqrt[3]{x}+3}{5} = 2$



هوشنگ شرقی

شهود ریاضی و استدلال شهودی

شهود در ریاضیات چیست و چه جایگاهی دارد؟ آیا استدلال بر مبنای شهود معتبر است یا خیر؟ متأسفانه کتاب درسی جبر و احتمال که این بحث در فصل اول آن و در ابتدای مبحث استدلال ریاضی مطرح شده است نیز از کنار این موضوع به سرعت گذشته و آن را به طور دقیق به خواننده معرفی نکرده است. بسیاری از دانش‌آموزان (و حتی معلمان) رشته‌ی ریاضی نیز، شناخت دقیقی از این موضوع ندارند و مفهوم آن را دقیقاً درک نکرده‌اند. برای آشنایی با این موضوع اساسی در ریاضیات، در این مقاله کوشیده‌ایم، در حد توان شهود در ریاضی را با مثال‌های متنوع بشکافیم و آن را به خوبی بازشناسی کنیم.

فرض کنید از دانش‌آموز دوره‌ی راهنمایی تحصیلی بپرسیم: دو عدد که مجموع آن‌ها مساوی ۱۰ و حاصل ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، کدامند؟ در واقع از او می‌خواهیم، با حفظ مجموع دو عدد، حاصل ضرب آن‌ها را تا حد امکان زیاد کند. چون این دانش‌آموز بیش‌تر با عددهای طبیعی سر و کار داشته، در ذهن خود ممکن است عددهای زیر را امتحان کند:

۱+۹ = ۱۰ و ۱×۹ = ۹   ۲+۸ = ۱۰ و ۲×۸ = ۱۶

۳+۷ = ۱۰ و ۳×۷ = ۲۱   ۴+۶ = ۱۰ و ۴×۶ = ۲۴

۵+۵ = ۱۰ و ۵×۵ = ۲۵

و به طور شهودی می‌فهمد که هر چه اختلاف دو عدد کم‌تر شود، حاصل ضرب آن‌ها بیش‌تر می‌شود. بنابراین به طور شهودی به این حکم می‌رسد: «هر گاه مجموع دو عدد مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد که آن دو عدد باهم مساوی باشند.»

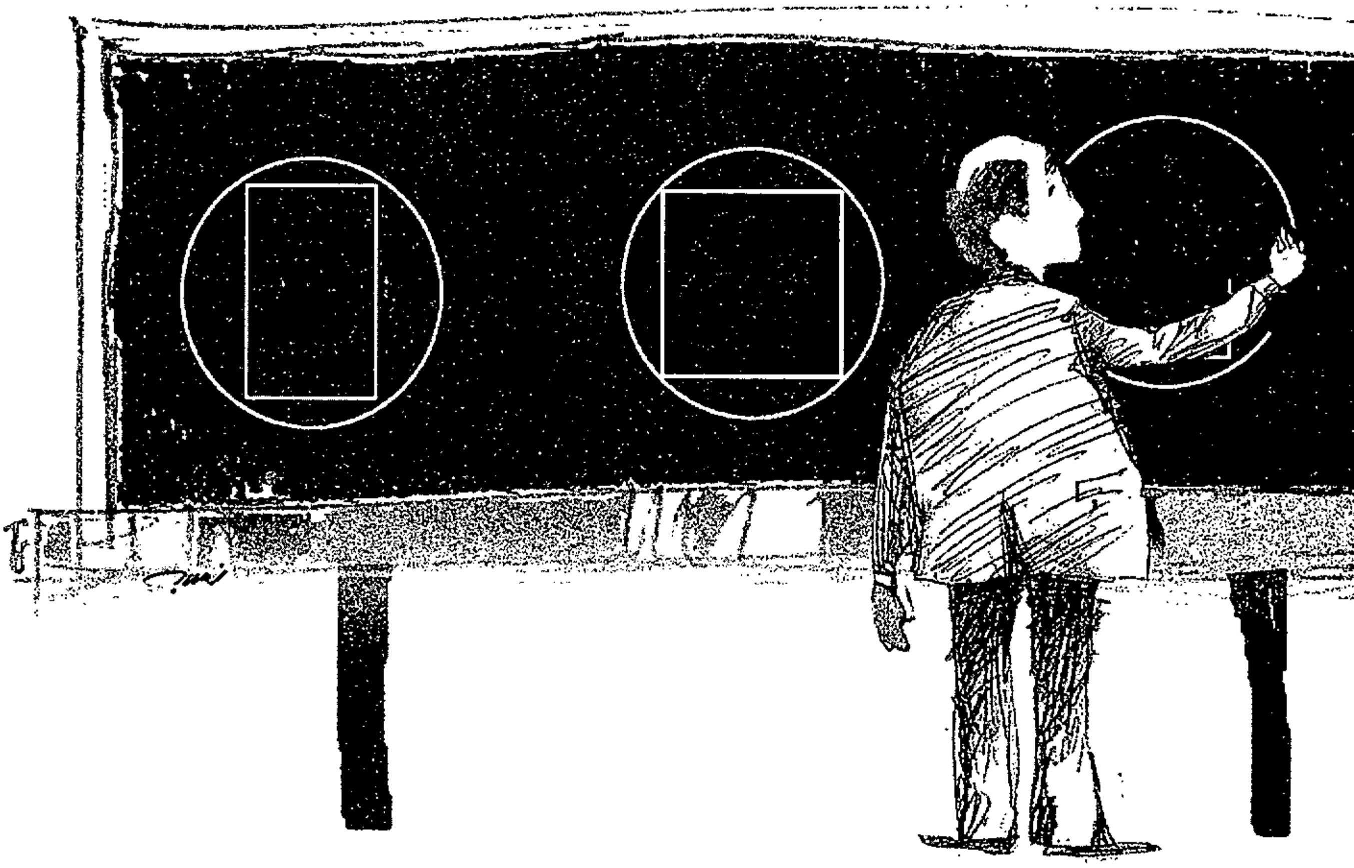
بنابراین در پاسخ به سؤال مورد نظر، عددهای ۵ و ۵ را معرفی می‌کند. اکنون سؤال مشابه دیگری را از همان دانش‌آموز می‌پرسم: «می‌خواهیم با سیمی فلزی به طول ثابت، یک مستطیل درست کنیم؛ یعنی دو سر سیم را به یکدیگر وصل و شکل بسته‌ی حاصل را به مستطیل تبدیل کنیم اگر بخواهیم مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، آن را به چه صورت درست کنیم؟» به عبارت دیگر، از میان همه‌ی مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها مقدار ثابتی (مثلاً ۲۰ cm) است، کدامیک بیش‌ترین مساحت را دارد؟

ممکن است دانش‌آموز ما با همان شهود و با کمی دقت به جواب برسد، ولی دانش‌آموز دبیرستانی (که شهود قوی‌تری دارد)، حتی اگر برای اولین بار با این مسأله مواجه شود، احتمالاً فوراً می‌تواند بگوید: «مستطیل را باید به شکل مربع بسازیم». اما آیا دلیلی هم برای ادعای خود دارد؟

تجربه‌ی نویسنده که این پرسش را با دانش‌آموزان بسیاری در میان گذاشته است، نشان می‌دهد که اکثر آن‌ها، همین پاسخ را تقریباً بی‌درنگ داده‌اند، ولی علت دقیق موضوع را تنها عده‌ی انگشت شماری می‌دانستند.

اگر این دانش‌آموزان با مسأله‌ی بهینه‌سازی از کتاب «حسابان» سال سوم رشته‌ی ریاضی آشنایی دقیق داشته باشند، می‌توانند مسأله را به صورتی منظم حل کنند و به جواب برسند، در غیر این صورت، با روش استدلالی زیر هم می‌توانند به جواب برسند:

محیط این مستطیل مقدار معینی است مساوی با طول سیم



(L). یعنی براساس شکل داریم:

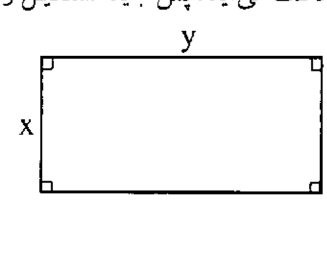
$$2(x+y)=L \Rightarrow y=\frac{L}{2}-x \qquad (1)$$

و مساحت مستطیل $S=xy$ است که در آن x و y هر دو متغیرند و با تغییر آن‌ها مقادیر متفاوتی برای S به دست می‌آید که ما به دنبال بیش‌ترین مقدار هستیم. از رابطه‌ی (۱)، y را بر حسب x در دستور $S=xy$ قرار می‌دهیم و رابطه‌ی جدید را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$S=x\left(\frac{L}{2}-x\right)=\frac{Lx}{2}-x^2=-\left(x^2-\frac{L}{2}x\right)=$$

$$-\left[\left(x-\frac{L}{4}\right)^2-\frac{L^2}{16}\right]=\frac{L^2}{16}-\left(x-\frac{L}{4}\right)^2$$

و چون $(x-\frac{L}{4})^2 \ge 0$ است، بنابراین حداکثر مقدار S وقتی است که $(x-\frac{L}{4})^2=0$ باشد (چرا؟) و در نتیجه: $S \le \frac{L^2}{16}$. یعنی حداکثر مقدار S مساوی $\frac{L^2}{16}$ است و به ازای $x=y=\frac{L}{4}$ به دست می‌آید. پس باید مستطیل را به صورت



مربعی به ضلع یک چهارم طول سیم درست کنیم.

ملاحظه می‌کنید که شما پاسخ مسأله را به طور «غریزی» می‌دانستید، ولی علت دقیق آن را با استدلال استنتاجی، آن گونه که در بالا دیدید، احتمالاً نمی‌دانستید. اگر هم می‌توانستید این گونه استدلال کنید، باز هم بدون نیاز به این استدلال، از ابتدا جواب صحیح را حدس می‌زدید.

اکنون همان سؤال را قدری پیچیده‌تر کنیم: «اگر محدودیتی در ساختن شکل بسته به کمک همان سیم به طول ثابت (L) نداشته باشیم، برای آن که مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، آن را به چه شکلی بسازیم؟ به عبارت دیگر، از بین تمام شکل‌های هندسی بسته به محیط ثابت L، کدام‌یک بیش‌ترین مساحت ممکن را دارد؟»

کمی فکر کنید. بله، درست حدس زده‌اید. تجربه‌ی من می‌گوید که اکثر دانش‌آموزان باز هم درست حدس می‌زنند. این یک قضیه‌ی معروف در ریاضیات است که «هم پیرامونی»[1] نامیده می‌شود: «از بین تمام شکل‌های بسته‌ی هندسی با محیط ثابت، دایره بیش‌ترین مساحت را دارد.»

ولی آیا می‌توانید این موضوع را ثابت کنید؟! احتمالاً این بار حتی اگر به تمام مسائل دبیرستانی (یا حتی به ریاضیات پایه‌ی دوره‌ی دانشگاهی) نیز مسلط باشید، باز هم نتوانید این

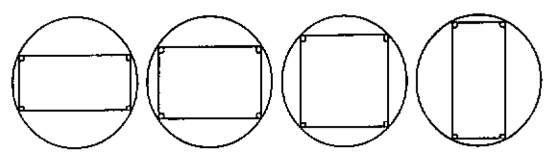
قضیه را که یک قضیه در ریاضیات عالی است، اثبات کنید. ولی شهود شما به راحتی بر درستی آن گواهی می‌دهد. اکنون به این سؤالات پاسخ دهید:

۱. از بین تمام شکل‌های هندسی بسته با مساحت ثابت، کدام‌یک کم‌ترین محیط را دارد؟

۲. با مقدار معینی ورقه‌ی کاغذ می‌خواهیم یک مکعب مستطیل بسازیم. اگر بخواهیم حجم این مکعب مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، آن را به چه شکل بسازیم؟

۳. از بین تمام شکل‌های فضایی بسته، با مساحت رویه‌ی ثابت، کدام‌یک بیش‌ترین حجم ممکن را دارد؟

۴. از بین تمام مستطیل‌هایی که در یک دایره‌ی معین می‌توان محاط کرد، کدام‌یک بیش‌ترین حجم ممکن را دارد؟ (به شکل‌های زیر دقت کنید.)



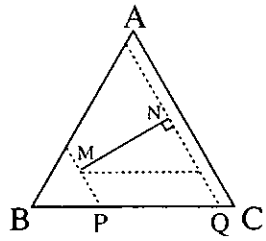
۵. از بین تمام مثلث‌هایی که در یک دایره می‌توان محاط کرد، کدام‌یک بیش‌ترین مساحت ممکن را دارد؟

۶. از بین تمام مکعب مستطیل‌هایی که می‌توان در یک کره‌ی معین محاط کرد، کدام‌یک بیش‌ترین حجم ممکن را دارد؟

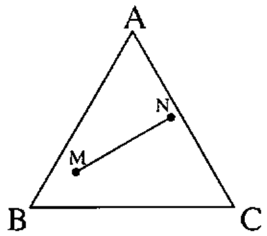
اکنون به یک سؤال دیگر از هندسه پاسخ دهید: «درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع (یا روی محیط آن) دو نقطه‌ی دلخواه M و N اختیار کنید. حداکثر فاصله‌ی دو نقطه (یعنی طول MN) چه‌قدر است؟» پاسخ این سؤال که دیگر کاملاً بدیهی است! حتی اگر از یک دانش‌آموز دوره‌ی ابتدایی (که با مفهوم مثلث و مثلث متساوی‌الاضلاع آشنا باشد) هم این سؤال را بپرسیم، احتمالاً پاسخ می‌دهد: «معلوم است! طول ضلع مثلث.»

شما هم به طور یقین به سرعت همین پاسخ را می‌دهید. ولی اگر بخواهید آن را به طور دقیق اثبات کنید، چه می‌گویید؟ باز هم تجربه‌ی من می‌گوید، اکثر دانش‌آموزان به مشکل برمی‌خورند و فقط می‌گویند: بدیهی است! اما می‌دانیم که در ریاضیات هیچ چیز بدیهی نیست. و به خصوص مطلب بالا، کاملاً قابل اثبات است.

به شکل ۲ دقت کنید.



شکل ۲



شکل ۱

در نقاط M و N دو عمود بر MN رسم می‌کنیم. MN هر وضعی که داشته باشد، این دو عمود حداقل یکی از سه ضلع مثلث را در دو نقطه که هیچ‌کدام خارج از مثلث نیستند، قطع می‌کند. مثلاً در شکل ۲، نقاط P و Q روی BC و هیچ‌یک خارج از مثلث نیست. (علت این امر چیست؟)

اکنون از M خط راستی به موازات همان ضلع (ضلع BC) رسم می‌کنیم تا NQ را در نقطه‌ی T قطع کند. حال واضح است که در مثلث قائم الزاویه‌ی MNT، وتر MT بلندترین ضلع است؛ یعنی $MT \geq MN$. و در متوازی الاضلاع MTQP، $MT=PQ$ و نیز $PQ \leq BC$. بنابراین: $MN \leq BC$ و اثبات حکم تمام است.

سؤال: بیش‌ترین فاصله‌ی دو نقطه‌ی دلخواه که درون یا روی محیط یک مربع هستند، چیست؟ می‌توانید حدس خود را اثبات کنید؟

حال به سؤال دیگر از شاخه‌ای دیگر از ریاضیات توجه کنید:

عبارت جبری $x^{10} + x^5 + 1$ را به حاصل ضرب دو پرانتز تجزیه کرده‌ایم. کدام‌یک از عبارت‌های جبری زیر، معادل یکی از دو پرانتز است؟

۱) $x^3 + x + 1$ ۲) $x^2 + x + 1$

۳) $x^2 - x + 1$ ۴) $x^5 + x + 1$

ابتدا بکوشید، با کمک درک شهودی خود گزینه‌ی درست را حدس بزنید. سپس این عبارت را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید و درستی یا نادرستی حدس خود را ببینید. چگونگی تجزیه‌ی این عبارت جبری در بسیاری از کتاب‌های کمک درسی موجود است، ولی به عنوان راهنمایی می‌گوییم: عوامل x^9 و $-x^9$، x^8 و $-x^8$، x^7 و $-x^7$ و...، x و x- را به عبارت فوق اضافه کنید و سپس با دسته‌بندی مناسب که شامل

$(x^{10}+x^9+x^8)$ و $(-x^9-x^8-x^7)$ و... می‌شود و نیز فاکتورگیری، این عبارت را تجزیه کنید. آیا درک شهودی شما درست بوده است؟

آخرین مثال ما، مثالی ساده از نظریه‌ی اعداد است. احتمالاً از دوران ابتدایی به یاد دارید که شرط بخش‌پذیری یک عدد طبیعی بر عدد ۶ چیست؟ بله، درست است. هر عدد طبیعی که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد، بر ۶ بخش‌پذیر است. آیا می‌توان این موضوع را تعمیم داد؟ شرط بخش‌پذیری یک عدد طبیعی بر ۱۵ چیست؟

باز هم حدس شما درست است: «هر عدد طبیعی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۵ بخش‌پذیر است.»

حالا ادامه می‌دهیم: هر عدد طبیعی که بر ۳ و ۷ بخش‌پذیر باشد، ... بله، درست است، بر ۲۱ بخش‌پذیر است و حتماً هر عدد طبیعی که بر ۴ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۲۰ بخش‌پذیر است. آری همه‌ی این نتیجه‌گیری‌ها درست هستند. اما حالا بگویید، آیا عددی که بر ۶ و ۴ بخش‌پذیر باشد، بر ۲۴ بخش‌پذیر است؟

با کمی اندیشه در می‌یابید که نه این‌طور نیست. مثلاً ۳۶ بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر است، ولی بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست. تفاوت این مورد با موارد قبلی چیست؟ اگر شهود خوبی داشته باشید، با کمی تفکر به این حکم کلی صحیح می‌رسید: «هرگاه a و b دو عدد صحیح و نسبت به هم اول (یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها مساوی ۱) باشند، عددی که بر هر دوی آن‌ها بخش‌پذیر باشد، بر حاصل‌ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.»

اما اگر می‌خواهید اثبات دقیق این حدس شهودی را بدانید، ناگزیر باید تا دوره‌ی پیش دانشگاهی و مطالعه‌ی دقیق بحث نظریه‌ی اعداد صبر کنید.

* * *

اکنون این بحث را با دو پرسش اساسی و پاسخ آن‌ها به پایان می‌رسانیم. پرسش نخست این است: «آیا شهود افراد گوناگون، در زمان‌های متفاوت یکسان است؟»

پاسخ به وضوح منفی است. درست است که شهود نوعی درک غریزی است، اما درک غریزی افراد گوناگون، با سطح اطلاعات و دیدگاه‌های متفاوت، یکسان نیست. سال‌ها پیش از میلاد مسیح (ع) در یونان باستان، اکثر مردم به طور شهودی احساس می‌کردند که زمین مرکز دنیاست و خورشید دور آن می‌گردد؛ زیرا آن‌ها به ظاهر می‌دیدند که هر روز خورشید از مشرق طلوع می‌کند و در مغرب فرو می‌رود و این خورشید است که می‌گردد! همچنین همه‌ی آن‌ها و نیز بسیاری از مردمان، تا قرن‌ها بعد (و در اروپا تا قرن شانزدهم میلادی) تصور می‌کردند زمین مسطح است و به دنبال یافتن پایان دنیا بودند!

البته در همان یونان باستان، فیثاغورس و پیروان او، مدور بودن و کروی بودن زمین را باور داشتند، اما برای آن دلیل محکم و منطقی نداشتند. آن‌ها با شهود خود، تنها از آن‌جایی که دیده بودند، وقتی در سفرهای دریایی یک کشتی از دوردست به ساحل نزدیک می‌شود، ابتدا دماغه و سپس بدنه‌ی آن بر ساحل نشینان آشکار می‌شود، به این باور رسیده بودند.

پس شهود افراد گوناگون، به نوع تفکر، سطح تحصیلات و حتی نوع کار آن‌ها نیز وابسته است. شهود یک دانشمند، با شهود یک فرد عادی تفاوت‌های چشمگیری دارد.

پرسش دوم این است که: «جایگاه شهود در استدلال و ریاضیات چیست؟» پاسخ این است: شهود ابزار مناسبی است برای درک موضوع از سوی دانش‌آموزان و نیز شروع مسأله و فهم آغازین آن برای پژوهشگران. اما هرگز نباید جانشین و جایگزین استدلال شود. بنابراین، استدلال شهودی پایه و اساس منطقی ندارد. تکیه‌ی بیش از حد بر شهود، به جای استدلال دقیق، دانش‌آموزان را از تفکر منطقی و اهمیت آن باز می‌دارد.

اما در عین حال استفاده‌ی به‌جا از شهود، ابزار مناسب و شایسته‌ای برای فهم مطلب است. برای مثال، در بحث حد و پیوستگی در کتاب حسابان سال سوم ریاضی، از شهود استفاده‌ی بسیار مناسبی شده است. یعنی فهم اولیه‌ی موضوع به جز این تقریباً ناممکن است. اما مفهوم دقیق و ریاضی حد و پیوستگی را دانش‌آموزان در کتاب «حساب و دیفرانسیل و انتگرال» دوره‌ی پیش دانشگاهی می‌آموزند.

در هر حال، نکته‌ی بسیار مهمی که هم دانش‌آموزان و هم معلمان رشته‌ی ریاضی باید به آن توجه اکید داشته باشند، این است که: «شهود ابزار درک است نه ابزار استدلال.»

زیرنویس ....

1. Isoperimetric Problem



منطق ریاضی

اشاره: در ادامه‌ی بحث منطق ریاضی به معرفی ترکیب شرطی در گزاره‌ها می‌پردازیم:

۳ـ ترکیبی شرطی: هرگاه بخواهیم از گزاره‌ای مانند p، گزاره‌ای همچون q را نتیجه بگیریم می‌نویسیم $(p \Rightarrow q)$ و این گزاره‌ی است که به صورت‌های زیر خوانده می‌شود: (در گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$، p را مقدم و q را تالی می‌نامند) «p نتیجه می‌دهد q را»، «q از p نتیجه می‌شود»، «اگر p آنگاه q»، «p شرط کافی است برای q» و «q شرط لازم است برای p».

ترکیب شرطی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش نادرست است که مقدم درست و تالیِ نادرست باشد (به عبارت دیگر اگر از یک گزاره‌ی درست، گزاره‌ای نادرست را نتیجه بگیریم ارزش آن گزاره‌ی شرطی نادرست است) جدول زیر گویای این مطلب است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

تذکر مهّم: همان طور که در جدول مشاهده می‌کنید در دو حالت آخر که مقدم یعنی p نادرست است ارزش $(p \Rightarrow q)$ درست بوده و به ارزش تالی یعنی q بستگی ندارد و لذا هرگاه در یک گزاره‌ی شرطی به نادرست بودن مقدم پی بردیم بلافاصله نتیجه می‌گیریم که آن گزاره‌ی شرطی همواره دارای ارزش درست بوده، و این حالت را اصطلاحاً «درستی گزاره به انتفای مقدم» می‌گویند.

تذکر مهّم: هرگاه بخواهیم درستی یک گزاره‌ی شرطی مانند $(p \Rightarrow q)$ را اثبات کنیم، فرض می‌کنیم که p درست بوده و با این فرض باید درست بودن q را اثبات کنیم. در واقع اگر p را نادرست فرض کنیم که به انتفای مقدم گزاره همواره درست بوده و به q بستگی پیدا نمی‌کند، پس p را درست فرض کرده و درستی q را اثبات می‌کنیم.

عکس نقیض یک ترکیب شرطی: اگر $(p \Rightarrow q)$ یک ترکیب شرطی و مفروض باشد عکس نقیض آن به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ تعریف شده و همواره هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است، به عبارت دیگر، $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ که اثبات این هم ارزی با استفاده از جدول ارزش‌ها بسیار ساده بوده و در جدول زیر مشاهده می‌کنید:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

همان طور که ملاحظه می‌کنید ارزش‌های مربوط به $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ در همه‌ی حالت‌های ممکن با هم یکسان بوده که هم ارزی دو عبارت را نتیجه می‌دهد.

نکته: هرگاه بخواهیم درستی گزاره‌ای شرطی مانند $p \Rightarrow q$ را بررسی کنیم و اثبات درستی q با فرض درستی p برای ما مشکل باشد می‌توانیم درستیِ $\sim q \Rightarrow \sim p$ را که هم ارز با $p \Rightarrow q$ است بررسی کنیم و در واقع با فرض نادرست بودنِ q به نادرست بودنِ p برسیم. به مثال زیر توجه کنید:

حمید رضا امیری

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر a^2 عددی زوج باشد آنگاه a عددی زوج است» اگر بخواهیم با فرض زوج بودن a^2 برسیم کار دشوار است. حال درستیِ عکس نقیض گزاره‌ی فوق را بررسی می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم «اگر a فرد باشد آنگاه a^2 نیز فرد است»

$$a \text{ فرد است } \Rightarrow a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = 4k^2+4k+1$$

$$a^2 = 2(\underbrace{2k^2+2k}_{k'})+1 \Rightarrow a^2 = 2k'+1 \Rightarrow a^2 \text{ فرد است}$$

آیا به نظر شما برهان عکس نقیض نوعی برهان خلف است؟ یا برهان خلف نوعی برهان عکس نقیض است؟

شما در برهان خلف، نقیض حکم، یعنی نقیض q را فرض کرده و به یک تناقض می‌رسید و اعلام می‌کنید پس (q ~) نمی‌تواند درست باشد بنابراین q درست است و این تناقض که به آن می‌رسیم، هر تناقض با هر اصل یا گزاره‌ی درستی که همواره درستی آن را پذیرفته‌ایم، می‌تواند باشد ولی در برهان عکس نقیض باید از درستی (q ~) فقط به درستی (p ~) یعنی به تناقض با فرض اصلی برسیم. پس در واقع برهان عکس نقیض نوعی برهان خلف است.

تذکر: هر گزاره‌ی شرطی مطابق هم ارزی زیر با یک گزاره‌ی فصلی هم ارز است که اثبات هم ارزی نیز در جدول بررسی شده است.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

نقیض گزاره‌های فصلی و عطفی:

گاهی اوقات نیاز داریم یک ترکیب فصلی یا عطفی را نقیض کنیم. مثلاً نقیض گزاره‌ی «a عضوی از مجموعه‌ی A یا a عضوی از مجموعه B است» چگونه باید بیان شود؟ در اینجا نیاز داریم گزاره‌هایی چون $(p \vee q)$ و $(q \wedge p)$ و $(p \Rightarrow q)$ را نقیض کنیم.

اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند در این صورت داریم:

$$\text{I)} \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\text{II)} \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

اثبات I)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

اثبات II از طریق جدول ارزش‌ها به عهده‌ی شما!

نتیجه‌ی مهم: با توجه به تبدیل ترکیب شرطی به فصلی و هم ارزی‌های فوق می‌توان به صورت زیر نقیض یک ترکیب شرطی را نیز به دست آورد،

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv \sim (\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین ثابت کردیم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

به این مثال توجه کرده و با توجه به مطالب ذکر شده ابتدا

سعی کنید خودتان هر گزاره را نقیض کنید.

مثال: نقیض هر یک از گزاره‌های مرکّب زیر را به دست آورید:

(مجموعه اعداد اول را P می‌نامیم)

I) $a \in N \wedge a \notin P$

II) $\sqrt{2} \notin Q \vee \sqrt{2} \notin Z$

III) $a^2 > 0 \vee a^2 = 0$

IV) $x \in A \vee x \in B$

V) $x \in A \wedge x \in B$

VI) $x \in A \Rightarrow x \in B$

VII) $(x \in N \wedge x \in Z) \Rightarrow x = 0$

VIII) $a \in P \Rightarrow a \in N \wedge a \notin Q'$

IX) $2^4 > 4^2 \vee 3^4 < 4^3$

X) $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3})^6 < (\frac{2}{3})^6$

لازمه‌ی پاسخ صحیح به هر قسمت یادگیری و استفاده از فرمول‌ها و هم ارزی‌های اثبات شده‌ی قبل است پس می‌توان نوشت:

I) $\sim(a \in N \wedge a \notin P) \equiv (a \notin N \vee a \in P)$

II) $\sim(\sqrt{2} \notin Q \vee \sqrt{2} \notin Z) \equiv (\sqrt{2} \in Q \wedge \sqrt{2} \in Z)$

III) $\sim(a^2 > 0 \vee a = 0) \equiv a^2 \leq 0$ (پس باید $a < 0$ باشد)

IV) $\sim(x \in A \vee x \in B) \equiv (x \notin A \wedge x \notin B)$

V) $\sim(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \notin A \wedge x \notin B)$

VI) $\sim(x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv \sim(x \notin A \vee x \notin B)$
$\equiv (x \in A \wedge x \notin B)$

VII) $\sim[(x \in N \wedge x \in Z \Rightarrow x = 0] \equiv$
$(x \in N \wedge xX \in Z) \wedge x \neq 0$

(توجه دارید که از رابطه‌ی $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$ استفاده کردیم)

VIII) $\sim(a \in P \Rightarrow (a \in N \wedge a \notin Q')) \equiv$
$a \in P \wedge \sim(a \in N \wedge a \notin Q') \equiv a \in P \wedge (a \notin N \vee a \in Q')$

IX) $\sim(2^4 > 4^2 \vee 3^4 < 4^3) \equiv 2^4 \leq 4^2 \wedge 3^4 \geq 4^3$

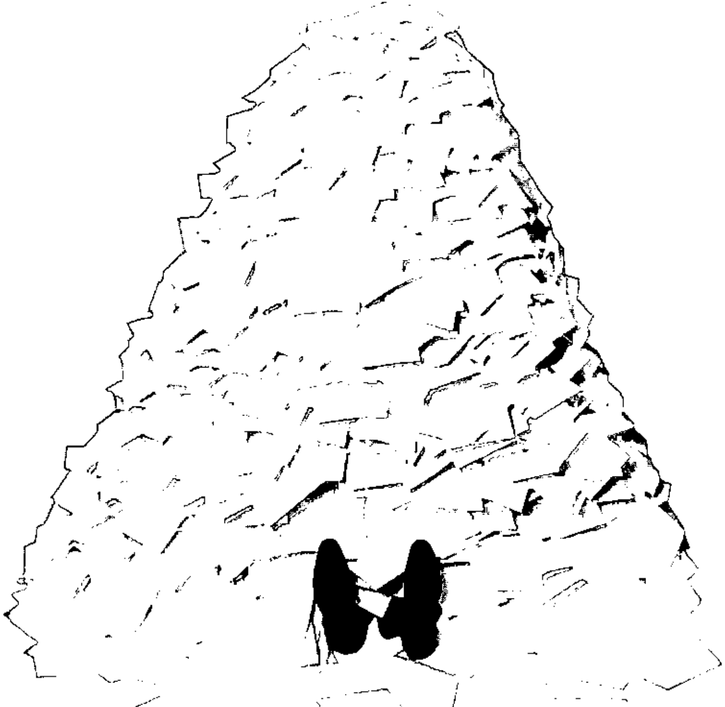
X) $\sim\left[(\frac{1}{3} < \frac{2}{3}) \Rightarrow (\frac{1}{3})^6 < (\frac{2}{3})^6\right] \equiv (\frac{1}{3} < \frac{2}{3}) \wedge (\frac{1}{3})^6 \geq (\frac{2}{3})^6$

ان شاءالله در شماره‌ی بعد به بیان ترکیب دو شرطی، نقیض آن‌ها و قوانین و هم ارزی‌های مهّم دیگر خواهیم پرداخت.

مسائل مسابقه‌ای

۱- در مثلث ABC، $tgA = \frac{22}{7}$ و ارتفاع رأس A روی ضلع BC دو پاره خط به طول‌های ۳ و ۱۷ واحد جدا می‌کند. مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۲- عدد صحیح a را طوری به دست آورید که $ax^{17} + bx^{16} + 1$ بر $x^2 - x - 1$ بخش‌پذیر باشد. $(b \in Z)$



آنچه از دوست رسد....

دانش‌آموزان و خوانندگان عزیز مجله‌ی ریاضی برهان.

هر روزنامه‌های پر محتوای شما، شامل، نظرات، پیشنهادها و مقاله‌ها و مسائل ریاضی که می‌فرستید در دفتر مجله به دستمان می‌رسد. از این که نسبت به مقالات و مسائل مجله اظهار نظر می‌کنید، بسیار سپاسگزاریم. اخیراً هیأت تحریریه‌ی مجله، پس از مطالعه‌ی نامه‌های رسیده و بحث و تبادل، پیرامون آنها، تصمیم گرفت که از شماره‌ی بعدی مجله بخش «مسائل برای حل» بار دیگر در فهرست مطالب قرار گیرد تا گامی هر چند کوچک در جهت بالا بردن سطح کیفی درس ریاضی شما برداشته باشیم. همچنین در این شماره مجله دو مسأله مسابقه‌ای را طرح کرده ایم که امیدواریم آن‌ها را حل و پاسخ خود را برای ما ارسال کنید، تا از بین آن‌ها بهترین پاسخ را در مجله چاپ کنیم و شما نیز برنده‌ی مسابقه شوید.

خواهشمندیم پس از مطالعه‌ی این شماره‌ی مجله و شماره‌های قبل نظرات خود را آماده کنید، چون در شماره‌ی آینده‌ی مجله فرم نظرخواهی درباره‌ی مجله را چاپ می‌کنیم تا بتوانیم از نظرات و انتقادها و پیشنهادهای سازنده‌ی شما عزیزان بیشتر استفاده کنیم.

اسامی تعدادی از خوانندگان مجله که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: محمد باقر بارزبان و اسدعباسلو (سیرجان)، فرزاد کاظمی (شاهین شهر اصفهان)، آقا یا خانم A.A.M مهندس محمد اسماعیل قربانی (بجنورد)، سیدعلی جاوید تجریشی (تهران)، منصور رجایی (قوچان)، علی گودرزی (بروجرد) محمود اطهری زاده (کاشان)، سید هادی فیاضی (تبریز)، مولود خانی خواه (جوانرود کرمانشاه)، حامد ضیایی آذری (مشهد مقدس)، سیروس دهمامی (تهران) و عبدالصاحب حسنی نژاد (هندیجان خوزستان)

خانم‌ها: مهناز صادقیان (تهران)، سولماز منتظری(تهران). سیدزهرا میری (تهران) و نرگس عصار زادگان (اصفهان)

همکاران محترم آقایان: رحمان کیومرثی (شهرکرد)، احمد احسنت (شیراز)، یعقوب نعمتی (اردبیل) خانم‌ها: صدیقه ابراهیمی (شیراز)، فیروزه درخشنده (قائم شهر) و فاطمه ملکی (پیشوای ورامین) از همگی شما برای ارسال مقاله، مسأله و معمأ با راه تشریحی سپاسگزاریم، در صورت امکان از مقاله‌ها و مسائل ارسالی شما عزیزان، پس از تصویب در هیأت تحریریه استفاده خواهیم کرد.

سرکار خانم ساره ظریف (آبادان)

از آن جا که مسائل ارسالی شما می‌تواند برای دانش‌آموزان مفید باشد، دو مسأله از آن‌ها را می‌آوریم:

مسأله ۱. آیا تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[\frac{|x|}{|x|+1}\right]$ تابع ثابت است؟

حل. نامساوی $0 \le |x| < |x|+1$ برای هر عدد حقیقی برقرار است، اگر این نامساوی را بر $|x|+1 \neq 0$ تقسیم کنیم:

$$0 \le \frac{|x|}{|x|+1} < 1 \Rightarrow \left[\frac{|x|}{|x|+1}\right] = 0$$

در نتیجه $g(x)=0$ تابع ثابت است.

مسأله ۲: آیا تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+[x]$ یک به یک است.

حل.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+[x_1]=x_2+[x_2] \quad (1)$$

$$\Rightarrow [x_1+[x_1]]=[x_2+[x_2]]$$

$$\Rightarrow [x_1]+[x_1]=[x_2]+[x_2]$$

$$\Rightarrow 2[x_1]=2[x_2]$$

$$\Rightarrow [x_1]=[x_2] \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$x_2=x_1$$

پس تابع f یک به یک است.

جناب آقای سیدحسین اصولی در مورد حدس شما راجع به این که: «اگر عددی زوج به غیر از صفر را در عدد ۳ ضرب کنیم، عدد زوجی به دست می‌آید که به شکل $3k$ بوده (k زوج) و حداقل یکی از دو عدد قبل یا بعد آن یعنی $3k \pm 1$ اول خواهد بود»، به مثال نقض زیر توجه فرمایید.

$3k=(6+8!)$ که k زوج است اما $8!+5$ و $8!+7$ به ترتیب مضرب ۵ و ۷ بوده و اول نمی‌باشند.

پرویز شهریاری

اتحاد و معادله

باز هم چند مساله‌ی نامتعارف

اشاره

در شماره‌های قبل مساله‌هایی را طرح کردیم که حل آن‌ها منجر به حل معادله‌ها و نامعادله‌های نامتعارف شد، اینک ادامه آن مسائل را در پی می‌آوریم:

مساله‌ی ۲۴. همه‌ی عددهای شش رقمی را پیدا کنید که:

۱. رقم‌های هر عدد با هم فرق داشته باشند، ولی همه‌ی عددهای شش رقمی با همان رقم‌ها ساخته شده باشند؛

۲. هم عددهای شش رقمی و هم مجموع رقم‌های هر کدام از آن‌ها، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند؛

۳. رقم دوم از سمت چپ برابر ۵ و رقم سوم از سمت چپ برابر ۲ باشد.

حل: عدد را به صورت $\overline{x52yzt}$ $(x \neq 0)$ در نظر می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$x + 5 + 2 + y + z + t = 11n \qquad (1)$$

چون رقم‌های عدد با هم فرق دارند، مجهول x، y، z و t می‌توانند، دست کم مقدارهای ۰، ۱، ۳، ۴ و حداکثر ۶، ۷، ۸ و ۹ را بپذیرند. پس

$$15 \leq 11n \leq 37$$

بنابراین، عدد n می‌تواند برابر یکی از دو عدد ۲ یا ۳ باشد و از معادله‌ی (۱)، دو معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x + y + z + t = 15 \qquad (2)$$

$$x + y + z + t = 26 \qquad (3)$$

عدد باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. یعنی:

$$x - 5 + 2 - y + z - t = 11m$$

اگر به مقدارهای ممکن برای x، y، z و t توجه کنیم، به دست می‌آید:

$$-19 \leq 11m \leq 13$$

و m می‌تواند یکی از مقدارهای ۱-، ۰، یا ۱ را بپذیرد. با استفاده از این مقدارهای m، به این سه معادله می‌رسیم:

$$x - y + z - t = -8 \qquad (4)$$

$$x - y + z - t = 3 \qquad (5)$$

$$x - y + z - t = 14 \qquad (6)$$

برای حل مسأله، باید شش دستگاهی را بررسی کرد که از ترکیب هر یک از دو معادله‌ی (۲) و (۳) با هر یک از سه معادله‌ی (۴) و (۵) و (۶) به دست می‌آید. دستگاه‌های شامل معادله‌های (۲) و (۴)، (۳) و (۶)، (۳) و (۵)، (۳) و (۶) جواب ندارند (مجموع دو عدد زوج برابر عددی فرد می‌شود و یا مجموع دو رقم از ۱۸ بالاتر می‌رود). بنابراین تنها دو دستگاه باقی می‌ماند: (۲) و (۵)، و (۳) و (۴).

از دستگاه

$$\begin{cases} x + y + z + t = 15 \\ z - y + z - t = 3 \end{cases}$$

به دست می‌آید: $x + z = 9$ و $y + t = 6$.

دیده می‌شود که x می‌تواند یکی از عددهای ۱، ۳، ۶، ۸ و ۹ باشد. اگر $x = 3$، آن‌گاه $z = 6$ و در نتیجه معادله‌ی $y + t = 6$ بدون جواب می‌ماند، زیرا رقم‌ها باید با هم فرق داشته باشند، به همین ترتیب، برای $x = 6$ و $z = 3$ یا $x = 9$ و $z = 0$، معادله‌ی دوم جواب ندارد. دو مقدار برای x می‌ماند که برای آن‌ها می‌توان، مقدارهای z، t و y را پیدا کرد:

$1)\ x = 1, z = 8, y = 0, t = 6$

$2)\ x = 1, z = 8, y = 6, t = 0$

$3)\ x = 8, z = 1, y = 0, t = 6$

$4)\ x = 8, z = 1, y = 6, t = 0$



از دستگاه دوم، یعنی

$$\begin{cases} x+y+z+t=26 \\ x-y+z-t=8 \end{cases}$$

به دست می‌آید: $x+z=9$ و $y+t=17$.

با استدلالی شبیه حالت پیش، این جواب‌ها پیدا می‌شوند:

1) $x=3, z=6, y=8, t=9$

2) $x=3, z=6, y=9, t=8$

3) $x=6, z=3, y=8, t=9$

4) $x=6, z=3, y=9, t=8$

به این ترتیب، مسأله دارای دو گروه چهار جوابی است (و نه هشت جواب):

1) ۱۵۲۰۸۶، ۱۵۲۶۸۰، ۸۵۲۰۱۶، ۸۵۲۶۱۰

2) ۳۵۲۸۶۹، ۳۵۲۹۶۸، ۶۵۲۸۳۹، ۶۵۲۹۳۸

هر هشت جواب را با هم نمی‌توان جواب مسأله دانست، زیرا برای نمونه دو عدد ۱۵۲۰۸۶ و ۶۵۲۸۳۹ رقم‌های یکسان ندارند. بنابراین، گروه چهار عددی (۱) یا گروه چهار عددی (۲) را می‌توان جواب مسأله دانست.

مسأله‌ی ۲۵. تابع f با این ضابطه داده شده است:

$$f(x)=x^3+x,\quad x\in R$$

اگر g تابع معکوس f باشد، این معادله را حل کنید:

$$f(x)=g(x)$$

حل: برای $x>0$ نابرابری $f(x)>0$ برقرار است. بنابراین، بخشی از نمودار تابع f که در ربع اول محورهای مختصات قرار دارد، بالای خط راست $y=x$ واقع است و نمودار g در این ربع؛ که قرینه‌ی نمودار تابع f نسبت به خط راست $y=x$ است، زیر این خط راست واقع می‌شود. در نتیجه، برای $x>0$ نمودارهای تابع f و g نقطه‌ی مشترکی ندارند.

از سوی دیگر، تابع‌های f و g، تابع‌هایی فردند. یعنی این معادله نمی‌تواند ریشه‌ی منفی داشته باشد.

معادله تنها یک ریشه دارد: $x=0$. زیراه $f(0)=0$ و بنا به تعریف $g(0)=0$، بنابراین $f(0)=g(0)$.

مسأله‌ی ۲۶. معادله‌ی $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ را حل کنید.

حل: مجهول‌های تازه‌ای انتخاب می‌کنیم:

$$y=\sqrt[3]{2-x},\quad z=\sqrt{x-1}$$

در این صورت، به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=1,\ y^3+x=2,\ z^2+1=x$$

از آن‌جا داریم: $y^3+z^2=1$ و $y+z=1$.

در معادله‌ی اول $z=1-y$ قرار می‌دهیم:

$$y^3+y^2-2y=0,\ y\in\{0,1,-2\}$$

بنابراین، معادله‌ی فرضی سه ریشه دارد:

$$x_1=1, x_2=2, x_3=10$$

مسأله‌ی ۲۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که مجموع توان‌های دوم همه‌ی جواب این معادله، برابر ۴ شود:

$$\log_a|x-2a|+\log_a x=2$$

حل: معادله‌ی مفروض با معادله‌ی $x|x-2a|=a^2$ هم‌ارز است که برای حل آن باید ریشه‌های مثبت معادله‌ی $x^2(x-2a)^2=a^4$ را به دست آورد. معادله‌ی اخیر به این

صورت در می‌آید:

$$(x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2ax - a^2) = 0$$

چون $a > 0$، در نتیجه این معادله دارای دو جواب مثبت a و $a(1+\sqrt{2})$ است و مجموع توان‌های دوم آن‌ها وقتی برابر ۴ می‌شود که داشته باشیم: $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

مسأله‌ی ۲۸. همه‌ی مقدارهای a را پیدا کنید که برای هر کدام از آن‌ها، تعداد ریشه‌های مثبت معادله‌ی

$$\left[(x-a-1)^2 - 2\right](x-a-1)^2 = a^2 - 1$$

بیش از تعداد ریشه‌های منفی آن باشد.

حل: اگر همه‌ی جمله‌ها را به سمت چپ معادله منتقل کنیم. معادله به صورت $f(x).g(x) = 0$ در می‌آید که در آن

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a(a+1),$$
$$g(x) = x^2 - 2(a+1)x + a(a+3)$$

سه جمله‌ای $f(x)$ برای $a \geq -1$ ریشه‌های حقیقی دارد. برای $a > 0$ ریشه‌های آن مثبت و برای $-1 < a < 0$ ریشه‌هایی با علامت‌های متفاوت دارد (حالت‌های $a = 0$ و $a = -1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم). اگر به همین ترتیب درباره‌ی سه‌جمله‌ای $g(x)$ استدلال و سپس نتیجه‌ی دو استدلال را با هم مقایسه کنیم، روشن می‌شود که برای $a > 0$ تعداد ریشه‌های مثبت معادله از تعداد ریشه‌های منفی آن بیش‌تر است.

درباره‌ی حالت $a = 0$، $a = 1$، $a = -1$ و $a = -3$، تنها حالت $a = 0$ با شرط مسأله سازگار است. به این ترتیب، به جواب $a \geq 0$ می‌رسیم.

مسأله‌ی ۲۹. اگر α و β، به ترتیب ریشه‌های دو معادله‌ی $2\sin x = \log_{\frac{5}{8}} x$ و $2\cos x = \log_{\frac{5}{8}} x$ باشند، ثابت کنید $\alpha > \beta$.

حل: اگر نمودار تابع‌های $y = 2\sin x$، $y = 2\cos x$ و $y = \log_{\frac{5}{8}} x$ را رسم کنیم، قانع می‌شویم که:

$$\beta \leq \frac{\pi}{6} \leq \alpha$$

اکنون ثابت می‌کنیم، علامت‌های نابرابری به صورت اکید است و برابری نمی‌تواند درست باشد.

برای اثبات نابرابری $\beta < \frac{\pi}{6}$ و $\alpha > \frac{\pi}{6}$، کافی است ثابت کنیم:

$$\log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} < 2\cos\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad \log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} > 2\sin\frac{\pi}{6}$$

به زبان دیگر، باید ثابت کنیم:

$$1 < \log_{\frac{5}{8}} \frac{\pi}{6} < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{5}{8} > \frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$$

نابرابری سمت چپ به نابرابری $4\pi < 15$ منجر می‌شود که درست است. نابرابری سمت راست هم $\pi^2 > \frac{125 \times 9}{128}$ می‌شود که باز هم درست است.

مسأله‌ی ۳۰. مطلوب است مجموع توان‌های یازدهم ریشه‌های معادله‌ی $x^3 + x + 1 = 0$

حل: α، β و γ را ریشه‌های معادله‌ی مفروض می‌گیریم، داریم:

$$\alpha^3 = -(\alpha+1) \Rightarrow \alpha^{11} = \alpha^2.(\alpha^3)^3 = \alpha^2[-(\alpha+1)^3]$$

و از آن‌جا

$$\alpha^{11} = -\alpha^5 - 3\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2$$
$$= -(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 3\alpha^2 + 5\alpha + 2$$
$$= 3\alpha^2 + 5\alpha + 2$$

به همین ترتیب:

$$\beta^{11} = 3\beta^2 + 5\beta + 2 \quad \text{و} \quad \gamma^{11} = 3\gamma^2 + 5\gamma + 2$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$\alpha^{11} + \beta^{11} + \gamma^{11} = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 5(\alpha + \beta + \gamma) + 6 = 0$$

زیرا بنا به رابطه‌های ویت (رابطه‌های بین ضریب ریشه‌های معادله) داریم:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 0$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$
$$= \frac{b^2}{a^2} - 2 \times \frac{c}{a} = 0 - 2 \times 1 = -2$$

یادداشت

اگر فرض کنیم $s_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$ و سه رابطه‌ی $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$، $\beta^3 + \beta + 1 = 0$ و $\gamma^3 + \gamma + 1 = 0$ را به ترتیب در α^k، β^k و γ^k ضرب کنیم، بعد از جمع برابری‌ها، به رابطه‌ی بازگشتی $s_{k+3} + s_{k+1} + s_k = 0$ می‌رسیم که به یاری آن می‌توان مجموع توان‌های مشابه ریشه‌ها را محاسبه کرد:

$$s_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3, s_1 = 0, s_2 = -2$$

اکنون می‌توانیم به یاری s_0 و s_1، مقدار s_3 را به دست آوریم:

$$s_3 = -(s_1 + s_0) = -3$$

و به همین ترتیب:

$$s_4 = 2, s_5 = 5, s_6 = 1, s_7 = -7, s_8 = -6,$$
$$s_9 = 6, s_{11} = -(s_9 + s_8) = -(6-6) = 0$$

مسأله‌ی ۳۱. این معادله‌ی مثلثاتی را حل کنید:

$$\sin x(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x) + \cos x(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x) = 0$$

حل: ضرب‌ها را انجام می‌دهیم. به دست می‌آید:

$$(\sin x\cos\frac{x}{4} + \cos x\sin\frac{x}{2}) - 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 0$$

که ما را به معادله‌ی $\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2$ می‌رساند. بیش‌ترین مقدار سینوس برابر ۱ و بیش‌ترین مقدار کسینوس هم برابر واحد است. بنابراین، این معادله تنها وقتی برقرار است که دو جمله‌ی سمت چپ برابری، به طور هم‌زمان برابر واحد باشند:

$$\sin\frac{5x}{4} = 1 \text{ و } \cos x = 1$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$x = 2\pi \times \frac{4k+1}{5} \text{ و } x = 2\pi n$$

(k و n عددهای درستی هستند). برای این که این دو عدد برابر باشند، باید $\frac{4k+1}{5}$ عدد درستی باشد. هر عدد درست k می‌تواند به یکی از این چند صورت باشد:

$$5m, 5m+1, 5m+2, 5m+3, 5m+4$$

(m عددی درست است) و با آزمایش مستقیم روشن می‌شود که تنها برای $k = 5m+1$، عدد $\frac{1+4k}{5}$ عددی درست می‌شود. به این ترتیب، جواب معادله چنین است:

$$x = (1+4m)\pi \text{ و } m \in Z$$

مسأله‌ی ۳۲. دو گروه A و B برای مسابقه‌ی شطرنج انتخاب شدند. قرار بر این بود که هر فرد از یک گروه، با هر فرد گروه دیگر در یک دوره بازی شرکت کند. در این صورت، تعداد کل دورهای بازی، چهار برابر تعداد همه‌ی شرکت کنندگان مسابقه‌ی دو گروه می‌شد. ولی به دلیل این که از هر گروه یک

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.org

☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰

☎ **پیام‌گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ۸۸۸۳۹۲۳۲

نفر به خاطر بیماری نتوانست در مسابقه شرکت کند، از تعداد دورهای بازی، نسبت به آنچه پیش‌بینی شده بود، ۱۷ دور کم شد. اگر بدانیم، تعداد افراد گروه A از تعداد افراد گروه B کم‌تر بوده است، تعداد شطرنج بازان گروه A را پیدا کنید.

حل: تعداد بازیکنان گروه A را x و تعداد بازیکنان گروه B را y می‌گیریم. در این صورت:

$$\begin{cases} xy = ۴(x+y) \\ (x-۱)(y-۱) = xy - ۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = ۴(x+y) \\ x+y = ۱۸ \end{cases}$$

از آن‌جا داریم: $x + y = ۱۸$ و $xy = ۷۲$. یعنی x و y ریشه‌های این معادله‌اند:

$$t^۲ - ۱۸t + ۷۲ = ۰ \Rightarrow t_۱ = ۶, t_۲ = ۱۲$$

چون تعداد افراد گروه A از تعداد بازیکنان گروه B کم‌تر است، بنابراین $x = ۶$ و $y = ۱۲$.

یادداشت

وقتی با معادله یا دستگاه معادله‌هایی سروکار داشته باشیم که در آن‌ها مجهول‌ها، عددهای درست یا عددهای طبیعی باشند، می‌توان برخی از شرط‌های مسأله را کنار گذاشت. برای نمونه، مسأله‌ی دو گروه شطرنج باز را می‌شد این طور تنظیم کرد:

دو گروه A و B در مسابقه‌ی شطرنج شرکت دارند. قرار بر این است که هر فرد از یک گروه با هر فرد از گروه دیگر مسابقه دهد. اگر تعداد کل دورهای بازی چهار برابر تعداد همه‌ی شرکت کنندگان (که عددی زوج است) باشد و بدانیم تعداد افراد گروه A از تعداد افراد گروه B کم‌تر است، تعداد افراد هر گروه را پیدا کنید.

مسأله به حل این معادله، در مجموعه‌ی عددهای درست منجر می‌شود:

$$xy = ۴(x+y) \Rightarrow (x-۴)(y-۴) = ۱۶$$

با این شرط که x+y عددی زوج است و x<y.

از آن جا که x و y عددهای طبیعی هستند، بنابراین x − ۴ و y − ۴ مثبت هستند و باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x-۴ = ۴ \\ y-۴ = ۴ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-۴ = ۲ \\ y-۴ = ۸ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-۴ = ۱ \\ y-۴ = ۱۶ \end{cases}$$

ولی فقط حالت دوم پذیرفتنی است، زیرا در حالت اول x+y عددی فرد و در حالت سوم دو عدد x و y برابر می‌شوند. به این ترتیب: $x = ۶$ و $y = ۱۲$.

۸ـ مقاله فی ان الکرة اوسع الاشکال المجسمة التی احاطاتها متساویة و ان الدائرة اوسع الاشکال المسطّحة التی احاطاتها متساویه

در سال ۱۹۵۹م به زبان فرانسوی مورد بررسی قرار گرفته است و در سال ۱۹۶۶ به زبان روسی ترجمه شده است.

۹ـ قول فی استخراج مسألة عددیة

دوبار توسط ویدمان به زبان آلمانی مورد تحقیق قرار گرفته است.

۱۰ـ مسأله عددیة مجسمة

۱۱ـ مقالة فی المعلومات

در سال ۱۸۳۴ م توسط سدیوّ به زبان فرانسوی ترجمه شده است.

۱۲ـ مقاله فی عم المسبّع فی الدائرة

در سال ۱۹۷۹ م توسط رشدی راشد به زبان فرانسوی ترجمه شده و مورد تحقیق قرار گرفته و متن عربی آن نیز به چاپ رسیده است.

۱۳ـ فصل فی مقدمات ضلع المسبع

در سال ۱۹۲۷ م توسط کارل شوی به زبان آلمانی ترجمه شده. ترجمه‌ی انگلیسی آن نیز در «گزارش جشن هزاره‌ی ابن هیثم» به چاپ رسیده است.

۱۴ـ مقالة فی التحلیل و الترکیب

۱۵ـ المعاملات فی الحساب

۱۶ـ مقالة فی مسائل التلاقی

در سال ۱۹۲۶ م توسط ویدمان به زبان آلمانی ترجمه شده است.

۱۷ـ مسائل الهندسیة

در سال ۱۹۲۶ توسط کارل شوی به زبان آلمانی ترجمه شده است.

۱۸ـ رسالة فی برکار [پرگار] الدوائر العظام

در سال ۱۹۱۰ م توسط ویدمان به زبان آلمانی بررسی شده است.

۱۹ـ کتاب فی حل شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول و شرح معانیه

از این کتاب چندین نسخه‌ی خطی موجود است که از آن جمله است یک نسخه در کتابخانه‌ی ملک تهران به شماره‌ی ۳۴۳۳/۱. این نسخه در سال ۵۵۷ رونویس شده است.

قسمت‌هایی از این کتاب توسط رزنفلد و یوشکویچ در سال ۱۹۵۳ م به زبان روسی ترجمه شده است.

ابن صلاح همدانی نیز رساله‌ای درباره‌ی این کتاب نوشته است با عنوان: «قول فی بیان ما وهم ابوعلی بن الهیثم فی کتابه فی الشکوک علی اقلیدس» که نسخه‌ی خطی آن در ایاصوفیا موجود است.

۲۰ـ شرح مصادرات اقلیدس

۲۱ـ رسالة فی قسمة المقدارین المختلفین المذکورین فی الشکل الاول من مقالة العاشرة من کتاب اقلیدس

درباره‌ی این رساله ابن صلاح همدانی رساله‌ای دارد موسوم به «قول فی ایضاح غلط ابی علی ... فی الشکل الاول من مقالة العاشره من کتاب اقلیدس فی الاصول».

۲۲ـ رساله فی الفوائد و المستنبطات من شرح المصادرات

۲۳ـ مقاله فی قسمة الخط الذی استعمله ارشمیدس فی المقالة الثانیة من کتابه فی الکرة و الاسطوانة

این مقاله در سال ۱۸۶۰ م توسط ویکه به زبان فرانسوی ترجمه شده است.

۲۴ـ رسالة فی شکل بنی موسی

این رساله در سال ۱۳۵۷ هـ‌ق در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است.

۲۵ـ شرح المجسطی

۲۶ـ مقالة فی تمام کتاب المخروطات (سزگین نام این مقاله را نیاورده است).

فیلم این مقاله در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است.

* * *

ابن هیثم علاوه بر آثار ریاضی فوق تعداد زیادی کتاب و مقاله درباره‌ی ریاضیات داشته که از بین رفته است.

برگرفته از کتاب زندگی نامه ریاضی دانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی

زیرنویس

1. Alhazen
2. C.Huygens

جشنواره کتاب های آموزشی رشد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

راهی به سوی:

- استانداردسازی کتاب های آموزشی
- معرفی و تقدیر از کتاب های آموزشی برتر
- آسیب شناسی تولید کتاب های آموزشی



فراخوان معلمان و مدیران آموزشی برای پاسخ به دو سؤال:

۱) وضع کنونی انتشار کتاب های آموزشی در کشور چگونه است؟

۲) نقش وزارت آموزش و پرورش در فرآیند انتشار کتاب های آموزشی چه می‌تواند باشد؟



- **مشخصات کامل و عکس خود را به همراه پاسخ برای درج درفصل نامه « جوانه» به آدرس : تهران ـ صندوق پستی ۱۵۸۷۵ / ۳۳۳۱ ارسال نمایید.**

دفتر انتشارات کمک آموزشی

دبیرخانه سامان بخشی کتاب های آموزشی ، تلفن : ۸۸۳۰۶۰۷۱ ، نمابر : ۸۸۳۰۱۴۷۸

www.samanketab.com

رشد برهان

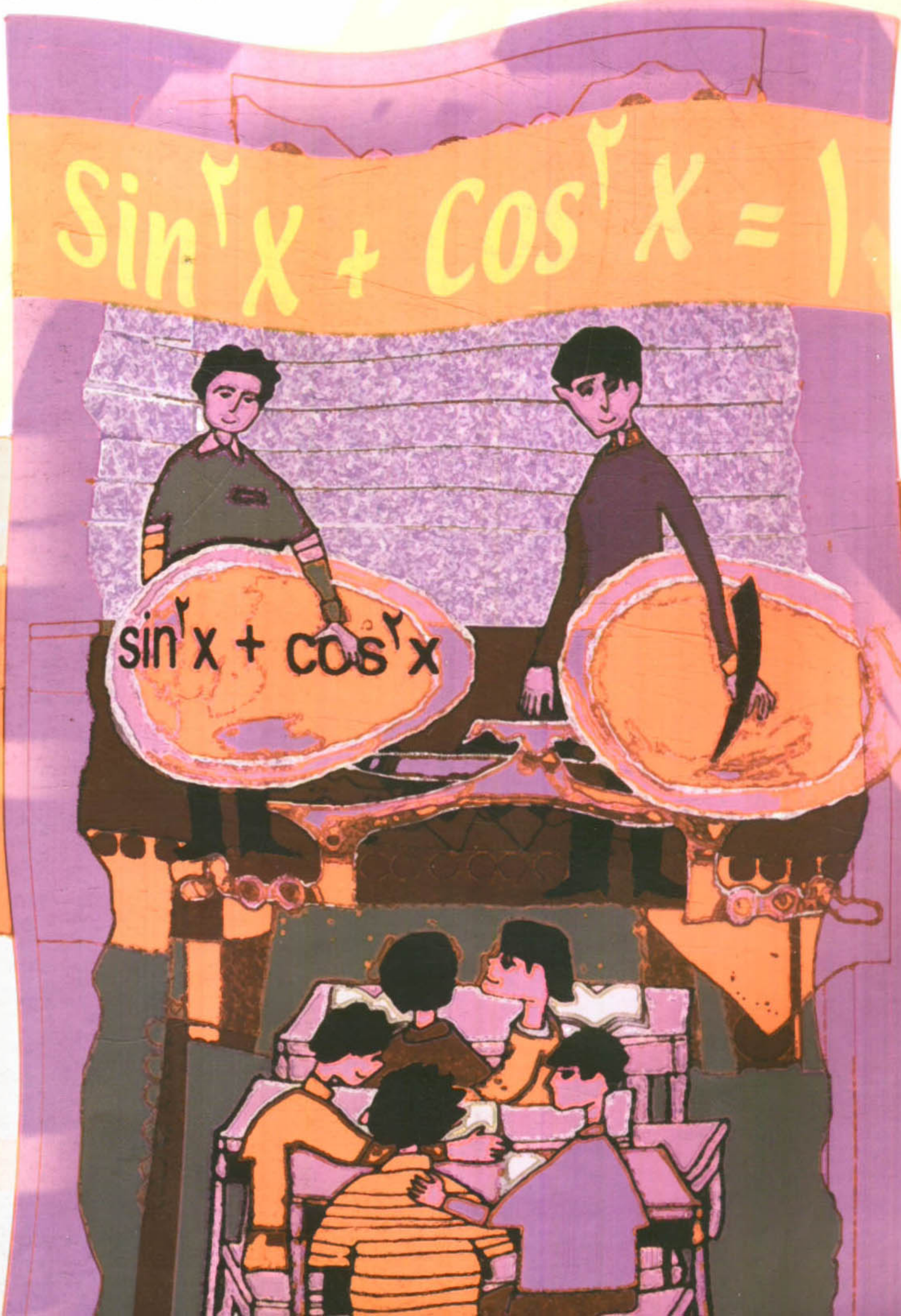
مجله ریاضی

۴۸

www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

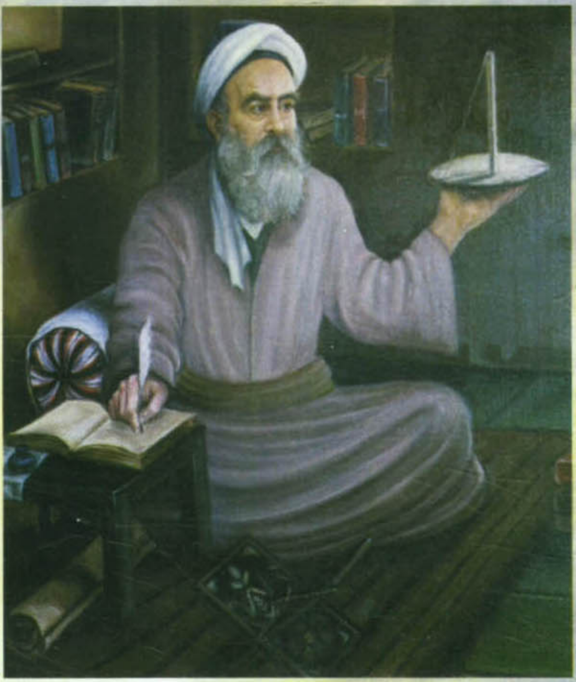
❖ دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۲
❖ زمستان ۱۳۸۴ ـ بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



ریاضیدان و منجم ایرانی

خوارزمی
ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی



خوارزمی که دوران فعالیت علمی او را می توان در اواخر سده ی دوم و ثلث اول سده ی سوم هجری قمری دانست، ریاضیدان، منجم، مورخ، جغرافیدان و یکی از زبردست ترین دانشمندان مسلمان ایرانی و بزرگ ترین عالم عصر خود بود.

وی در ریاضیات و مخصوصاً نجوم ایران پیش از اسلام و تعالیم مکتب جندی شاپور، که در زمان وی هنوز از خاطرها محو نشده بود، دست داشت و آن ها را با ریاضیات هندی درآمیخت و نخستین کتاب های حساب و جبر و نجوم (زیج) را به زبان عربی نوشت و آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات، چه در کشورهای اسلامی و چه بعداً در کشورهای اروپایی، تأثیر فراوان داشت.

خوارزمی نخستین ریاضیدان دوره ی اسلامی است که آثارش به دست ما رسیده و کتاب **جبر و مقابله**ی او قدیمی ترین کتابی است که در این باره نوشته شده است. این کتاب قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا سده ی شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان در این رشته بود.

کتاب حساب خوارزمی نخستین کتابی است که در دوره ی اسلامی راجع به فنّ حساب هندی تألیف گردیده است. مسلمانان فن حساب هندی را مستقیماً از روی این کتاب فراگرفتند و اروپاییان به وسیله ی ترجمه هایی که از آن در سده ی دوازدهم میلادی به عمل آمد با حساب هندی آشنا شدند.

ابن ندیم در الفهرست نوشته است که خوارزمی پیوسته در خزانة الحکمه که مأمون تأسیس کرده بود کار می کرد و زیج های اول و دوم او که معروف به «سند هند» است مورد اعتماد و اتکای مردم بود.

محمدبن جریر طبری در کتاب تاریخ طبری در ضمن وقایع سال ۲۳۲ هجری نوشته است که محمدبن موسی الخوارزمی از منجمانی بود که خلیفه الواثق پیش از مرگ به بالین خود خواند تا وی را از عاقبت مرضش مطلع سازند.

خوارزمی در زمان خلافت مأمون یعنی در بین سال های ۱۹۸ تا ۲۱۸ هجری دانشمندی مورد توجه خلیفه ی وقت بود و تا سال ۲۳۲ (سال درگذشت الواثق) حیات داشت و می توان حدس زد که خوارزمی در حدود سال ۱۸۰ یا پیش از آن تاریخ در خوارزم متولد شده و در دهه ی آخر سده ی دوم هجری به حوزه ی علمی بغداد رفته و بعد از سال ۲۳۲ درگذشته است.

***

ادامه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان متوسطه ۴۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۲ ● زمستان ۱۳۸۴ ● شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ❖ سردبیر: حمیدرضا امیری ❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ ویراستار ادبی: کبری محمودی ❖ اعضای هیات تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره:

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

یادداشت سردبیر

هر ساله چند صد هزار نفر دانش‌آموز از طریق شرکت در کنکور سراسری و کنکور دانشگاه آزاد اسلامی وارد دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی شده و به تحصیل مشغول می‌شوند؛ مهندسان برق، مکانیک، عمران، صنایع،... پزشکان، دندان پزشکان،... حقوق دانان، جامعه شناسان، زیست شناسان، ریاضی دانان، فیزیکدانان... و دیگر نیروهای متخصص که همگی جزو آینده سازان این کشور خواهند بود.

این خیل عظیم نیروی انسانی، که همه از خلال همین گزینش، یعنی کنکور انتخاب می‌شوند، می‌بایست در آینده، سهم بزرگی در اداره ی کشور و سرنوشت میهن اسلامیمان داشته باشند. بدیهی به نظر می‌رسد که چنین امر مهمّی، یعنی گزینش دانشجو، که با سرنوشت کشور رابطه ی مستقیم دارد، می‌بایست خیلی با وسواس و دقّت و نیز در شرایطی کاملاً مناسب و عادلانه انجام پذیرد و حتی‌الامکان عجله ای در کار نباشد.

آیا واقعاً همه ی شرایط ذکر شده در انتخاب دانشجویان رعایت می‌شود؟ روشن است که پاسخ این سؤال مثبت نیست. آیا سازمان سنجش آموزش کشور نمی‌خواهد در این زمینه تغییر و تحولی ایجاد کند؟ آیا در کشوری که برای پاره‌ای از مسائل نه چندان با اهمیت، سالانه چندین همایش و سمینار و... برگزار می‌شود، جای یک همایش ملّی جهت بهبود وضعیت گزینش دانشجو خالی نیست؟ آیا همه ی راه‌ها بررسی شده و هیچ راهی جز وضع موجود، امکان پذیر نیست؟ آیا صحیح است که قسمت اعظمی از سرنوشت یک کشور در همان چند ساعت برگزاری جلسه آزمون سراسری رقم بخورد؟

دو سال پیش در منطقه ی ۱ آموزش و پرورش شهر تهران همایشی تحت عنوان «نقش کنکور در آموزش ریاضی» برگزار شد که از همه ی مسئولین ذیربط سازمان سنجش و نیز مسئولان وزارت علوم و وزارت آموزش و پرورش نیز دعوت شده بود. ولی متأسفانه حتی یک نفرشان هم شرکت نکردند (شاید مسئله برای آنها اهمیتی نداشت) و لذا در پایان، نتیجه ی همایش را به صورت یک نامه ی سرگشاده برای آن عزیزان ارسال کردند که در طی آن راهکارهای کوتاه مدت (مُسکّن) و درازمدت برای برطرف کردن معضل کنکور ارائه شده بود.

حال، از شما دانش‌آموز عزیز می‌پرسیم که: شما، در این زمینه، چه راه حل یا راه حل هایی به نظرتان می‌رسد؟ آنها را برای ما ارسال کنید تا ان شاءا... با استفاده از نظریات شما و کارشناسان دیگر بتوانیم همایشی ملّی برگزار کنیم و این کنکور را که به معضلی بزرگ بر سر راه ادامه تحصیل جوانان تبدیل شده است و موجب حرمان بسیاری از این قشر گردیده، به یک فرصت طلایی برای شناخت هرچه بهتر همه ی علاقه مندان به علم و تحصیل تبدیل کنیم. ان شاءالله



۱۷

پرویز شهریاری



یادهای آموزشی

ارنست رنان (۱۸۹۲_۱۸۲۳)، نویسنده و تاریخ‌نویس فرانسوی که در آغاز برای کشیش شدن درس می‌خواند، ولی سرانجام به یک انتقادکننده‌ی اجتماعی تبدیل شد و در ضمن هوادار دانش بود و کتاب «آینده‌ی دانش» او مشهور است؛ در جایی می‌نویسد: «انسان برای این زاده نشده است که کورکورانه عمل کند. او باید پیوسته با نادرستی‌ها بجنگد و در برابر آنچه ناصواب است، بایستد.»

آنچه در این جا می‌آید، یادواره‌هایی است که به صورتی پراکنده و جسته و گریخته در زندگی من وجود داشته و بیش‌تر جنبه‌ی آموزشی دارد. اگر برخی جاها تاریخ ندارد و یا تاریخ آن دقیق نیست، باید مرا ببخشید، چون به موقع آن‌ها را یادداشت نکرده‌ام و یا اگر یادداشتی داشته‌ام، مورد خشم روزگار قرار گرفته و از بین رفته است. امیدوارم به گونه‌ای باشد که موجب ملال خوانندگان نشود. به ویژه دانش‌آموزان و آموزگاران و دبیران می‌توانند بیش‌تر و بهتر از این مطالب استفاده کنند؛ شاید راهنمایی برای آن‌ها باشد.

دوشنبه یازدهم آذرماه ۱۳۷۰، بعد از خبرهای ساعت ۲۱، دو بخش از دو «سریال» از سیما پخش شد: «گل پامچال» و «نجوم قبل از تکنولوژی».

سیزده بخش «گل پامچال» روی هم جالب بود و یادآور رنج‌ها، آوارگی‌ها و ویرانگری‌های جنگ، پیش از بازپس‌گیری خرمشهر؛ به ویژه برای تهرانی‌ها که جنگ را با مقیاس چند بمب و چند موشک تجربه کرده بودند، صحنه‌هایی از جنگ واقعی شهرها و وحشی‌گری و بی‌رحمی دشمن و نابودی شهرها و روستاها، بسیار دیدنی بود. پخش زیبا و پیاپی گل پامچال که معرف قدرت هنری تهیه‌کنندگان آن بود و در ضمن، مقاومت، سختکوشی و عاطفه‌ی انسانی مردم را در سراسر سرزمین ایران نشان می‌داد و بی‌آن که به شعار رو آورد، ایرانی را همان گونه که هست،

معرفی می‌کرد. «گل پامچال» از نمونه فیلم‌های خوبی بود که در آن کسی فریاد نمی‌زد، تظاهر نمی‌کرد، ایرانی بودن خود را در «کاسه‌ی آب گوشت» و «غذا خوردن با دست» نمی‌دید، بلکه زندگی می‌کرد. البته زندگی سخت و طاقت‌فرسا بود، ولی هرگز انسانی بودن خود را از دست نمی‌داد... و کاش گردانندگان شبکه‌ی اول سیما، بعد از پایان فیلم از آن همه شعارهای طولانی صرف‌نظر کرده بودند، چرا که چیزی به فیلم نیفزود. هنر، اگر به واقع هنر باشد، خود همه‌چیز را می‌گوید. هنر با شعار سازگار نیست، حتی اگر شعار، خودِ حقیقت باشد، هر چیزی جایی دارد... این فیلم زلال و انسانی نیازی به شعار نداشت.

اما، درباره‌ی رشته گفتارهای «نجوم قبل از تکنولوژی». درباره‌ی بخش‌های پیشین آن چیزی نمی‌گویم، چرا که درباره‌ی دانش اخترشناسی قوم‌های آمریکایی «اینکا»، «آزتاک» و «مایا»، نمی‌دانم این گفتارها تا چه اندازه با واقعیت تطبیق می‌کنند. ولی آنچه در برنامه‌ی یازدهم آذرماه شبکه‌ی اول سیما نشان داده شد، سرشار از عقده‌های حقارت غربی‌ها نسبت به شرق و به ویژه ایران و وارونه‌کردن تاریخ فرهنگ و دانش بود. و این همان چیزی است که باید نام «فرهنگ معترض و ویرانگر غرب» را بر آن نهاد.

این گفتار در واقع، به دوران اخترشناسی شرق در دوران شکوفایی آن تعلق داشت؛ همان دورانی که میراث‌خواران اروپای غربی با استفاده از ارثیه‌ی گرانبهای آن توانستند، پایه‌های اخترشناسی نوین را بگذارند. واقع این است که این دوران، دوران شکوفایی فرهنگ و دانش‌ها (و از جمله اخترشناسی و ریاضیات) قوم‌های ایرانی بود. همه می‌دانند که زبان رسمی آن روزگار زبان عربی بود و بیش‌تر نوشته‌های ایرانیان (و نه همه‌ی آن‌ها) به این زبان بود، شاید اگر کسی دانشمندان آن زمان ایرانی را به نام «کسانی که به زبان عربی می‌نوشتند» یاد کند، چندان دل‌آزار نباشد، ولی در این گفتار تلویزیونی...

در آغاز نوید داد که می‌خواهیم از «نجوم عرب‌ها» صحبت کنیم و بعد از مقدمه‌ای کوتاه و نارسا گفت که «عرب‌ها از وسایلی استفاده می‌کردند که...» و در فاصله‌ای کوتاه از رصدخانه‌ای یاد کرد که آثار ناچیزی از آن در کردستان باقی مانده و متأسف بود که درگیری بین کردها و عرب‌ها، موجب ویرانی آن شده است. شگفتا! آیا کردها، عرب بوده‌اند؟! یا کردها موجب ویرانی رصدخانه‌ای شده‌اند که عرب‌ها ساخته بودند؟

گوینده «از عصر طلایی علم نجوم و نقشی که فرهنگ عرب به عهده داشت»، «از سهم عرب‌ها در علم نجوم قبل از تکنولوژی» از این که «عرب‌ها به مثلثات و به خصوص مثلثات کروی دست یافته» و «از سهم بزرگ عرب‌ها در علم جبر» صحبت کرد و بعد از نیمه ستایشی از **چنگیزخان** که گویا به کمک ستاره‌شناسی توانست از بیابان‌ها و کوهستان‌ها بگذرد و کشورها را در نوردد، به سمرقند پرداخت و **الغ‌بیگ** نوه‌ی **تیمور** را، به عنوان دانشمندی بزرگ که از زمان خود جلوتر بود، نام برد که رصدخانه‌ی سمرقند را ساخت و زیج‌های لازم را تنظیم کرد و گویا چون از زمان خود جلوتر بود، در برگشت از سفر حج مورد هجوم قرار گرفت و کشته شد. او انگار به خاطر جهل مردم که دانش او را نمی‌فهمیدند، و نه به خاطر قدرت‌طلبی‌های درون دربار، کشته شد.

از این‌جا دیگر گوینده وارد هند شد و تنها از یک نفر نام برد: **مهاراجه جی‌پور**؛ شاهزاده‌ی اخترشناسی که رصدخانه‌ای بزرگ ساخت و...

در تمامی این گفتار، تنها از این افراد، به عنوان اخترشناس نام برده شد؛ البته به جز دانشمندان یونانی که مورخ غربی هرگز نام آن‌ها را فراموش نمی‌کند. **هارون‌الرشید** که نه تنها عیاش و خوش‌گذران نبود، بلکه کتاب‌های یونانی را هم به عربی ترجمه کرد! اما **مأمون** پسر او که جدول‌های اخترشناسی را تنظیم کرد، و چنگیز و سرانجام الغ‌بیگ.

باید به یاد بیاوریم که بیش‌تر کتاب‌های یونانی از پهلوی سُریانی (که آن هم یک زبان ایرانی بود) به عربی برگردانده شدند و تنها در پایان کار بود که مترجمانی از زبان یونانی پدید آمدند.

آیا می‌اندیشید، در سراسر گفتار، حتی نامی از ایران برده شد؟ گمان می‌کنید وقتی از «سهم عرب‌ها در جبر» سخن می‌گفت، نامی از **محمد** فرزند **موسی خوارزمی** یا **محمد** کرجی یا **حکیم عمر خیام** برد؟ وقتی از رصدخانه‌ها و زیج‌ها سخن می‌گفت، یادی از «زیج خوارزمی»، «زیج ملک شاهی» و دیگران کرد؟ یا از رصدخانه‌ی باغ که به یاری **سلیمان سمرقندی** در سده‌ی نهم میلادی تأسیس شده بودند، رصدخانه‌ی جندی‌شاپور (به یاری احمد نهاوندی)، رصدخانه‌ی شیراز (به یاری عبدالرحمان صوفی)، رصدخانه‌ی بغداد (به یاری ابوسهل کوهی و ابوالوفای بوزجانی)، رصدخانه‌ی رازی (به یاری خجندی در سده‌ی دهم میلادی)، رصدخانه‌ی مراغه (به یاری نصیر توسی در سده‌ی سیزدهم میلادی) یاد کرد؟ و یا وقتی از رصدخانه‌ی سمرقند نام می‌برد، **جمشید کاشانی** بنیانگذار آن را، به یاد آورد؟ به هیچ وجه!

مثلثات (مانند جبر و تا اندازه‌ای نظریه‌ی عددها) در ایران زاده شد و نام بزرگانی چون **ابوالوفای بوزجانی** (بوزجان، در مرز ایران با افغانستان است)، **ابوریحان بیرونی**، **کوشیار گیلانی**، **نصیر توسی** و جمشید کاشانی به تارک این دانش ثبت است. واژه‌های سینوس و تانژانت، برگردان واژه‌های «جیب» به معنای شاخص، و «ظل» است که ریاضیدانان ایرانی انتخاب کردند و بعدها این واژه‌ها به زبان فرانسوی «سینوس» و «تانژانت» شدند (سینوس به معنای گریبان و تانژانت به معنای سایه، یعنی همان معانی جیب و ظل را می‌دهند). ولی گوینده تنها به این بسنده کرد که «سهم عرب‌ها در جبر و مثلثات زیاد است...»

نمی‌دانم اصل مطلب نارسا بود یا در برگردان اشتباه شده بود که کشف «صفر» و «لگاریتم» را به الغ بیگ نسبت داد و البته، هر دو دروغ است. صفر را هندی‌ها کشف و همراه گونه‌ی نوشتن موضعی عددها وارد عددنویسی کردند و به وسیله‌ی کتاب «حساب هندی» خوارزمی به اروپا راه یافت. اما درباره‌ی «لگاریتم» که گمان می‌کنم با «اَلگوریتم» اشتباه شده است: «اَلگوریتم» تحریف شده‌ی نام «الخوارزمی» است که در برگردان «حساب هندی» او به زبان لاتینی، «اَلگوریتموس» خواندند، زیرا حرف «خ» نداشتند و به جای آن حرف «گ» گذاشتند «اَل» را هم از جلوی نام خوارزمی برنداشتند و «اوس» را هم به آخر آن افزودند.

در سده‌های میانی که اروپا در جهل و تعبد به سر می‌برد، در شرق و به ویژه در ایران، دانش به مرز بالایی از شکوفایی رسیده بود. ریاضیدانان ایرانی با تکیه بر دستاوردهای نظری ریاضیات یونانی و ریاضیات نیمه نظری و نیمه کاربردی هندی و استفاده از سنت‌های علمی ایرانی توانستند، دانش ریاضیات را به چنان سطحی بالا ببرند که تا آن زمان نظیر نداشته است. روش ریاضیدانان ایرانی این بود که در آغاز مفهوم‌ها و قضیه‌های نظری را می‌آوردند و می‌کوشیدند، «روش کلی راه‌حل» را پیدا کنند... بعدها این‌گونه روش‌های کلی راه‌حل را «اَلگوریتم» نامیدند. در واقع، مفهوم «اَلگوریتم» در ایران زاده شد، زیرا خود واژه‌ی «الگوریتم»، همان لاتینی شده‌ی نام خوارزمی است و به همین مناسبت روز جهانی «انفورماتیک» را روز «خوارزمی» نامیده‌اند؛ چرا که «انفورماتیک» براساس «الگوریتم‌ها» پدید آمده است.

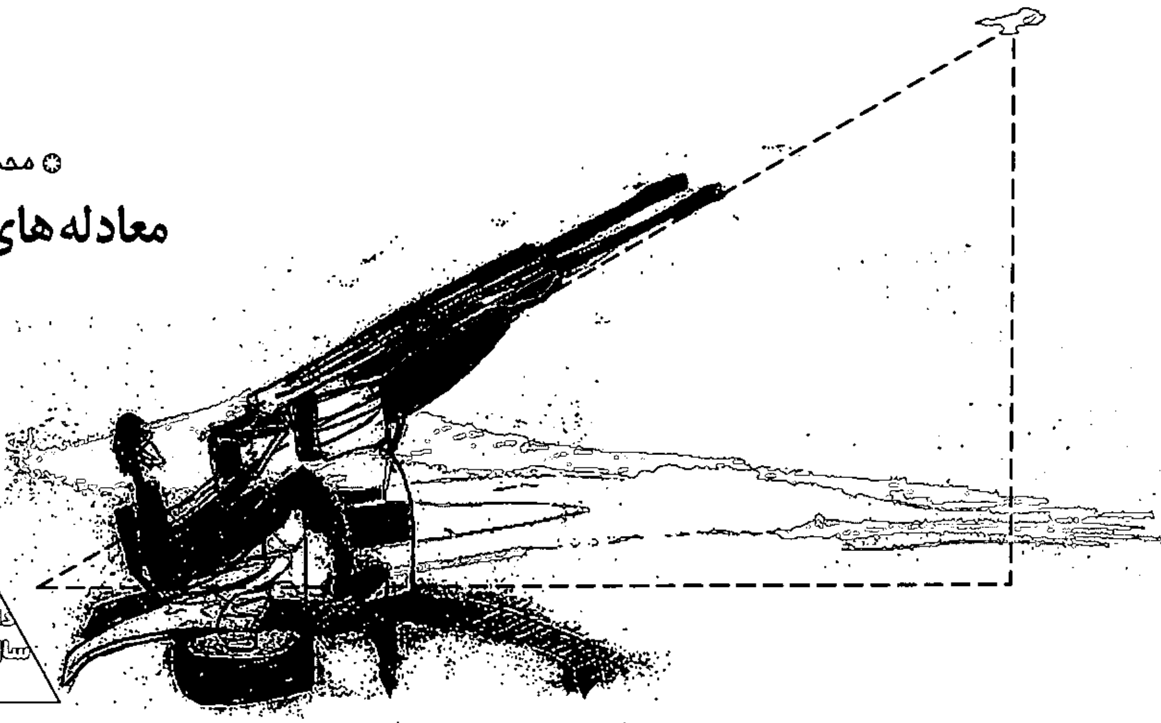
در پایان گفتار، ضمن بحث از کره‌ی جغرافیایی، گوینده ناگهان در بین واژه‌های عادی، از واژه‌ی «آزیموت» نام برد که به احتمال باید کاربرد آن را از جانب مترجم دانست. «آزیموت» یعنی «سَمت» و «زاویه‌ی سمت» و من نمی‌دانم چرا در بسیاری از برنامه‌های علمی سیما، اصرار بر این است که از واژه‌های فرنگی استفاده شود، به نحوی که گاهی حتی آدم علاقه‌مند هم نمی‌تواند چیزی از آن بفهمد...

این‌که برخی از غربیان به نام مورخ و دانشمند، ما را تحقیر می‌کنند و با وارونه کردن تاریخ می‌کوشند «ثابت کنند» که «در شرق خبری نبوده است»، جای شگفتی ندارد؛ آن‌ها وظیفه‌ی سیاسی خود را انجام می‌دهند. ولی این که ما با دست و زبان خودمان، بافته‌های آن‌ها را تحویل مردم بدهیم، یا ندانسته است و یا گناه؛ آن هم گناهی نابخشودنی.

۱۰

✪ محمدهاشم رستمی

معادله‌های مثلثاتی



برای دانش‌آموزان سال اول و دوم متوسطه

حل معادله‌های غیرساده‌ی مثلثاتی

اشاره

در شماره‌های قبل، چند روش کلی برای حل معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی یک مجهولی را که شکل و راه حل مشخصی ندارند، دیدید. توجه به دسته‌بندی ارائه شده در این شماره نیز برای حل برخی از این معادله‌ها مفید است.

الف) زاویه‌ی مجهول داده شده در معادله یکی است، اما تابع‌های مثلثاتی داده شده در معادله متفاوتند؛ مانند معادله‌های زیر:

$\sin x + 2\cos^2 x = 1$ ، $2tg2x - \cot g2x = \frac{1}{\cos 2x}$ و $\sin^4 \frac{a}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1$.

برای حل این گونه معادله‌ها، با استفاده از رابطه‌های موجود بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، تمام تابع‌های مثلثاتی داده‌شده در معادله را برحسب یک تابع مثلثاتی از آن زاویه می‌نویسیم تا معادله‌ای مثلثاتی، شامل یک تابع از یک زاویه، یعنی در واقع معادله‌ای یک مجهولی، به دست آید. آن گاه این معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱. معادله‌ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. بنابراین داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} \Rightarrow (1-\cos^2 x)^2 + \cos^4 x = \frac{5}{8} \Rightarrow$$
$$1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x + \cos^4 x - \frac{5}{8} = 0 \Rightarrow$$
$$16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3 = 0$$

با فرض $\cos^2 x = y$ خواهیم داشت:

$$16y^2 - 16y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{16} = \frac{8 \pm 4}{16} \Rightarrow$$
$$y = \frac{3}{4} \text{ و } y = \frac{1}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. بنابراین داریم:

$$y=\frac{3}{4}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{3}{4}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{5\pi}{6}\Rightarrow$$

و $x=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$

$$y=\frac{1}{4}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$$

$$x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

نکته: این معادله به روش‌های دیگری نیز حل می‌شود. از آن جمله‌اند:

روش اول: برای کاستن از درجه‌ی معادله، از $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}\Rightarrow (\frac{1-\cos 2x}{2})^2+(\frac{1+\cos 2x}{2})^2=\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$\frac{2(1+\cos^2 2x)}{4}=\frac{5}{8}\Rightarrow 1+\cos^2 2x=\frac{5}{4}\Rightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{4}$$

اما $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+\cos 4x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 4x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 4x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$$

روش دوم: می‌دانیم که $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$ و $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ است. بنابراین داریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}\Rightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{5}{8}\Rightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x=-\frac{3}{8}\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4}$$

اما $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$ است. بنابراین:

$$\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 4x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$$

مثال ۲: معادله‌ی $3-7\cos^2 x\sin x-3\sin^3 x=0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ داریم:

$$3-7(1-\sin^2 x)\sin x-3\sin^3 x=0\Rightarrow$$

$$3-7\sin x+7\sin^3 x-3\sin^3 x=0$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 x-7\sin x+3=0$$

با فرض $\sin x=y$ خواهیم داشت:

$4y^3-7y+3=0$ و $4-7+3=0\Rightarrow y=1\Rightarrow$

$$4y^3-7y+3=(y-1)(4y^2+4y-3)=0\Rightarrow$$

$y=1$ و $4y^2+4y-3=0\Rightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}$

$\Rightarrow y=\frac{-2\pm 4}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{3}{2}<-1$

جواب‌های $y=1$ و $y=\frac{1}{2}$ قابل قبول هستند، زیرا $\sin x=y$ فرض شده است. پس داریم:

$$y=1\Rightarrow \sin x=1=\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}, x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

ب) تابع‌های مثلثاتی داده شده در معادله یکی هستند، اما زاویه‌های مجهول داده شده متفاوتند (زاویه‌های داده شده در معادله، مضرب‌هایی از یک زاویه‌ی مجهولند). مانند معادله‌های:

$1+\cos 2x+\cos 4x=0$ ، $\cot g 2x+2\cot g\frac{x}{2}=0$ و

$\sin x+2\sin 2x+\sin 3x=0$

برای حل این گونه معادله‌ها، با استفاده از رابطه‌های موجود بین نسبت‌های مثلثاتی α و $n\alpha$، زاویه‌های موجود در معادله را به یک زاویه تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه با توجه به شکل معادله‌ی به‌دست آمده، راه‌حل آن را انتخاب می‌کنیم.

مثال ۱. معادله‌ی $tgx + 2tg\frac{x}{2} = 0$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} + 2tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2tg\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 2tg^3\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

با فرض $1 - tg^2\frac{x}{2} \neq 0$ داریم:

$$4tg\frac{x}{2} - 2tg^3\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2tg\frac{x}{2} - tg^3\frac{x}{2} = 0$$

با فرض $tg\frac{x}{2} = y$ نیز خواهیم داشت:

$$2y - y^3 = 0 \Rightarrow y(2 - y^2) = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

جواب‌ها قابل قبول هستند. پس:

$$y = 0 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$y = \sqrt{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + Arctg\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi + 2Arctg\sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + Arctg(\sqrt{-2})$$
$$\Rightarrow x = 2k\pi + 2Arctg(\sqrt{-2})$$

مثال ۲: معادله‌ی $1 + \cos 3x + \cos 6x = 0$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ است.

بنابراین داریم:

$$1 + \cos 3x + \cos 6x = 0 \Rightarrow 1 + \cos 3x + 2\cos^2 3x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\cos 3x + 2\cos^2 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x(1 + 2\cos 3x) = 0 \Rightarrow$$
$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$
$$1 + 2\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

مثال ۳: معادله‌ی $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ داریم:

$$2\sin\frac{x - 3x}{2}\cos\frac{x + 3x}{2} + 2\sin\frac{5x - 7x}{2}\cos\frac{5x + 7x}{2} = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin(-x)\cos 2x + 2\sin(-x)\cos 6x = 0$$
$$\Rightarrow -2\sin x\cos 2x - 2\sin x\cos 6x = 0$$

زاویه‌ها در این معادله یکی نیستند، اما در معادله، عامل مشترک $\sin x$ ایجاد شده است. بنابراین داریم:

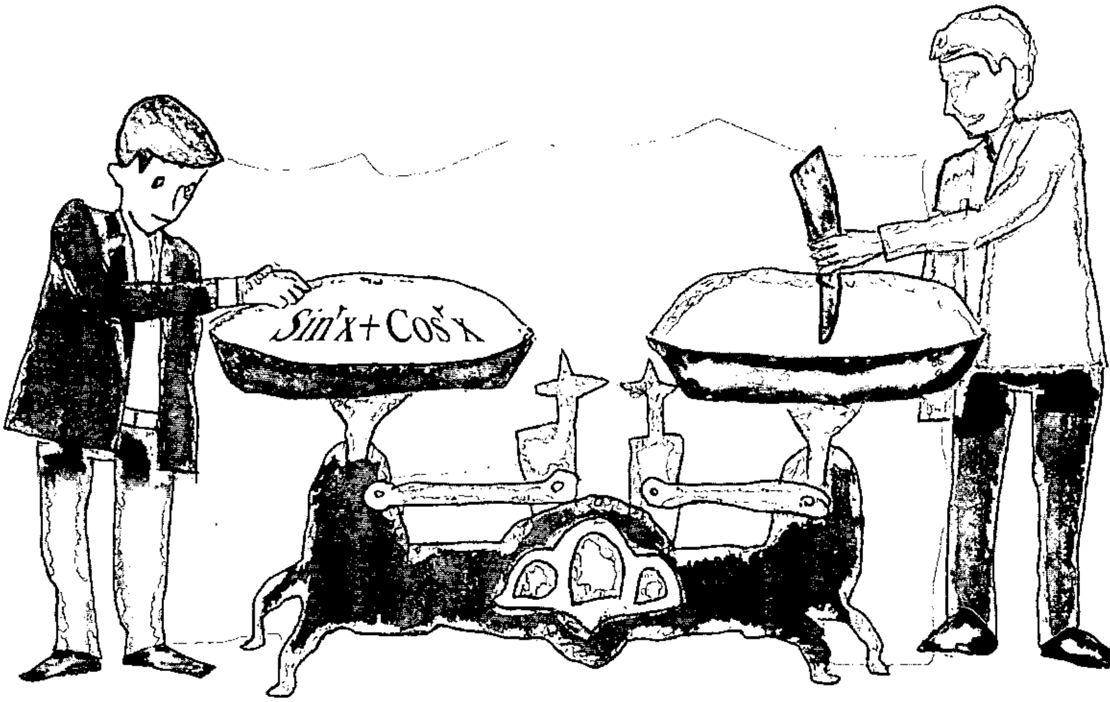
$$-2\sin x(\cos 2x + \cos 6x) = 0 \Rightarrow -2\sin x = 0$$

$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ و $\cos 2x + \cos 6x = 0$

با استفاده از دستور $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ داریم:

$$2\cos\frac{2x + 6x}{2}\cos\frac{2x - 6x}{2} = 0 \Rightarrow 2\cos 4x\cos(-2x) = 0 \Rightarrow$$
$$2\cos 4x\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$
$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

نکته: در این معادله، اگر تمام زاویه‌ها را به یک زاویه تبدیل کنیم، درجه‌ی معادله افزایش می‌یابد.



پ) زاویه‌های مجهول داده شده در معادله یکی نیستند (مضرب‌هایی از یک زاویه‌ی مجهولند) **و تابع‌های مثلثاتی داده شده نیز یکی نیستند.** مانند معادله‌ی $\sin 2x + 2\cos x = 0$.

برای حل این گونه‌ها معادله‌ها، از حالت‌های الف و ب، یا ترکیبی از آن دو و یا یکی از روش‌های کلی گفته شده برای حل معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: معادله‌ی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ را حل کنید.

حل: با استفاده از دستور

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ داریم:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)\right] = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(-2x) - \cos 4x\right] = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 2\cos 2x \Rightarrow \cos 4x = -\cos 2x$$

$\Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 2x)$ معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm (\pi - 2x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ و } x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲: معادله‌ی

$$4\sin 2x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x - 4\sin x + \sqrt{5} - 1 = 0$$

را حل کنید.

حل: می‌دانیم که $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. بنابراین داریم:

$$8\sin x\cos x - 4\sin x - 2(\sqrt{5}-1)\cos x + \sqrt{5} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin x(2\cos x - 1) - (\sqrt{5}-1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(4\sin x - (\sqrt{5}-1)) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$4\sin x - (\sqrt{5}-1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$x = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 2k\pi$$

مثال ۳: معادله‌ی $2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 2$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $x = 6t$ باشد. در این صورت داریم:

$$2\cos 2t - \sin 3t = 2$$

اما $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ و $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$2(1-2\sin^2 t) - (3\sin t - 4\sin^3 t) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 t - 4\sin^2 t - 3\sin t = 0$$

با فرض $\sin t = y$ داریم:

$$4y^3 - 4y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y^2 - 4y - 3) = 0 \Rightarrow y = 0$$

و $4y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4}$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{3}{2} > 0$$

جواب‌های $y = 0$ و $y = -\frac{1}{2}$ قابل قبولند، زیرا $-1 \le \sin t = y \le 1$ است. بنابراین داریم:

$$y = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$$

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow t = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ و } t = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

اما $x = 6t$ و یا $t = \frac{x}{6}$ اختیار شده است. بنابراین داریم.

$$\frac{x}{6} = k\pi \Rightarrow x = 6k\pi$$

$$\frac{x}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi - \pi$$

$$\frac{x}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = 12k\pi + k\pi$$

مثال ۴: معادله‌ی $\operatorname{tg}x + \cot gx = 2\sin 2x$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

حل: با تبدیل x به x- معادله تغییر نمی‌کند. بنابراین با استفاده از دستور بیوش، می‌توان cosx را مجهول کمکی اختیار و معادله را حل کرد. اما این معادله راه‌حل‌های ساده‌تری نیز دارد. از آن جمله:

می‌دانیم که $\operatorname{tg}x + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 2\sin 2x \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow$$

اما $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{1-\cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \cos 4x = 2 \Rightarrow \cos 4x = -1 = \cos\pi$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

و

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$، چهار ریشه دارد.

نکته: برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$، می‌توان به این روش نیز عمل کرد:

$$x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \le x \le 2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \le 2\pi$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \le 2 \Rightarrow 0 \le k + \frac{1}{2} \le 4 \Rightarrow -0/5 \le k \le 3/5$$

با توجه به اینکه k عدد صحیح است، بنابراین می‌تواند یکی از چهار مقدار ۰، ۱، ۲ و ۳ را اختیار کند. یعنی معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد. از این روش می‌توان برای تعیین تعداد ریشه‌های هریک از جواب‌های کلی یک معادله، در یک بازه‌ی داده شده استفاده کرد.



احمد قندهاری

اشاره

مبحث معادله‌ی درجه دوم از مهم‌ترین مباحث ریاضی است و کاربردهای فراوانی دارد. متأسفانه در کتاب‌های درسی به‌طور کافی به آن‌ها پرداخته نشده است بلکه تنها بخشی از آن‌ها در کتاب ریاضی ۲ و بخش دیگری هم به طور ناقص در کتاب حسابان آمده است.

در این نوشته سعی شده است اطلاعات بیشتری درباره‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم پیش روی علاقه‌مندان قرار گیرد.

۱. بررسی حالت‌های ناقص معادله‌ی درجه دوم

الف) اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، عدد c صفر باشد، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله صفر و ریشه‌ی دیگر آن $\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

$$c=0;\ ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۱:

$$\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ c=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ \text{یا} \\ x''=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

ب) اگر در معادله‌ی درجه دوم، b و c هر دو با هم صفر باشند، آن‌گاه هر دو ریشه‌ی معادله صفر است.

$$b=0,\ c=0;\ ax^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow (x)(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ x''=0 \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۲:

$$\left.\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ b=c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x'=x''=0$$

ج) اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $b=0$ و a و c مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد:

$$b=0,\ ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$

چون a و c مختلف‌العلامه‌اند، پس $\frac{c}{a}$ منفی و $\left(-\frac{c}{a}\right)$

عددی مثبت است.

$$x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

نتیجه‌ی ۳:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2+bx+c=0 \\ b=0 \\ c,a \text{ مختلف العلامه باشند} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد:

مسأله: معادله‌ی $mx^2+(m-2)(m+2)x+(m-3)(m-2)=0$ مفروض است. m را چنان بیابید که:

اولاً: یک ریشه‌ی معادله صفر باشد.

ثانیاً: هر دو ریشه‌ی معادله صفر باشد.

ثالثاً: معادله دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد. در این صورت ریشه‌ها را هم بیابید.

حل: **اولاً** فقط باید $c=0$ و باید توجه داشت که b صفر نباشد. پس:

$$m-3=0 \Rightarrow m=3$$

ثانیاً باید m را طوری پیدا کرد که هم c و هم b صفر باشند، پس:

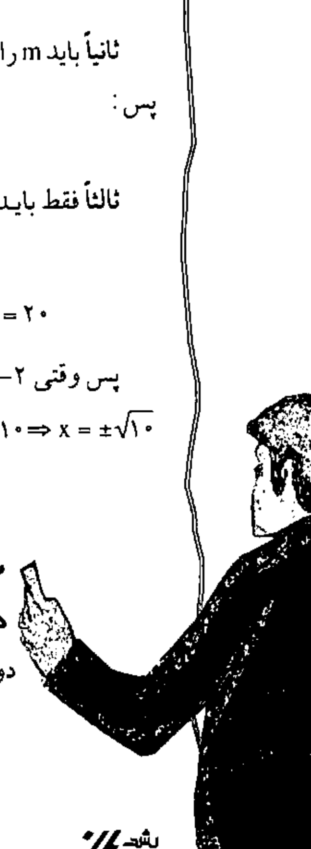
$$m-2=0 \Rightarrow m=2$$

ثالثاً فقط باید $b=0$ و a و c مختلف العلامه باشند.

$$m+2=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=(-5)(-4)=20 \end{cases}$$

پس وقتی $m=-2$، آن‌گاه a و c مختلف العلامه‌اند.

معادله‌ی درجه‌ی دوم: $-2x^2+20=0 \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow x=\pm\sqrt{10}$



۲. طرز پیدا کردن فرمول حل معادله‌ی درجه دوم کامل $ax^2+bx+c=0$

دو طرف معادله را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

به دو طرف تساوی بالا عبارت $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه می‌کنیم.

خواهیم داشت:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Rightarrow$$

از دو طرف این تساوی ریشه‌ی دوم می‌گیریم.

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ **دستور (b)**

نتیجه ۴: معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ از فرمول $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **دستور (b)** قابل حل است.

مثال ۱. معادله‌ی $2x^2-5x+2=0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=2$ و $b=-5$ و $c=2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(2)(2)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow x=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=x'=\frac{5+3}{4}=2 \\ \beta=x''=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

اعداد ۲ و $\frac{1}{2}$ را ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+2=0$ گویند و آن‌ها را با x' و x'' یا α و β نشان می‌دهند.

مثال ۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر را حل کنید؟

$$(m,n>0)\; m^2x^2-2m^2x+(m^2-n^2)=0$$

حل: در این معادله $a=m^2$ و $b=-2m^2$ و $c=m^2-n^2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4(m^2)(m^2-n^2)}}{2m^2}$$

$$x=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^4-4m^4+4m^2n^2}}{2m^2}=\frac{2m^2\pm\sqrt{4m^2n^2}}{2m^2}$$

$$x=\frac{2m^2\pm 2mn}{2m^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x'=\dfrac{2m^2+2mn}{2m^2}=\dfrac{2m(m+n)}{2m^2}=\dfrac{m+n}{m}\\[2mm]\beta=x''=\dfrac{2m^2-2mn}{2m^2}=\dfrac{2m(m-n)}{2m^2}=\dfrac{m-n}{m}\end{cases}$$

تذکر مهم: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ ، عدد b مضرب ۲ باشد، آن‌گاه نصف آن را b' می‌نامیم؛ یعنی: $b'=\frac{b}{2}$ یا $b=2b'$. حال اگر در فرمول حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، به جای b ، $2b'$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}\quad \text{و}\quad b=2b'\quad \text{و}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}\Rightarrow$$

$$x=\frac{2(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

دستور b'

نتیجه (۵):

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ ، $b=2b'$ ، آن‌گاه بهتر است معادله را از دستور (b') $x=\frac{(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}$ حل کنیم.

مثال ۳. معادله‌ی $x^2-2\sqrt{3}x-(2\sqrt{3}+1)=0$ را حل کنید.

حل: $a=1$ ، $b'=-\sqrt{3}$ و $c=-(2\sqrt{3}+1)$.
معادله را از دستور b' حل می‌کنیم:

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{1}$$
$$=\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$x=\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+1)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x'=\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}+1\\\beta=x''=\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=-1\end{cases}$$

توجه: عبارت b^2-4ac را Δ ، و عبارت b'^2-ac را Δ' ، و هر دو را مبیّن معادله گویند. اگرچه $\Delta=4\Delta'$ ، ولی ارزش آن‌ها از لحاظ بیان تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم یکی است؛ یعنی:

۱) Δ یا $\Delta'>0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۲) Δ یا $\Delta'=0\Rightarrow$
معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد.

۳) Δ یا $\Delta'<0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی غیرحقیقی دارد.

سؤال. اگر شخصی بگوید، معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره دو ریشه دارد، درست است یا خیر؟ چرا؟

مثال ۴: به ازای چه مقادیر m ، معادله‌ی $mx^2-2(m-2)x+(m+1)=0$ ، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

حل: باید Δ یا Δ' مثبت باشد.

$$\begin{cases}a=m\\b'=-(m-2)\\c=(m+1)\end{cases}$$

$$\Delta'>0\Rightarrow b'^2-ac>0\Rightarrow(m-2)^2-m(m+1)>0$$
$$\Rightarrow m^2-4m+4-m^2-m>0$$

$$\Rightarrow -5m+4>0\Rightarrow -5m>-4\Rightarrow m<\frac{4}{5}$$

مثال ۵: به ازای چه مقادیر m ، خط به معادله‌ی $y=2x+m$ ، منحنی به معادله‌ی $y=x^2-2x+1$ را قطع نمی‌کند؟

حل: معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی نباید

ریشه‌های حقیقی داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x + m \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + m \Rightarrow x^2 - 4x + (1 - m) = 0$$

معادله‌ی $x^2 - 4x + (1 - m) = 0$ ، معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و منحنی است و نباید ریشه‌های حقیقی داشته باشد پس باید $\Delta' < 0$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b' = -2 \\ c = (1 - m) \end{cases}$$

$$\Delta' < 0 \Rightarrow b'^2 - ac < 0 \Rightarrow 4 - (1 - m) < 0 \Rightarrow 4 - 1 + m < 0$$

$$\Rightarrow m < -3$$

نکته‌ی ۱ : اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، داشته باشیم: $a + b + c = 0$ ، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله عدد ۱ و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx - a - b = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 - a + bx - b = 0 \Rightarrow a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - 1)(x + 1) + b(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(ax + a + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ ax + a + b = 0 \Rightarrow ax = -a - b \\ \Rightarrow ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۶:

$$\begin{matrix} ax^2 + bx + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{matrix} \text{ مجموع ضرایب صفر باشد } \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = 1 \\ \beta = x'' = \frac{c}{a} \end{cases}$$

مثال ۶ : معادله‌ی $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1) = 0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a + b + c = 0$ ، زیرا:

$$\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 0$$

پس:

$$\begin{cases} \alpha = x' = 1 \\ \beta = x'' = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \end{cases}$$

نکته‌ی ۲ : اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، داشته باشیم $a+c=b$ ، آن‌گاه یک ریشه‌ی معادله عدد ۱- و ریشه‌ی دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$$a + c = b \Rightarrow c = b - a$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + b - a = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 - a + bx + b = 0 \Rightarrow a(x^2 - 1) + b(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - 1)(x + 1) + b(x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1)(ax - a + b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ ax - a + b = 0 \Rightarrow ax = a - b \Rightarrow ax = -c \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

نتیجه‌ی ۷:

$$\begin{matrix} ax^2 + bx + c = 0 \\ a + c = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = -1 \\ \beta = x'' = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

مثال ۷ : معادله‌ی $x^2 \sin^2\alpha + x.\tan^3\alpha.\cot^3\alpha + \cos^2\alpha = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} a = \sin^2\alpha \\ b = \tan^3\alpha.\cot^3\alpha = 1 \\ c = \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x' = -1 \\ \beta = x'' = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ \quad = -\cot^2\alpha \end{cases}$$

نکته‌ی ۳: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = S \\ \alpha . \beta = \dfrac{c}{a} = P \end{cases}$$

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $\frac{c}{a} < 0$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی مختلف العلامه دارد؛ زیرا:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow a, c < 0 \ , \ \Delta = b^2 = 4ac$$

$$\Delta = b^2 - 4(\underbrace{ac}_{\text{منفی}}) \Rightarrow \Delta = b^2 + (\underbrace{-4ac}_{\text{مثبت}}) > 0$$

پس $\Delta > 0$. بنابراین، معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. از طرف دیگر، حاصل ضرب این دو ریشه، یعنی $\frac{c}{a}$ منفی است، پس دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

نتیجه‌ی ۸:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \alpha < 0 < \beta$$

α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم هستند.

مثال ۸: m را چنان بیابید که معادله‌ی $(2\sqrt{3} + 1)x^2 + 2(m + 1)x + xm^2 - 18 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m^2 - 18}{2\sqrt{3} + 1} < 0 \Rightarrow 2m^2 - 18 < 0 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow -3 < m < 3$$

نکته‌ی ۴: اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم $\beta = k\alpha$، $(k \neq 0, 1)$، آن‌گاه داریم: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

اثبات:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + k\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha(k+1) = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a(k+1)}$$

$$\beta = k\alpha \Rightarrow \beta = \frac{-bk}{a(k+1)}$$

$$\alpha . \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a(k+1)} \times \frac{-bk}{a(k+1)} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{kb^2}{a^2(k+1)^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$kb^2 = ac(k+1)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

نتیجه‌ی ۹:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \ \beta = k\alpha \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشد.

مثال ۹: اگر در معادله‌ی $(2\sqrt{3} - 3)x^2 - 4(m - 1)x + (2\sqrt{3} + 3) = 0$، یک ریشه ۳ برابر ریشه دیگر باشد، یعنی $\beta = 3\alpha$، آن‌گاه m را بیابید.

حل:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{16(m-1)^2}{(2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{16(m-1)^2}{12 - 9} = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{(m-1)^2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow (m-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$m - 1 = \pm 1 \Rightarrow m = 1 \pm 1 \Rightarrow m = 2$ یا $m = 0$

ادامه دارد

مسائل هندسه‌ی ابوالوفا بوزجانی

پس از پیدایش نخستین ترجمه‌های «هندسه»، کتاب اصول **اقلیدس** به زبان عربی، و باب هندسه‌ی کتاب «جبر و مقابله‌ی **خوارزمی**»، میراث علمی شرق و غرب، علم هندسه به زودی مورد بهره‌برداری قرار گرفت و موضوع تحقیقات مستقل و جداگانه شد.

کمی پس از **خوارزمی**، برادران **بنوموسی**، یعنی **ابوجعفر محمّد** (متوفی به سال ۸۷۲) و حسن و احمد، پسران موسی بن شاکر[۲] ـ از نزدیکان خلیفه مأمون ـ به فعالیت علمی وسیعی دست زدند. آنان به ریاضیات، نجوم و آلات موسیقی و مکانیک دلبستگی خاصی داشتند. رصدخانه‌ای مخصوص بنا کردند و به جمع‌آوری نسخه‌های خطی یونانی پرداختند و به ترجمه‌ی آن‌ها به زبان عربی همت گماشتند. برادر بزرگ‌تر (محمد)، در ادامه‌ی یکی از سفرهای خود، دانشمند معروف، **ثابت بن قُرّه** را با خود به بغداد آورد. از میزان سهمیه‌ی هر یک از این سه برادر در آثار مشترک علمی آنان بی‌خبریم. فقط می‌دانیم، احمد به علم مکانیک توجه خاصی داشت. از آنان اثر معروفی موسوم به «هندسه‌ی سه برادر» باقی مانده که ترجمه‌ی لاتینی آن:

«Liber trium fratrum de geometria»

توسط **جرارد کرمونی**[۳] به دست ما رسیده است.

عنوان عربی این کتاب عبارت است از: «**معرفة مساحة الاشکال البسیط و الکرّیه**». نخستین قضایای آن مربوط است به محاسبه‌ی دایره؛ این جاست که برای اولین بار روش یونانی «**افنا**»[۴] در آثار خاص اسلامی قدیم ظاهر می‌شود. البته به وجهی به کار رفته که قابل ایراد است. مؤلفان، به‌خصوص در قضیه‌ی چهارم ثابت می‌کنند که مساحت دایره را می‌توان به وسیله‌ی حاصل ضرب شعاع در نصف محیط دایره بیان کرد. در قضیه‌ی پنجم نشان می‌دهند که نسبت محیط دایره به قطر مقداری است ثابت. در شکل (قضیه‌ی) ششم، با الهام گرفتن از **ارشمیدس** ثابت می‌کنند که این نسبت بین $3\frac{10}{71}$ و $3\frac{1}{7}$ واقع است. در قضیه‌ی بعدی، آنچه را که دستور **هرون**[۵] مربوط به مساحت مثلث نامیده می‌شود، ثابت می‌کنند؛ البته استدلال آنان کمی با آنچه که مؤلف «متریک» هرون آورده است، تفاوت دارد.

درباره‌ی مخروط و کره، خاطر نشان می‌کنیم که بنابر قضیه‌ی چهاردهم، مساحت سطح نیم کره مساوی است با دو برابر سطح دایره‌ی عظیمه‌اش، و بنابر قضیه‌ی پانزدهم، حجم کره مساوی است با حاصل ضرب نصف قطر در $\frac{1}{3}$ مساحت سطح کره. سپس مؤلفان با ارجاع به گفته‌ی **منلائوس**، روش پیچیده‌ی مساحی احجام را که به تعیین دو واسطه‌ی هندسی

نوشته: آ.پ. یوشکویچ[1]
ترجمه و تنظیم از: محمد علی شیخان



بین دو عدد معلوم منجر می شود، بیان می کنند؛ روشی که بنا به گفته ی **اوتوقیوس**[6]، شبیه به روش **آرخوتاس**[7] است.

(از شرح این روش در آثار منلائوس اطلاعی نداریم).

مؤلفان، بلافاصله روش ساده تری را که اتوقیوس به **افلاطون** نسبت می دهد، شرح می دهند؛ روشی که در آن دیده می شود، چگونه یک ساختمان هندسی عملاً به کمک چند خط کش که به هم بسته شده اند و روی یک کولیس می لغزند، رسم می شود.

در شکل (قضیه ی) هیجدهم، مؤلفان موضوع تثلیث زاویه را به کمک یک دایره و یک خط کش مدرج، یعنی به وسیله ی روش «درج» شرح می دهند. بالاخره چگونگی

روش محاسبه ریشه ی سوم یک عدد را که مکعب کامل نیست، با تقریب دلخواه برحسب کسرهای شصتگانی، نشان می دهند. برای این کار عدد مفروض N را که غرض به دست آوردن ریشه ی سوم آن است، برحسب احتیاج به ثالثه ها $\left(\frac{1}{60^3}\right)$، سادسه ها $\left(\frac{1}{60^6}\right)$، تاسعه ها $\left(\frac{1}{60^9}\right)$ و غیره تبدیل می کنند. سپس بزرگ ترین عدد صحیحی را جست وجو می کنند که مکعب آن در $N.60^{3n}$ بگنجد.

در این صورت، مقدار تقریبی (ریشه) را برحسب دقیقه ها، ثانیه ها و غیره به دست می آورند؛ یعنی: $\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N.60^{3n}}}{60^n}$. ولی مؤلفان نمی گویند که این بزرگ ترین عدد را چگونه می توان به دست آورد. احتمال دارد که در آن عصر، روش استخراج ریشه ی سوم که بعداً در کتاب **نسوی** آمده، در بغداد شناخته شده بوده است. محتوای این کتاب و روشی که در آن تمام قضایا با استدلالشان بیان شده اند، پیشرفت های بزرگی را که در تحقیقات هندسی ظرف دو قرن در بغداد صورت گرفته بودند، نشان می دهد.

کتاب (هندسه ی) بنوموسی تأثیر فراوانی در تکامل بعدی علم هندسه داشته است. در چند قرن بعد، هنوز این اثر در شرق مورد مطالعه بود و مثلاً **نصیرالدین طوسی** آن را تحریر کرده است. همچنین ترجمه ی لاتین آن در اروپا به خوبی

شناخته شده بود. باز هم خاطر نشان می‌کنیم که بنا به گفته‌ی **سجزی**، ریاضیدان سده‌های دهم و یازدهم میلادی، برادران بنوموسی رسم بیضی را به وسیله‌ی به کار بردن نخ (روش باغبان) می‌شناخته‌اند. از آنان چند اثر دیگر در زمینه‌ی هندسه، به‌خصوص راجع به مقاطع مخروطی، و نیز درباره‌ی نجوم، استاتیک، فیزیک و غیره باقی مانده‌اند که یا با هم و یا جداگانه آن‌ها را تألیف کرده‌اند.

کتاب هندسه‌ی عملی[8] **ابوالوفا** که به محاسبان و دفترداران اختصاص داده شده است، مستقیماً وابسته به بخش هندسه‌ی کتاب جبر خوارزمی است. **ابوالوفا محمدبن محمد بوزجانی** (۹۴۰ تا تقریباً ۹۹۷) در بوزجان که یکی از شهرهای خراسان و بین هرات و نیشابور واقع است، به دنیا آمد. در سن ۲۰ سالگی از بوزجان به عراق مهاجرت کرد و به زودی در بغداد به عنوان ریاضیدان و منجم ماهری شهرت یافت. مالک چندین اثر بدیع از وی می‌باشیم که از آن جمله‌اند، شرح‌های مفصلی بر آثار **اقلیدس**، **دیوفانت** و **بطلمیوس**. بسیاری از آثارش به دست ما نرسیده‌اند. از وی آثاری باقی مانده است که به‌خصوص در هندسه و مثلثات حائز اهمیت هستند.

ابوالوفا در بخش هندسه‌ی کتاب خود که برای کاتبان نوشته است، بسیاری از مواد بخش هندسه‌ی کتاب خوارزمی را اقتباس و دسته‌ای از مواد دیگر را به آن اضافه کرده است؛ بدون آن‌که مانند خوارزمی، روش استدلال آن‌ها را بیان کند. مثلاً در آن، دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث منسوب به هرون (که قبلاً به آن اشاره شده) و نیز دستور محاسبه‌ی سطح کره برحسب دایره‌ی عظیمه، و حجم کره برحسب قطر و محیط دایره‌ی عظیمه $\left(d^2 \cdot \frac{c}{6}\right)$ و همچنین، دستور محاسبه‌ی همین حجم برحسب سطح کره $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s.d}{2}\right)$ دیده می‌شود. در تمام این محاسبات، ابوالوفا مقدار π را $\frac{22}{7}$ اختیار می‌کند. برای محاسبه‌ی مساحت سطح قطعه‌ی دایره برحسب قوس یا وتر، او جدولی از طول وترهای دایره‌ای به قطر ۱۴ برای کمان‌های $\frac{k}{22}\cdot 180^\circ$، $(k = 1, 2, 3, \dots, 22)$ تشکیل می‌دهد؛ مقدار این وترها برحسب $\frac{1}{60}$ یعنی شعیر[9] و اجزای آن تعیین شده‌اند. علاوه بر این، ابوالوفا قاعده‌هایی را که برای محاسبه‌ی وترها در حالتی که قطر دایره دلخواه باشد و نیز دستور درج واسطه‌ی خطی را تعیین کرده است. علاوه بر جدول وترها که در مورد آن از **بطلمیوس** نام می‌برد، ابوالوفا دستوری ارائه می‌دهد که از روی آن، قطر دایره (یعنی d) برحسب عده‌ی اضلاع (n) و طول ضلع چند ضلعی منتظم محاطی (a_n) محاسبه می‌شود و آن را هندی می‌نامد:

$$d^2 = a_n^2\left[\frac{(n-1)n}{2}+3\right]\cdot\frac{2}{9} = \frac{a_n^2(n^2-n+6)}{9}$$

همان‌گونه که به آسانی دیده می‌شود، این دستور مقدار دقیق قطر را وقتی که n مساوی با ۳، ۴ و ۶ باشد، معین می‌کند. خطای نقصانی به ازای n=۵، تقریباً مساوی ۰/۱٪ و برای n=۱۰ این خطا تقریباً ۱٪، و برای n=۲۰ تقریباً ۲٪ است. حال آن‌که اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، خطا به سمت $\frac{\pi-3}{3}$، یعنی به سمت کم‌تر از ۵٪ میل می‌کند. منشأ این دستور تقریبی مجهول است.

بالاخره، ابوالوفا برای تعیین فاصله یا ارتفاع اشیایی که در دسترس نیستند، روشی تعیین می‌کند که در آن، صفحه‌ی مستطیل شکلی با حاشیه‌ی مدرج که روی آن دوربین متحرکی نصب شده است، به کار می‌رود[10].

می‌دانیم که چند فصل از کتاب حساب **کَرَجی** به هندسه اختصاص دارد. مطالب این کتاب به اندازه‌ای شبیه به قسمتی

از کتاب هندسه‌ی ابوالوفاست که در این‌جا احتیاجی به شرح آن نیست. با این حال، دستور خاصی از این کتاب را که برای محاسبه‌ی حجم کره به کار می‌رود، ذکر می‌کنیم: $V = d^3\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\right)^2$ ؛ که به ازای $\pi = \frac{22}{7}$ به این صورت درمی‌آید: $V = d\left(\frac{\pi d}{4}\right)^2$. اگر این دستور نتیجه‌ی اشتباه نسخه‌نویس کتاب نباشد، باید نتیجه گرفت که از نظر کرجی، حجم کره مساوی است با حجم متوازی‌السطوح قائمی که ارتفاعش مساوی قطره کره و قاعده‌اش مربعی به ضلع یک چهارم محیط دایره‌ی عظیمه‌ی آن باشد. این دستور روش ناهنجاری را به خاطر می‌آورد که بنا به گفته‌ی ابوالوفا، مسّاحان آن عصر در تربیع به کار می‌بردند.

اگر دایرةالمعارف دستی ریاضیدان مشهور ایرانی، **بهاءالّدین عاملی** یعنی «خلاصة الحساب» را در نظر بگیریم، دستور کرجی مطلب قابل توجهی ندارد. این کتاب پنج قرن پس از کرجی، دستور زیر را برای حجم کره داده است:

$$V = d^3\left\{\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left[\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)\right]\right\}$$
$$=\left(\frac{11}{14}d\right)^3$$

یعنی اگر عدد π را مساوی $\frac{22}{7}$ بگیریم، حاصل می‌شود: $V = \left(\frac{\pi d}{4}\right)^3$. به عبارت دیگر، برای بهاءالدین عاملی حجم کره مساوی است با حجم مکعبی که ضلعش $\frac{1}{4}$ محیط دایره‌ی عظیمه‌ی آن کره باشد. مقدار π که در دستور بهاءالدین به‌کار رفته، مساوی ۳/۹ است. بنابراین این مقدار π به حساب بهاءالدین، کمی بهتر از مقدار آن در دستور کرجی یعنی ۳/۷ است. از طرف دیگر، بهاءالدین در همین موضع از کتاب خود اشاره می‌کند: $V = \frac{d}{2}.\frac{S}{3}$.

در حالی که پیش از این، S یعنی مساحت سطح کره در برابر $4d^2\left(1-\frac{3}{14}\right)$ ، یعنی $\frac{22}{7}d^2$ نشان داده است.

ابوالوفا نیز کتابی درخصوص هندسه‌ی عملی برای صنعتکاران موسوم به: «**فی ما یحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسیه**» نوشته است. یک نسخه‌ی خطی به زبان عربی از این کتاب و نیز یک ترجمه‌ی فارسی از آن که تقریباً هم‌زمان با آن تهیه شده، در دست است. این دو متن مکمل یکدیگرند.

کتاب دیگری، مرکب از یک مقدمه و ۱۲ باب شامل عده‌ی زیادی از ساختمان‌های مهم هندسی برای مسّاحی، مهندسی و نقشه‌برداری وجود دارد. جالب است که کتاب مذکور تقریباً ۱۸ مسأله دارد که به وسیله‌ی خط‌کش ساده‌ی غیرمدرج و پرگاری که گشادگی دهانه‌ی آن ثابت است، حل شده‌اند. استفاده از این وسایل گاهی توسط شرایط خود مسأله لازم می‌شود، ولی گاهی هم در خود ساختمان‌های هندسی مورد پیدا می‌کند. اهمیت عملی این نوع ساختمان‌ها ناشی از آن است که غالباً در سطح زمین رسم کردن چند دایره با شعاع‌های متفاوت فایده‌ی چندانی ندارد.

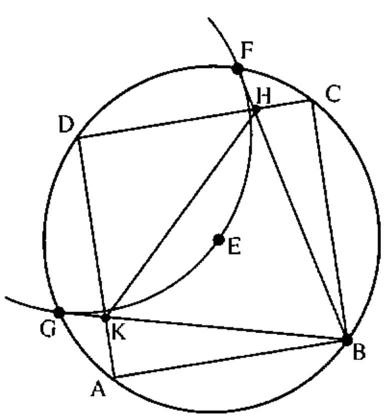
نخستین ساختمان‌های هندسی که با یک گشادگی ثابت پرگار رسم می‌شوند، احتمالاً از قاعده‌ی رسم با «طناب» بهره برده‌اند که اصل آن هندی است؛ البته این قاعده نزد یونانیان نیز دیده شده است. ولی افتخار این مطلب متعلق به ابوالوفاست که یک رشته از مسائل اساسی هندسی را در این قلمرو به‌طور منظم حل کرده و با روشنی کامل اهمیت به‌کار بردن این روش را در این گونه مسائل خاطر نشان کرده است. این که در برخی از مسائل به دلیل سادگی نمی‌توان گشادگی پرگار را به اختیار انتخاب کرد، بلکه باید مساوی با پاره‌خط معلومی گرفت، به هیچ وجه از اهمیت کار ابوالوفا نمی‌کاهد. در قرن شانزدهم میلادی، راجع به این موضوع نیز

پژوهش‌هایی در ایتالیا به علت احتیاجات عملی صورت گرفت. از بین کسانی که در این تحقیقات دست داشته‌اند، می‌توان **لئوناردداوینچی**[۱۱] و **بندتی**[۱۲] و **تارتاگلیا**[۱۳] و **کاردانو**[۱۴]، سپس در آخر قرن هیجدهم **ماشرونی**[۱۵] و در قرن نوزدهم **ژاکوب اشتینر**[۱۶] آلمانی را نام برد.

ابوالوفا در مقدمه‌ی کتاب خود، به کمک خط‌کش و پرگاری با دهانه‌ی ثابت، طریقه‌ی استخراج عمود بر یک پاره‌خط از وسط یا از انتهای آن را معرفی کرده است. او در باب اول که شامل ساختمان‌های هندسی اساسی است، با همین روش‌ها، پاره‌خط دلخواهی را به چندین قسمت متساوی و زاویه‌ای را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند. در باب دوم که به چند ضلعی‌های منتظم اختصاص دارد، ابوالوفا مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و ۵، ۶، ۸ و ۱۰ ضلعی منتظم را به فرض معلوم بودن یک ضلع آن‌ها می‌سازد. در باب سوم، روش محاط کردن مثلث و ۵، ۶ و ۸ ضلعی را در دایره‌ی معلومی شرح می‌دهد.

در همین باب‌ها، مؤلف چگونگی ترسیم خطوط متوازی، مماس بر دایره و ترسیم هفت ضلعی منتظم را شرح می‌دهد (برای ضلع هفت ضلعی منتظم او تقریباً نصف ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در همان دایره را انتخاب می‌کند). همچنین، چگونگی تثلیث زاویه و تضعیف مکعب و غیره را با روش مکانیکی بیان می‌کند. او در باب اول، دو روش برای ساختن آینه‌های سوزان پیشنهاد می‌کند. در روش اول، شکل هندسی آینه را که سهمی است، به وسیله‌ی دایره‌ای که شعاعش مساوی با دو برابر فاصله‌ی کانونی است، به دست آورده است. او روی عمودهای بر قطر دایره، پاره‌خط‌هایی متساوی با وترهای واصل بین یک انتهای قطر و فصل مشترک آن‌ها با محیط دایره رسم می‌کند؛ سرهای دیگر پاره‌خط‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آیند، روی سهمی مطلوب قرار دارند. در روش دوم، ابوالوفا از دایره‌هایی استفاده می‌کند که مراکز آن‌ها روی نیم‌خط معلومی واقع شده‌اند و همه‌ی آن‌ها از مبدأ آن نیم خط می‌گذرند. گرچه این ترسیمات بسیار ساده هستند، ولی در آثار یونانیان دیده نمی‌شوند.[۱۷]

در باب ششم، مؤلف چند ضلعی‌هایی را که در یکدیگر محاط و چند ضلعی‌هایی را که بر دایره محیط می‌گردند، شرح می‌دهد. برای مثال، یکی از پنج روشی را که برای محاط کردن مثلث متساوی‌الاضلاع در یک مربع به کار می‌رود، توضیح می‌دهد. ابتدا بر مربع معلوم ABCD، دایره‌ای محیط می‌کند و مرکز آن را E می‌نامد (شکل ۱). سپس به مرکز D و به شعاع DE، قوسی از دایره رسم می‌کند تا دایره‌ی مذکور را در نقاط F و G قطع کند و محل تلاقی BF و BG را با اضلاع DC و AD به ترتیب H و K می‌نامد. این نقاط و نقطه‌ی B رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع BHK مطلوب است.

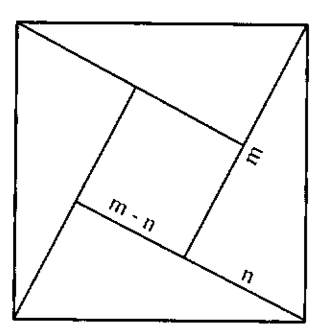


شکل ۱

ابوالوفا در باب‌های هشتم تا دهم، می‌پردازد به تقسیم دایره و شکل‌های محدود به خطوط راست، مانند تقسیم یک چهارضلعی به دو جزء معادل به وسیله‌ی خط راستی که از یکی از رأس‌های چند ضلعی می‌گذرد، و یا تعیین nاُمین قسمت

سطح یک متوازی‌الاضلاع به وسیله‌ی خط راستی که از نقطه‌ی مفروضی واقع در خارج آن رسم شود. البته اقلیدس پیش‌تر کتاب مفصلی درباره‌ی این مسائل تألیف کرده بود.

بالاخره، ابوالوفا در باب یازدهم، مسائل گوناگون مربوط به تبدیل مربع مفروضی به مجموع چند مربع و یا نمایاندن مجموع چند مربع به وسیله‌ی یک مربع را حل می‌کند. او می‌نویسد، بسیاری از هنروران به این مسائل احتیاج دارند، اما هیچ‌یک از روش‌هایی که به کار می‌برند، اساس درستی ندارد. به همین دلیل، قابل اطمینان نیست و صحت ندارد. ابوالوفا می‌خواسته است برای حل این قبیل مسائل روشی کلی معین کند. او ابتدا ساختمان‌های ساده‌تر تقسیم یک مربع به n^2 مربع یا به n^2+m^2 مربع معلوم را بیان می‌کند. در حالت اخیر، مسأله به استفاده از اتحاد $n^2 + m^2 = 2m.n + (m-n)^2$ منجر می‌شود؛ در این صورت او مربع مطلوب را به این نحو به دست می‌آورد که حول مربع $(m-n)^2$، چهار مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع m و n می‌افزاید.

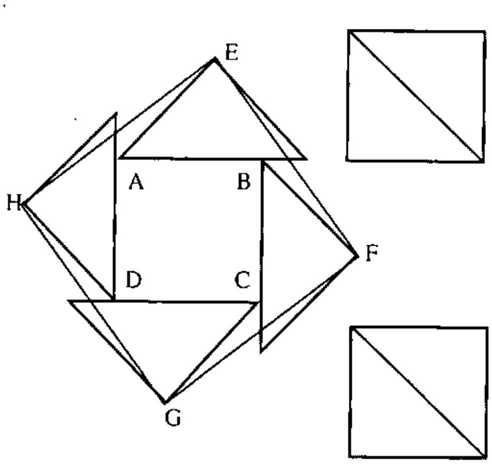


شکل ۲

این ترسیم که به آسانی انجام می‌گیرد، نظیر ساختمانی است که در چین و هند با استفاده از آن قضیه‌ی فیثاغورث را اثبات می‌کردند (شکل ۲). این روش احتمالاً توسط هندیان به عالم اسلام منتقل شده است. مؤلف پس از مسائل مذکور بلافاصله به حل مسائل مشابه مربوط به تقسیم مربّع می‌پردازد.

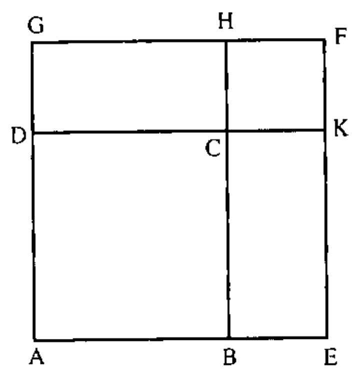
او سپس مسأله‌ی تشکیل یک مربع با عده‌ی دلخواهی از مربعات معلوم را حل می‌کند. البته حالت کلی حل این مسأله را بیان نمی‌کند، بلکه فقط مسأله‌ی پیدا کردن مربعی معادل با سه برابر مربع دیگر را بررسی می‌کند. جواب این مسأله، یعنی ضلع مربع مطلوب، وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع زاویه‌ی قائمه‌اش مساوی با ضلع و قطر مربع مفروض باشد. «ابوالوفا می‌گوید که چنین حلی برای مهندس کفایت می‌کند، ولی در عمل قابل استفاده نیست.» البته در این جا مقصود این است که مربع معلومی را به اجزائی تقسیم کنیم که با ترکیب عده‌ای از آن‌ها، مربع جدیدی به دست آید.

شکل ۳ مسأله‌ی تشکیل یک مربع معادل با سه برابر مربع معلوم را به وسیله‌ی ابوالوفا نشان می‌دهد: سه مربع متساوی در نظر می‌گیرد، دو تا از آن‌ها را با رسم یک قطرشان به چهار مثلث تقسیم می‌کند و آن‌ها را حول مربع سوم مطابق شکل قرار می‌دهد. سپس رأس‌های E، F، G و H را متوالیاً به هم وصل می‌کند تا مربع مطلوب به دست آید. سطح مربع اخیر سه برابر سطح مربع مفروض ABCD است، زیرا مثلث‌های کوچکی که در اطراف مربع EFGH قرار دارند، معادل با مثلث‌هایی هستند که داخل این مربع قرار گرفته‌اند.



شکل ۳

سپس ابوالوفا دو مربع معلوم را که اضلاعشان دارای طول‌های متفاوتی هستند، به یک مربع تبدیل می‌کند. برای این کار مربع کوچک ABCD را مطابق شکل ۴ روی مربع بزرگ‌تر AEFG قرار می‌دهد. در این صورت، مجموع دو مربع به کمک دو مستطیل متساوی ABHG و AEKD و مربع CKFH تشکیل می‌شود.



شکل ۴

سپس دو مستطیل مذکور را به چهار مثلث قائم‌الزاویه متساوی تجزیه می‌کند و آن‌ها را به طریقی که می‌دانیم، حول مربع CKFH قرار می‌دهد. به این ترتیب، مربعی معادل با مجموع دو مربع مفروض به دست می‌آورد. بالاخره به حل مسأله‌ی تجزیه‌ی یک مربع به دو مربع که طول ضلع یکی از آن‌ها معلوم باشد، می‌پردازد.

حل مسأله‌ی ترسیم مربعی که مساحتش مساوی با مجموع مساحت‌های دو مربع معلوم باشد، توسط ابوالوفا، شامل عناصر یکی از استدلال‌های قضیه‌ی فیثاغورث است که مبتنی است بر اصل مقایسه‌ی شکل‌هایی که از قسمت‌های مناسب تشکیل یافته‌اند. اصل مزبور به خصوص در این جا به نحو جالبی بیان شده است. پیش از این در قرن نهم، ثابت بن قرّه استدلال مشابهی به کمک ترسیم بیان می‌کند که کمی با استدلال شکل ۲ فرق دارد. این استدلال، موضوع مقایسه‌ی شکل‌هایی را که از قسمت‌های مناسب تشکیل شده‌اند، بهتر روشن می‌ساخت. استدلال قرّه توسط نیریزی به ما رسیده است.

در باب دوازدهم، ابوالوفا مسأله‌ی تجزیه‌ی سطح کره به کثیرالاضلاع‌های منتظم کروی را مورد بررسی قرار می‌دهد. زوایای هر یک از این کثیرالاضلاع‌ها همان زوایای کثیرالوجوه‌های نظیر آن‌هاست. [مقصود کثیرالوجوهی است که رأس آن مرکز کره، و قاعده‌اش کثیرالاضلاع‌های مذکور

زیرنویس

1. ADOLF P.YOUSCHKEVITCH

۲. درباره‌ی پسران موسی بن شاکر، معروف به اخوان ثلاثه می‌توانید به کتاب «مقدمه بر تاریخ علم»، نوشته‌ی جرج سارتن، صفحه‌ی ۶۵۲ نیز مراجعه فرمایید.

3. Gérard de Crémone

4. exhaustion

5. Héron

6. Eutocius

7. Archytas

۸. کتاب
Le Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marehands
که در صفحه‌ی ۲۷ کتاب «ریاضیات عرب» نوشته یوشکویچ از آن گفت‌وگو شده است.

۹. کلمه‌ی «شعیر» به عنوان واحدی که برای اندازه‌گیری طول یا سطح به کار رفته باشد، در جایی دیده نشده و یقیناً اشتباه است.

۱۰. معمولاً چنین صفحه‌ای را پشت اسطرلابی نصب می‌کردند.

11. Léonard de vinci

12. G.Benedetti,

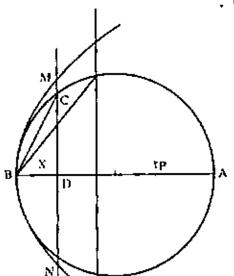
13. N.Tartaglia

14. G.Gardano

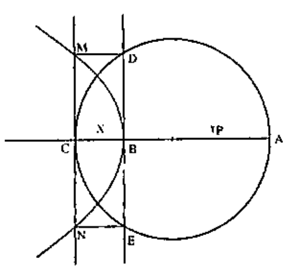
15. L.Macheroni

16. Jakob Steiner.

۱۷.



ساختمان اول



ساختمان دوم

درباره‌ی ساختمان اول: به فرض این که AB=۲p قطر دایره باشد، بنا به خواصی که در دایره می‌شناسیم، داریم: $\overline{BC}^۲ = AB.BD$ ، بر طبق

باشد . م]، اما ابوالوفا به این مطلب اشاره نکرده است .

ساختمان‌های هندسی جالب و در عین حال ساده‌ای که در این باب ذکر شده‌اند، شامل پنج کثیرالوجوه منتظم [مقصود اجسام افلاطونی است . م] و همچنین دو عدد از سیزده کثیرالوجوه‌های نیم منتظمی است که ارشمیدس کشف کرده است . این دو کثیرالوجوه عبارتند از : اولاً، یک چهارده وجهی که وجوهش از هشت مثلث و شش مربع تشکیل می‌شود، و ثانیاً، یک ۳۲ وجهی که وجوهش ۲۰ مثلث و ۱۲ پنج ضلعی است . ابوالوفا ساختمان سه کثیره الوجوه نیم منتظم دیگر را هم شرح می‌دهد که صحیح نیستند .

منابعی که در این باره از آن‌ها استفاده کرده است ، درست شناخته نشده‌اند . علاوه بر کتاب اصول اقلیدس ، ابوالوفا بدون تردید از کتاب پاپوس هم باید استفاده کرده باشد ، اما ساختمان‌های هندسی متفاوت وی در آثار پیشینیان دیده نمی‌شود و به نظر می‌رسد که باید آن‌ها را به خود او نسبت داد . مدت‌ها بعد از آن، س . **استون**[18] و ژ . **کپلر**[19] از نو چند وجهی‌های نیم منتظمی را مورد توجه قرار دادند که پاپوس درباره‌ی آن‌ها تقسیم‌بندی و شرح مختصری داده بود، ولی اطلاعات زیادی از آن حاصل نمی‌شد[20] .

ساختمان هندسی ، چون DM=BC ، اگر BD را مساوی x و DM را مساوی y بگیریم ، خواهیم داشت : $y^2=2px$ در نتیجه نقطه‌ی M روی سهمی است .

درباره‌ی ساختمان دوم : روی نیم خط AC به مبدأ A ، پاره‌خط AB را مساوی $2p$ اختیار می‌کنیم و دایره‌هایی با قطرهای به طول متغیر AC رسم می‌کنیم و وترهای DE را (در نقطه‌ی ثابت B) عمود بر آن می‌کشیم . بر طبق خواص دایره داریم : $BD^2=CB.BA$. پس اگر CB را با x و CM=BD را با y نشان دهیم ، خواهیم داشت : $y^2=2px$ یعنی نقطه‌ی M روی سهمی است .

18. S.Stevin

19. J.Kepler

۲۰ . در استانبول ، یک نسخه‌ی خطی عربی از این کتاب موجود است که از نسخه‌ای که سوتر مورد استفاده قرار داده ، کامل‌تر و به نسخه‌ی خطی فارسی مورد استفاده‌ی وپکه نزدیک‌تر است . با این حال ، نسخه‌ی خطی استانبول هم کامل نیست .

منبع: کتاب «ریاضیات عرب» نوشته‌ی یوشکویچ .

نظرخواهی

از شما دانش‌آموزان، دانشجویان و دبیران محترم درخواست می‌کنیم به جهت پربارتر شدن و رفع هرگونه نقص احتمالی در مجله خودتان، این برگ نظرخواهی را به دقت مطالعه و به سؤال‌های آن پاسخ دهید و برای ما ارسال کنید. قبلاً از حسن توجه شما تشکر می‌کنیم.

◻ **مجله‌ی رشد برهان را به چه صورت تهیه می‌کنید؟**

از طریق مدرسه ☐ با اشتراک فردی (پست) ☐

معرفی دوستان ☐ اهدایی ☐

◻ **چه مدت است با این مجله آشنا هستید؟**

کمتر از یک سال ☐ ۲ تا ۴ سال ☐

۵ تا ۸ سال ☐ از آغاز انتشار تاکنون ☐

◻ **آیا شماره‌های این مجله را به طور مرتب دریافت می‌کنید؟**

بلی ☐ خیر ☐

در صورتی که پاسخ شما خیر است ، دلایل آن را بنویسید؟

....

....

....

◻ **از کدام یک از بخش‌های مجله بیشتر استفاده کرده‌اید؟ (با شماره از ۱ تا ۶ اولویت‌بندی نمایید .)**

- مقالات کمک‌آموزشی ☐
- مقالات کمک درسی ☐
- مقالات تاریخی و فلسفه ریاضی ☐
- سرگرمی‌های ریاضی ☐
- سؤالات و پاسخ تشریحی آن‌ها ☐
- مقالات مربوط به المپیاد ریاضی ☐

■ **نظر خود را راجع به مقالات کمک‌درسی و درصد کمک آن‌ها به شما در جهت فهم مطالب درسی و ارتباط آن‌ها با کتاب درسی ، بنویسید . (اگر پیشنهادی دارید مطرح بفرمایید) .**

....

....

■ **به نظر شما جای چه نوع مطالب یا مقالاتی در مجله خالی است؟**

....

....

☐ به نظر شما کدام یک از مقالات مجله را می‌توان حذف کرد. در این صورت چه مقالاتی را جایگزین آن‌ها کنیم؟

....

....

☐ آیا مایل هستید با ارسال مطلب برای مجله رشد برهان متوسطه، ما را یاری دهید؟

بلی ☐ خیر ☐

اگر بلی، زمینه‌های مورد علاقه خود را بنویسید؟

....

....

☐ آیا دبیران ریاضی شما از این مجله در کلاس استفاده کرده و آن را به شما توصیه می‌کنند؟

بلی ☐ خیر ☐

☐ در بین مؤلفین و مترجمین مجله که تاکنون مقالاتی را از آن‌ها خوانده‌اید، کدام یک از آن‌ها به زبان بهتری با شما ارتباط برقرار می‌کنند و مقالاتشان را بهتر درک کرده‌اید؟ (به ترتیب اولویت بنویسید)

....

....

☐ از نظر مطبوعاتی، مجله را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ (صفحه‌آرایی، تصاویر، طرح‌ها، تیترها)

بسیار خوب ☐ خوب ☐ متوسط ☐

ضعیف ☐ خیلی ضعیف ☐

(اگر در این زمینه انتقاد یا پیشنهادی دارید، بنویسید.)

....

....

☐ هر گونه پیشنهاد یا انتقادی دارید، بنویسید.

....

....

با تشکر: هیأت تحریریه

مشخصات تکمیل کننده پرسشنامه

✧ دانش‌آموز کلاس: ....

ساکن شهر: ....

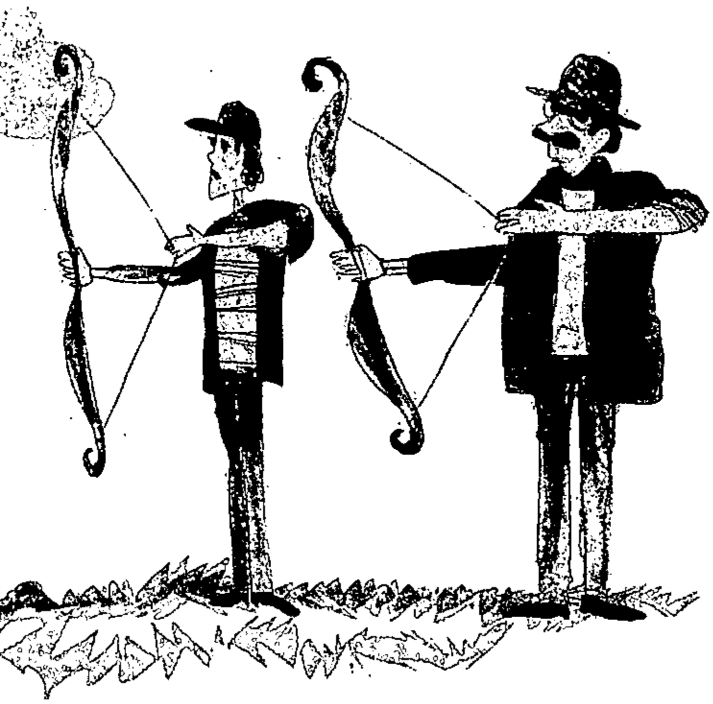
✧ دانشجو سال: ....

رشته‌ی: .... دانشگاه: ....

ساکن شهر: ....

✧ دبیر سابقه تدریس: ....

ساکن شهر: ....



در ادامه‌ی بحث مربوط به احتمال در فضاهای پیوسته، به طرح و حل مسائلِ متنوع‌تر و شاید تا حدودی مشکل‌تر می‌پردازیم. ابتدا چند مسأله‌ی شبیه به مسائل قبل برای یادآوری و سپس مسائل مربوط به زمان و پارامترهای پیوسته‌ی دیگر را مطرح می‌کنیم.

مسأله‌ی ۱. یک عدد حقیقی و بزرگ‌تر از ۱ به تصادف انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد این عدد: الف) کوچک‌تر از ۵ باشد. ب) بزرگ‌تر از ۱۵ باشد. ج) کوچک‌تر از ده میلیون باشد.

حل: فضای نمونه‌ای در این مسأله به صورت زیر تعریف می‌شود که دارای طولِ بی‌نهایت است. $S=\{x\in R | x>1\}$

الف) $P(A)=\lim_{L_S\to\infty}\frac{4}{L_S}=0 \qquad A=\{x\in R | 1<x<5\}$

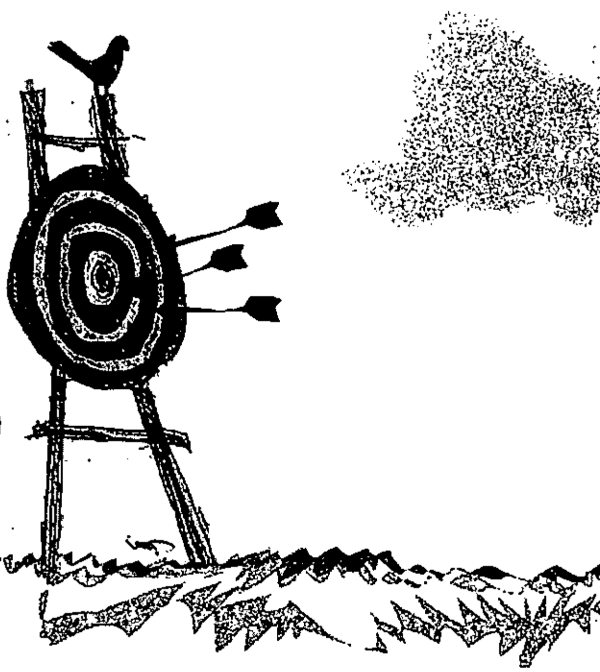
ب) $P(B)=\lim_{L_B,L_S\to\infty}\frac{L_B}{L_S}=1 \qquad B=\{x\in R | x>15\}$

ج) $P(C)=\lim_{L_S\to\infty}\frac{10^7-1}{L_S}=0$

مسأله‌ی ۲. دو عدد حقیقی در بازه‌ی [۲ و ۰] به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که: الف) مجموع دو عدد بیش‌تر از ۱ باشد. ب) هر یک از دو عدد از دو برابر دیگری کوچک‌تر است. ج) مجموع مربعات دو عدد

حمیدرضا امیری

مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته



برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی

کوچک‌تر از ۱ باشد. د) هر یک از دو عدد از مربع دیگری بزرگ‌تر باشد.

حل: اگر فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی در حالت‌های الف، ب، ج و د را به ترتیب S، A، B، C و D بنامیم، خواهیم داشت:

$$S=\{(x,y)|x,y\in R, 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}=[0,2]\times[0,2]$$

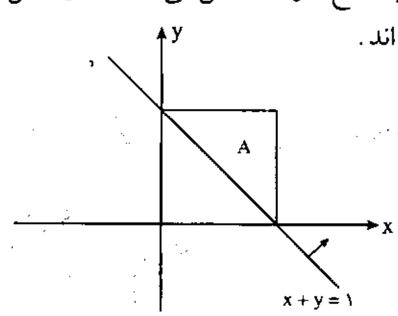
$$A=\{(x,y)|x,y\in S, x+y>1\}$$

$$B=\{(x,y)|x,y\in S, x<2y, y<2x\}$$

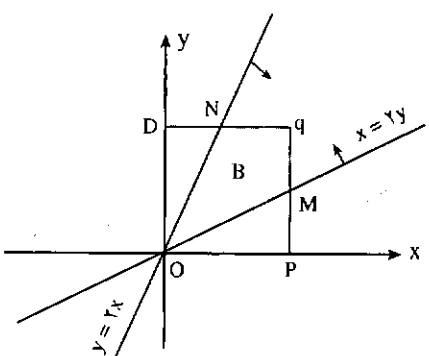
$$C=\{(x,y)|x,y\in S, x^2+y^2<1\}$$

$$D=\{(x,y)|x,y\in S, y>x^2, x>y^2\}$$

هر یک از مجموعه‌های A، B، C و D قسمت‌هایی از سطح مربعی به ضلع ۲ را مشخص می‌کنند که در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.



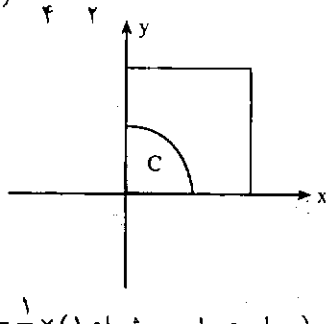
$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$



$$a_B=a_S-(a_{\overset{\Delta}{OPM}}+a_{\overset{\Delta}{ODN}})$$

$$a_B=4-(1+1)=2$$

$$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

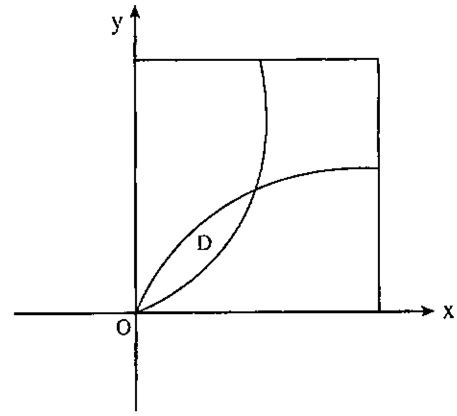


$a_C=\frac{1}{4}\times$ (مساحت دایره به شعاع ۱)

$$a_C=\frac{1}{4}\times\pi\times r^2=\frac{1}{4}\pi\times 1=\frac{\pi}{4}$$

$$P(C)=\frac{\frac{\pi}{4}}{4}=\frac{\pi}{16}$$

برای محاسبه‌ی مساحت سطح D باید مساحت محدود بین دو منحنی $y=x^{۲}$ و $x=y^{۲}$ را از ۰ تا ۱ به دست آوریم:

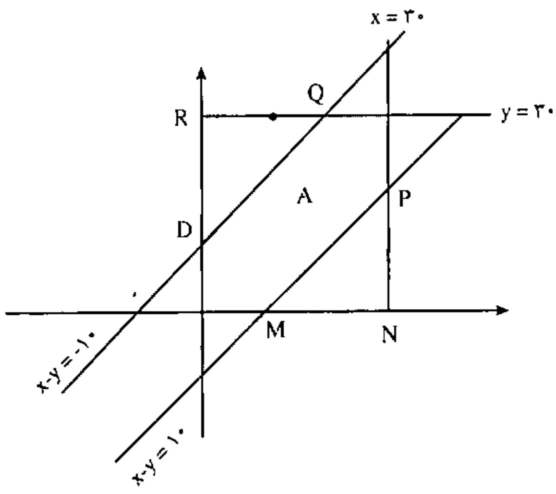


$$a_D = \int_{۰}^{۱}(x^{۲} - \sqrt{x})dx = [\frac{۱}{۳}x^{۳} - \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}]_{۰}^{۱}$$

$$\Rightarrow a_D = \left|\frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۳}\right| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow P(D) = \frac{\frac{۱}{۳}}{۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

مسأله‌ی ۳. بهزاد و جمشید بین ساعت‌های ۷ و ۷:۳۰ دقیقه با هم قرار ملاقات دارند. با فرض این که هر دو در همین فاصله‌ی زمانی به محل قرار برسند، چه قدر احتمال دارد هیچ‌یک از آن‌ها بیش‌تر از ده دقیقه معطل نشوند؟

حل: اگر ساعت‌های ورود بهزاد و جمشید را به محل قرار x و y بنامیم و ساعت ۷ را به عنوان مبدأ (زمان صفر) در نظر بگیریم، در این صورت فضای نمونه‌ای به صورت $S = \{(x,y) | x,y \in R, ۰ \le x \le ۳۰, ۰ \le y \le ۳۰\}$ تعریف می‌شود که در آن، هر زوج مرتب مانند (x,y) به منزله‌ی زمان‌های ورود این دو نفر به محل قرار بعد از ساعت ۷ است. مثلاً زوج مرتب (۱۰ و ۵) به این معنی است که نفر اول ساعت ۷ و ۵ دقیقه و نفر دوم ساعت ۷ و ۱۰ دقیقه به محل قرار رسیده است و در نتیجه، نفر اول ۵ دقیقه معطل مانده است. پس برای آن که هیچ‌یک از دو نفر بیش‌تر از ده دقیقه معطل نشوند، باید: $|x - y| \le ۱۰$ بنابراین، پیشامد A به صورت $A = \{(x,y) \in S | |x,y| \le ۱۰\}$ تعریف می‌شود. نمودار هندسی S و A در شکل ذیل مشخص شده است:



$$|x - y| \le ۱۰ \Rightarrow -۱۰ \le x - y \le ۱۰$$

$$a_A = a_S - (a_{\overset{\Delta}{MNP}} + a_{\overset{\Delta}{DQR}})$$

$$\Rightarrow a_A = ۹۰۰ - (۲۰۰ + ۲۰۰) = ۵۰۰$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۵۰۰}{۹۰۰} = \frac{۵}{۹}$$

مسأله‌ی ۴. مثلث غیرمشخصی را به‌طور تصادفی رسم می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که این مثلث یک زاویه‌ی منفرجه داشته باشد.

حل: اگر x و y و z را زاویه‌های مثلث مورد نظر فرض کنیم، فضای نمونه‌ای به صورت

$$S = \{(x,y,z) | x,y,z \in R, ۰ < x,y,z < ۱۸۰, x + y + z = ۱۸۰\}$$

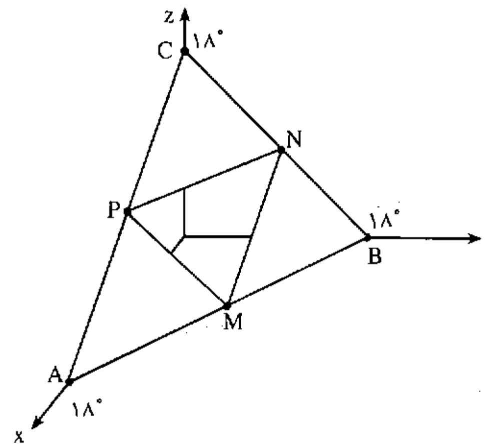
تعریف می‌شود. با توجه به این که می‌خواهیم یکی از زاویه‌ها بزرگ‌تر از °۹۰ باشد، پیشامد A به صورت:

$$A = \{(x,y,z) \in S | x > ۹۰^{\circ} \text{ یا } y > ۹۰^{\circ} \text{ یا } z > ۹۰^{\circ}\}$$

تعریف می‌شود. توجه داریم که فقط یکی از x، y و یا z باید بزرگ‌تر از °۹۰ باشد.

برای رسم نمودار هندسی S و A باید از یک دستگاه مختصات سه بعدی استفاده کنیم. فضای نمونه‌ای S عبارت است از نقاط روی صفحه‌ی x+y+z=۱۸۰، با شرط: ۰<x,y,z<۱۸۰ که این نقاط همان‌طور که در شکل صفحه بعد مشخص شده است، نقاط روی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند.

برای رسم پیشامد A باید سه صفحه‌ی x=۹۰، y=۹۰ و z=۹۰ را رسم کنیم و محل برخورد هریک از این سه صفحه را با صفحه‌ی x+y+z=۱۸۰ که خطی راست است



(NP, MN, MP)، مشخص کنیم و محدوده‌های $x>۹۰$ ، $y>۹۰$ و $z>۹۰$ را به دست آوریم که در شکل بالا هاشور خورده‌اند. برای محاسبه‌ی مساحت قسمت‌های هاشورخورده، به مختصات نقاط M ، N و P نیاز داریم که به راحتی قابل محاسبه‌اند. برای مثال، نقطه‌ی N محل برخورد سه صفحه‌ی $x+y+z=۱۸۰$ و $x=۰$ و $z=۹۰$ است:

$$\begin{cases} x+y+z=۱۸۰ \\ x=۰ \\ z=۹۰ \end{cases} \Rightarrow N\begin{vmatrix} ۰ \\ ۹۰ \\ ۹۰ \end{vmatrix}$$

به همین ترتیب $M\begin{vmatrix} ۹۰ \\ ۹۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ و $P\begin{vmatrix} ۹۰ \\ ۰ \\ ۹۰ \end{vmatrix}$ مشخص می‌شوند.

$$a_A = a_{\overset{\Delta}{ABC}} - a_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{۱۸۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲} - \frac{۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳ \times ۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{۳ \times ۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۴ \times ۹۰^۲ \times \sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۳}{۴}$$

مسأله‌ی ۵. دو نفر قرار گذاشته‌اند که بین ساعت‌های ۷ و ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند. هر کدام زودتر رسید، فقط ۶ دقیقه منتظر دیگری باشد و سپس کار خود را شروع کند. با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع کار یکدیگر را ملاقات می‌کنند؟

حل: این مسأله که به صورت تست در کنکور سراسری ۸۴ـ۸۳ طرح شده بود، شبیه به مسأله‌ی ملاقات بهزاد و جمشید است. اگر x و y را زمان رسیدن این دو نفر به آزمایشگاه در نظر بگیریم و ساعت ۷ صبح را مبدأ (زمان صفر) فرض کنیم، خواهیم داشت:

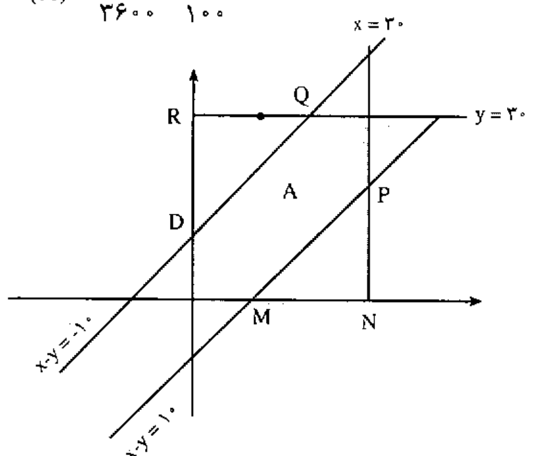
$$S = \left\{(x,y) \middle| x,y \in R, ۰ \le x \le ۶۰, ۰ \le y \le ۶۰\right\}$$

$$A = \left\{(x,y) \in S \middle| |x-y| < ۶\right\}$$

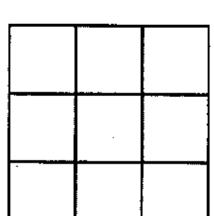
$$a_A = a_S - (S_{MNP} + S_{QRt})$$

$$\Rightarrow a_A = ۳۶۰۰ - (۲ \times \frac{۵۴ \times ۵۴}{۲}) = ۶۸۴$$

$$P(A) = \frac{۶۸۴}{۳۶۰۰} = \frac{۱۹}{۱۰۰}$$

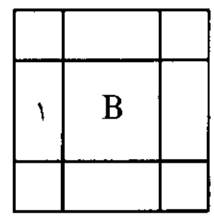


مسأله‌ی ۶. سکه‌ای به شعاع ۰/۵ سانتی‌متر را روی صفحه‌ی شطرنجی شکل زیر که هر ضلع آن ۶ سانتی‌متر است، پرتاب کرده‌ایم. احتمال این که سکه درون مربع‌های سفید قرار گیرد، کدام است؟ (این مسأله نیز به صورت تست در کنکور سراسری ۸۴ـ۸۳ طرح شده بود.)



حل: ابتدا احتمال آن را حساب می‌کنیم که سکه‌ای به شعاع ۰/۵ سانتی‌متر به تمامی درون مربعی به شعاع ۲ سانتی‌متر قرار بگیرد. در این حالت باید فاصله‌ی مرکز سکه

تا محیط مربع بیش‌تر از ۰/۵ سانتی باشد. یعنی مطابق شکل زیر باید مرکز سکه داخل مربعی به ضلع ۱ قرار گیرد که احتمال آن برابر است با:



$$P(B) = \frac{a_B}{a_S} = \frac{۱}{۴}$$

پس $\frac{۱}{۴}$ احتمال دارد، سکه به تمامی داخل هر یک از مربع‌ها قرار گیرد. تعداد مربع‌های سفید ۵ عدد است که احتمال قرار گرفتن در مربع‌های سفید نیز $\frac{۵}{۹}$ می‌شود. یعنی احتمال این که سکه داخل مربع سفید بیفتد و به تمامی داخل آن واقع شود، برابر است با:

$$P(A) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۹} = \frac{۵}{۳۶}$$

به دلیل گستردگی بحث و مسائل متنوعی که در فضاهای پیوسته مطرح هستند، ادامه‌ی طرح و حل مسأله احتمال پیوسته را به شماره‌ی بعدی موکول می‌کنیم. پس تا بعد.

معماهای فــکری و منطقی

A، B، M، و S، نام‌های چهار نفر هستند که در طبقات متفاوت یک ساختمان ۱۸ طبقه دفتر دارند. یکی از آن‌ها حسابدار، یکی معمار، یکی دندانپزشک، و یکی هم وکیل دادگستری است.

دفتر A بالاتر از دفتر M است، گرچه پائین‌تر از دفتر S قرار دارد.

دفتر B زیر دفتر دندانپزشک است.

دفتر S پنج بار بالاتر از دفتر وکیل دادگستری است.

اگر قرار باشد معمار دو طبقه بالاتر برود، در نیمه راه دفترهای دندانپزشک و حسابدار واقع می‌شود، و اگر دفترش را نیم فاصله پائین ببرد، در نیمه راه دفترهای دندانپزشک و وکیل دادگستری قرار می‌گیرد.

در این ساختمان خاص طبقه‌ی همکف به مغازه‌های گوناگون اختصاص یافته است و شامل هیچ دفتری نیست. در نتیجه، تا آن‌جا که به دفترهای واقع در ساختمان مربوط است، طبقه‌ی اول، طبقه‌ی بلافاصله بالای طبقه‌ی همکف است.

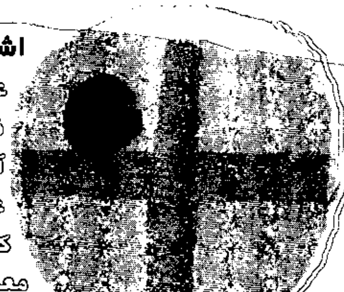
حرفه‌ی هر شخص چیست، و محل دفتر هرکدام در چه طبقه‌ای است؟

جواب: دفتر A، معمار، در طبقه‌ی هشتم؛ دفتر B، وکیل دادگستری، در طبقه‌ی سوم؛ دفتر M، دندانپزشک، در طبقه‌ی پنجم؛ و دفتر S، حسابدار، در طبقه‌ی پانزدهم است.

میرشهرام صدر

نامعادله‌های گنگ





اشاره: از زمان فیثاغوریان، عددهای غیرگویا را اصم یا گنگ نامیدند. دلیل این نام‌گذاری آن بود که آن‌ها نمی‌توانستند مقدار دقیق این عددها را مانند عددهای گویا مشخص کنند. در شماره‌ی قبل درباره‌ی معادله‌های گنگ بحث کردیم. اینک در ادامه‌ی مطلب، نامعادله‌های گنگ را در پی می‌آوریم.

نامعادله‌های گنگ را به صورت‌های کلی زیر تقسیم‌بندی و روش حل هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} < q(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، اگر در حالت خاص $q(x)$ همواره منفی باشد، مجموعه جواب نامعادله تهی است. در غیر این صورت، باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) > 0 \\ \sqrt[2n]{p(x)} < q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) > 0 \\ p(x) < \left(q(x)\right)^{2n} \end{cases}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

$$1)\ \sqrt{x-3} < -x^2 + x - 4 \qquad 2)\ \frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}$$

حل:

۱. چون سمت راست نابرابری همواره منفی است، بنابراین طرف چپ نابرابری که مثبت است، نمی‌تواند از مقدار منفی کوچک‌تر باشد. در نتیجه، مجموعه جواب نامعادله تهی است.

$$-x^2 + x - 4 = 0\ ; \quad \begin{cases} \Delta = -15 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases}$$

۲.

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2} \Rightarrow \sqrt{3-x} < x-2 \Rightarrow \begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x-2 > 0 \\ \sqrt{3-x} < x-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > 2 \\ 3-x < (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2,3] \\ x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$$

۲. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} \le q(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، اگر در حالت خاص $q(x)$ همواره منفی باشد، مجموعه جواب نامعادله تهی است. در غیر این صورت، باید

دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} p(x)\ge 0\\ q(x)\ge 0\\ \sqrt[2n]{p(x)}\le q(x)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}p(x)\ge 0\\ q(x)\ge 0\\ p(x)\le [q(x)]^{2n}\end{cases}$$

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{x+78}\le x+6$ ۲) $\sqrt{x^2+3x+3}\le 2x+1$

حل:

۱.

$$\sqrt{x+78}\le x+6\Rightarrow\begin{cases}x+78\ge 0\\ x+6\ge 0\\ \sqrt{x+78}\le x+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -78\\ x\ge -6\\ x+78\le x^2+12x+36\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\ge -6\\ x\in(-\infty,-14]\cup[3,\infty)\end{cases}\Rightarrow D=[3,\infty)$$

۲.

$$\sqrt{x^2+3x+3}\le 2x+1\Rightarrow\begin{cases}x^2+3x+3\ge 0\\ 2x+1\ge 0\\ x^2+3x+3\le (2x+1)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\ge -\frac{1}{2}\\ 3x^2+x-2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ x\in(-\infty,-1]\cup[\frac{2}{3},\infty)\end{cases}\Rightarrow D=[\frac{2}{3},\infty)$$

۳. برای حل نامعادله ی $\sqrt[2n]{p(x)}>q(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: اگر عبارت $q(x)$ منفی باشد، یعنی: $q(x)<0$، در این صورت هر x که به ازای آن عبارت $\sqrt[2n]{p(x)}$ با معنا باشد، جواب نامعادله است. یعنی در این حالت، مجموعه جواب نامعادله از حل دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases}q(x)<0\\ p(x)\ge 0\end{cases}\qquad(1)$$

حالت دوم: اگر $q(x)\ge 0$، در این صورت مجموعه جواب نامعادله از حل دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases}q(x)\ge 0\\ p(x)\ge 0\\ p(x)>[q(x)]^{2n}\end{cases}\qquad(2)$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله ی $\sqrt[2n]{p(x)}>q(x)$ از اجتماع مجموعه جواب های دو دستگاه (۱) و (۲) به دست می آید.

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید:

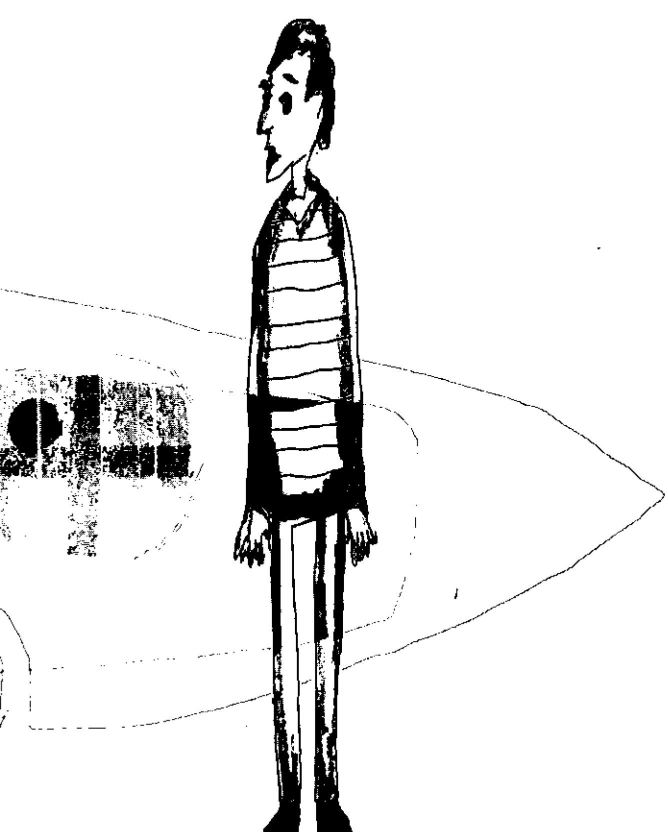
۱) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$ ۲) $\sqrt{x^2+x-2}>x$

حل:

۱. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$

حالت اول: اگر $x-3<0$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x-3<0\\ x^2-4x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x\in(-\infty,0]\cup[4,\infty)\end{cases}\Rightarrow D_1=(-\infty,0]$$



حالت دوم: اگر $x - 3 \ge 0$، داریم:

$$\begin{cases} x-3 \ge 0 \\ x^2-4x \ge 0 \\ x^2-4x > (x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty) \Rightarrow D_2 = (\frac{9}{2}, \infty) \\ x > \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, 0] \cup (\frac{9}{2}, \infty)$$

۲. $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$

حالت اول: اگر $x<0$، داریم:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2+x-2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \\ x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = (-\infty, -2]$$

حالت دوم: اگر $x \ge 0$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+x-2 \ge 0 \\ x^2+x-2 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, \infty) \\ x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty) \Rightarrow D_2 = (2, \infty) \\ x \in (2, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, -2] \cup (2, \infty)$$



۴. برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} \ge q(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$(1) \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q(x) \ge 0 \\ p(x) \ge 0 \\ p(x) \ge [q(x)]^{2n} \end{cases} (2)$$

تذکر: در صورتی که در حالت خاص $q(x)$ همواره مثبت یا منفی باشد، برای یافتن مجموعه جواب نامعادله‌های حالت‌های ۳ یا ۴ کافی است، یکی از دو دستگاه (۱) یا (۲) را حل کنیم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{x^2 - 2x} \ge 4 - x$ ۲) $\sqrt{x+4} > -x^2 - 1$

حل:

۱. $\sqrt{x^2 - 2x} \ge 4 - x$

حالت اول: اگر $4 - x < 0$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4-x < 0 \\ x^2-2x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (4, \infty) \\ x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = (4, \infty)$$

حالت دوم: اگر $4 - x \ge 0$، داریم:

$$\begin{cases} 4-x \ge 0 \\ x^2-2x \ge 0 \\ x^2-2x \ge (4-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 4] \\ x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \Rightarrow D_2 = [\frac{8}{3}, 4] \\ x \in [\frac{8}{3}, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = [\frac{8}{3}, \infty)$$

۲. $\sqrt{x+4} > -x^2 - 1$

چون در این نامعادله همواره به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، داریم $-x^2 - 1 < 0$، بنابراین کافی است فقط دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} -x^2-1 < 0 \\ x+4 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in [-4, \infty) \end{cases} \Rightarrow D = [-4, \infty)$$

۵. برای حل نامعادله‌های: $(n \in \mathbb{N})$

$\sqrt[2n+1]{p(x)} > q(x)$ ، $\sqrt[2n+1]{p(x)} < q(x)$ ،

$\sqrt[2n+1]{p(x)} \ge q(x)$ ، $\sqrt[2n+1]{p(x)} \le q(x)$ ،

$\sqrt[2n+1]{p(x)} > \sqrt[2n+1]{q(x)}$ ، $\sqrt[2n+1]{p(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)}$ ،

$\sqrt[2n+1]{p(x)} \ge \sqrt[2n+1]{q(x)}$ و $\sqrt[2n+1]{p(x)} \le \sqrt[2n+1]{q(x)}$

که در آن‌ها، $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب x هستند، برای مثال $\sqrt[2n+1]{p(x)} \le q(x)$ ، کافی است دو طرف نامعادله را به توان $2n+1$ برسانیم، یعنی $p(x) \le [q(x)]^{2n+1}$. سپس مجموعه جواب‌های نامعادله را به دست می‌آوریم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt[3]{x+2} \le -5$ ۲) $\sqrt[5]{x^2+1} \ge \sqrt[5]{3-x^3}$

حل:

۱.

$$\sqrt[3]{x+2} \le -5 \Rightarrow x+2 \le -125 \Rightarrow x \le -127$$
$$\Rightarrow D = (-\infty, -127]$$

۲.

$$\sqrt[5]{x^2+1} \ge \sqrt[5]{3-x^3} \Rightarrow x^2+1 \ge 3-x^3$$
$$\Rightarrow (x^3-1)+(x^2-1) \ge 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2) \ge 0$$
$$\Rightarrow D = [1, \infty)$$

۶. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} < \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا بر حسب متغیر x هستند، به صورت زیر مجموعه جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ \sqrt[2n]{p(x)} < \sqrt[2n]{q(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \ge 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases}$$

بنابراین، برای حل این گونه نامعادله‌ها کافی است، مجموعه جواب‌های دستگاه $\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ p(x) < q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} \le \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ ، کافی است مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ p(x) \le q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{4x-x^2} < \sqrt{4-x}$ ۲) $\sqrt{x-1} \le \sqrt{x+1}$

حل:

۱.

$$\sqrt{4x-x^2} < \sqrt{4-x} \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 \ge 0 \\ 4-x^2 < 4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2,2] \\ x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty) \end{cases}$$
$$\Rightarrow D = [-2,0) \cup (1,2]$$

۲.

$$\sqrt{x-1} \le \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-1 \le x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1,\infty) \\ x \in (-\infty,\infty) \end{cases}$$
$$\Rightarrow D = [1,\infty)$$

۷. برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} > \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ ، که در آن $p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌های جبری گویا برحسب متغیر x هستند، به صورت زیر مجموعه جواب را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ \sqrt[2n]{p(x)} > \sqrt[2n]{q(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \ge 0 \\ q(x) \ge 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x) \ge 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases}$$

بنابراین، برای حل این گونه نامعادله‌ها کافی است، مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} q(x) \ge 0 \\ p(x) > q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی $\sqrt[2n]{p(x)} \le \sqrt[2n]{q(x)}$ $(n \in \mathbb{N})$ ، کافی است مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} q(x) \ge 0 \\ p(x) \le q(x) \end{cases}$ را به دست آوریم.

مثال: نامعادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\sqrt[4]{x+2} > \sqrt[4]{8-x^2}$$

حل:

$$\sqrt[4]{x+2} > \sqrt[4]{8-x^2} \Rightarrow \begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ x+2 > 8-x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \\ x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty) \end{cases} \Rightarrow D = [2, 2\sqrt{2}]$$

۸. برای حل نامعادله‌های

$$\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} > f(x), \frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \leq f(x), \frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \geq f(x)$$

و $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} < f(x)$ $(1 < n \in IN)$، که در آن‌ها $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ چندجمله‌ای‌های برحسب متغیر x هستند، برای مثال $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \leq f(x)$، ابتدا مجموعه جواب دستگاه‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} q(x) \geq 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} \leq f(x).q(x) \end{cases} (1) \; ; \; \begin{cases} q(x) < 0 \\ \sqrt[n]{p(x)} \geq f(x).q(x) \end{cases} (2)$$

سپس مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{q(x)} \leq f(x)$ از اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (۱) و (۲) به دست می‌آید.

مثال. مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بیابید:

$$1) \; \frac{\sqrt{15-x}}{3-x} \geq 1 \qquad 2) \; \frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} \leq 1$$

حل:

۱. (الف)

$$\frac{\sqrt{15-x}}{3-x} \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \sqrt{15-x} \geq 3-x \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} 3-x < 0 \\ \sqrt{15-x} \leq 3-x \end{cases}$$

برای حل دستگاه (الف)، داریم:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 15-x \geq 0 \\ 15-x \geq (3-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq 15 \\ x^2-5x-6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 3] \\ x \in (-\infty, 15] \\ x \in [-1, 6] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_1 = [-1, 3]$$

مجموعه جواب دستگاه (ب) تهی است. بنابراین $D_2 = \varnothing$. درنتیجه:

$$D = D_1 \cup D_2 = [-1, 3]$$

. ۲

(الف)

$$\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \sqrt{52-x^2} \leq 2-x \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} 2-x < 0 \\ \sqrt{52-x^2} \geq 2-x \end{cases}$$

برای حل دستگاه (الف) داریم:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 52-x^2 \geq 0 \\ 52-x^2 \leq (2-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -2\sqrt{13} \leq x \leq 2\sqrt{13} \\ 2x^2-4x-48 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 2] \\ x \in [-2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}] \\ x \in (-\infty, -4] \cup [6, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 = [-2\sqrt{13}, -4]$$

دستگاه (ب) را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2-x < 0 \\ 52-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2\sqrt{13} \leq x \leq 2\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (2, \infty) \\ x \in [-2\sqrt{13}, 2\sqrt{13}] \end{cases} \Rightarrow D_2 = (2, 2\sqrt{13}]$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = [-2\sqrt{13}, -4] \cup (2, 2\sqrt{13}]$$

۹. برای حل نامعادله‌های گنگ که صورت کلی آن‌ها به غیر از هشت حالت قبل باشند، ابتدا دامنه‌ی تعریف نامعادله را به دست می‌آوریم. برای این منظور کافی است، دستگاه نامعادله‌هایی را حل کنیم که در آن عبارت زیر هر رادیکال با فرجه‌ی زوج را نامنفی قرار دهیم و در صورتی که رادیکال با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت

زیر رادیکال را مثبت قرار دهیم، سپس نامعادله را حل کنیم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$

۲) $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$

۳) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}\ge 0$

۴) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x-3}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$

حل:

۱. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$

(دامنه‌ی تعریف نامعادله):

$$\begin{cases}25-x^2\ge 0\\ x^2+7x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-5,5]\\ x\in(-\infty,-7]\cup[0,\infty)\end{cases}\Rightarrow D_1=[0,5]$$

$$\begin{cases}x\in[0,5]\\ (\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x})^2>3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in[0,5]\\ 25-x^2+2\sqrt{25-x^2}.\sqrt{x^2+7x}+x^2+7x>9\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in[0,5]\\ 2\sqrt{(25-x^2)(x^2+7x)}>-7x-16\end{cases}$$

چون نامعادله‌ی آخر، به ازای $x\in[0,5]$ همواره به یک نابرابری درست تبدیل می‌شود، یعنی عبارت سمت راست نامعادله به ازای $x\in[0,5]$ همواره منفی و عبارت سمت چپ نامعادله به ازای $x\in[0,5]$ همواره نامنفی است، درنتیجه $D=[0,5]$.

۲.

$$\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2\Rightarrow\frac{(3x-2)(3x+2)}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$$

$$5x^2-1>0\Rightarrow x^2>\frac{1}{5}\Rightarrow D_1=(-\infty,-\frac{1}{\sqrt5})\cup(\frac{1}{\sqrt5},\infty)$$

برای حل نامعادله‌ی بالا، دو حالت ذیل را درنظر می‌گیریم:

حالت اول:

$$\begin{cases}x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt5})\cup(\frac{1}{\sqrt5},\infty)\\ 3x+2\ge 0\\ \frac{3x-2}{\sqrt{5x^2-1}}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt5})\cup(\frac{1}{\sqrt5},\infty)=A\\ 3x-2\le\sqrt{5x^2-1}\end{cases}$$

چون عبارت سمت راست این نابرابری به ازای هر $x\in A$ مثبت است، بنابراین برای به دست آوردن مجموعه جواب این دستگاه کافی است، اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را بیابیم:

(الف) $\begin{cases}x\in A\\ 3x-2<0\end{cases}\Rightarrow D_2=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt5})\cup(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{3})$

ب) $\begin{cases}x\in A\\ 3x-2\ge 0\\ (3x-2)^2\le 5x^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[\frac{2}{3},\infty)\\ x\in[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]\end{cases}\Rightarrow D_3=[\frac{2}{3},\frac{5}{2}]$

$$D'=D_2\cup D_3=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt5})\cup(\frac{1}{\sqrt5},\frac{5}{2}]$$

حالت دوم:

$$\begin{cases}x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt5})\cup(\frac{1}{\sqrt5},\infty)\\ 3x+2<0\\ \frac{3x-2}{\sqrt{5x^2-1}}\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,\frac{2}{3})\\ 3x-2\ge\sqrt{5x^2-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,-\frac{2}{3})\\ 3x-2>0\\ (3x-2)^2\ge\sqrt{5x^2-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\varnothing\\ 4x^2-12x+5\ge 0\end{cases}\Rightarrow D''=\varnothing$$

$$\Rightarrow D=D'\cup D''\Rightarrow D=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt5})\cup(\frac{1}{\sqrt5},\frac{5}{2}]$$

۳. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}\ge 0\Rightarrow\sqrt{4-\sqrt{1-x}}\ge\sqrt{2-x}$

دامنه‌ی تعریف نامعادله :

$$\begin{cases}1-x\geq 0\\ 4-\sqrt{1-x}\geq 0\\ 2-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ \sqrt{1-x}\leq 4\\ x\leq 2\end{cases}\Rightarrow D_1=[-15,1]$$

$$\begin{cases}x\in[-15,1]\\ \sqrt{4-\sqrt{1-x}}\geq\sqrt{2-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-15,1]\\ \sqrt{1-x}\leq x+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-15,1]\\ x+2\geq 0\\ (1-x)\leq(x+2)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in[-2,1]\\ x^2+5x+3\geq 0\end{cases}\Rightarrow D=[\frac{-5+\sqrt{13}}{2},1]$$

.۴

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}\Rightarrow\frac{\sqrt{x^2-16}+|x-3|}{\sqrt{x-3}}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

دامنه‌ی تعریف نامعادله :

$$\begin{cases}x^2-16\geq 0\\ x-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,-4]\cup[4,\infty)\\ x\in(3,\infty)\end{cases}\Rightarrow D_1=[4,\infty)$$

چون به ازای هر $x\in[4,\infty)$ عبارت‌های $|x-3|$ و $\sqrt{x-3}$ مثبت هستند، بنابراین داریم :

$$\begin{cases}x\in[4,\infty)\\ \sqrt{x^2-16}+x-3>5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[4,\infty]\\ \sqrt{x^2-16}>8-x\end{cases}$$

برای به‌دست آوردن مجموعه جواب‌های این دستگاه، باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه (الف) و (ب) را بیابیم :

(الف) $\begin{cases}x\in[4,\infty)\\ 8-x<0\end{cases}\Rightarrow D_2=[8,\infty);$

(ب) $\begin{cases}x\in[4,\infty)\\ 8-x\geq 0\\ x^2-16>(8-x)^2\end{cases}\Rightarrow D_3=[5,8)$

$$\Rightarrow D=D_2\cup D_3\Rightarrow D=(5,\infty)$$

تمرین:

نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $4-x\leq\sqrt{x^2-2x}$ ۲) $\sqrt{x^2+x}>1-2x$

۳) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}>-1$ ۴) $\sqrt{4-x^2+\frac{|x|}{x}}\geq 0$

۵) $\sqrt{x+1}>\sqrt{3-x}$ ۶) $\sqrt{24-10x}\geq 3-4x$

۷) $x>\sqrt{1-x}$ ۸) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}$

۹) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ ۱۰) $\sqrt{24-5x}\leq x$

۱۱) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

۱۲) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3-1}}<4$ ۱۳) $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}>-\frac{1}{3}$

۱۴) $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$

۱۵) $\sqrt{x+1}+1<4x^2+\sqrt{3x}$

۱۶) $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x}$ ۱۷) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{8-x}>3$

۱۸) $5\sqrt[3]{x-1}<2\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ۱۹) $\sqrt{10-\sqrt[3]{28-x}}<3$

۲۰) $2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)<3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2\right)$



با راهیان المپیاد های ریاضی ۲

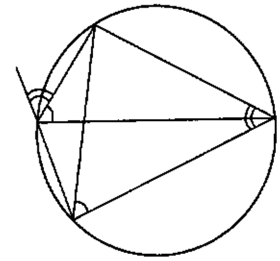
غلامرضا یاسی پور

اشاره

در شماره‌های قبل به حل مسائلی درباره‌ی مثلث پرداختیم، اینک در ادامه بحث، مسائلی را درباره‌ی چهارضلعی‌ها بیان و اثبات خواهیم کرد.

۱ـ۲. چهار ضلعی‌های محاطی

حل مسائل مسابقه‌ای در هندسه‌ی مسطحه، اغلب به اثبات برابری بعضی از زوایا می‌انجامد. در این مورد، یکی از راه‌های سودمند، جست‌وجوی **چهارضلعی‌های محاطی**، به علت دو ویژگی این **چهار ضلعی** هاست: زاویه‌ی حاصل از یک ضلع و یک قطر آن برابر زاویه‌ی حاصل از ضلع مقابل و قطر دیگر آن است، و هر زاویه‌ی آن، مکمل زاویه‌ی مقابل آن است (شکل ۱ـ۲ـ۱ را ملاحظه کنید). در هر دو حالت، برابری‌ها، به علت زوایای محاطی مقابل به کمان‌های یکسان، برقرارند.



شکل ۱ـ۲ـ۱

مسائلی را که در این مورد انتخاب کرده‌ایم، می‌توان با استفاده از این دو ویژگی حل کرد. مثال زیر، یکی از این موارد است.

فرض می‌کنیم، AB وتری در یک دایره و P نقطه‌ای بر این دایره باشد. نیز فرض می‌کنیم، Q تصویر P بر AB و R و S تصویرهای P بر مماس‌های بر دایره A و B باشند. ثابت کنید که PQ واسطه‌ی هندسی PR و PS است.

ثابت می‌کنیم، مثلث‌های PRQ و PQS مشابه‌اند. این موضوع، مستلزم آن است که:

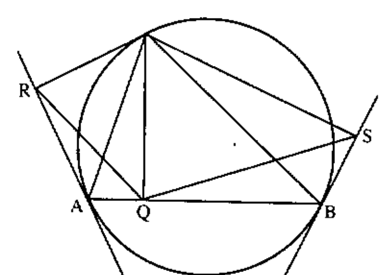
$$PR/PQ=PQ/PS$$

و در نتیجه:

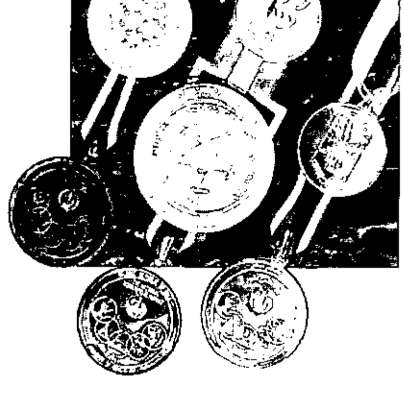
$$PQ^2 = PR.PS$$

چهار ضلعی‌های PRAQ و PQBS محاطی‌اند، زیرا هریک از آن‌ها دو زاویه‌ی قائمه‌ی مقابل دارند (شکل ۱ـ۲ـ۲ را ملاحظه کنید). در چهارضلعی اول: $\angle PRQ = \angle PAQ$، و در چهارضلعی دوم: $\angle PQS = \angle PBS$. بنابر زوایای محاطی، $\angle PAQ$ و $\angle PBS$ برابرند و نتیجه می‌شود که: $\angle PRQ = \angle PQS$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که: $\angle PQR = \angle PSQ$.

این موضوع نشان می‌دهد که مثلث‌های PRQ و PQS مشابه‌اند و نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید.



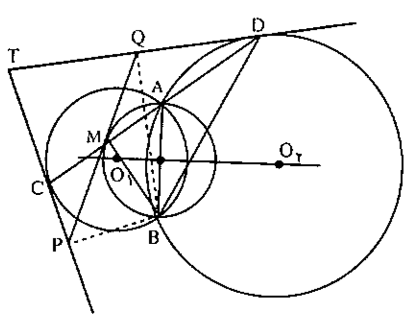
شکل ۱ـ۲ـ۲



مسأله‌ی منتخب دوم، از کتاب "Ti teica"، با نام Probleme de Geometrie (مسائلی در هندسه) انتخاب شده است.

فرض می‌کنیم، A و B نقاط مشترک دو دایره باشند. خط گذرنده از A دو دایره را در C و D قطع می‌کند. فرض می‌کنیم، P، Q تصویرهای B بر مماس‌های بر دو دایره در C و D باشند. ثابت کنید PQ مماس بر دایره‌ی به قطر AB است.

بعد از رسم شکل (شکل ۱ـ۲ـ۳)، یکی از حدس‌های سودمند این است که نقطه‌ی تماس بر CD قرار دارد. بنابراین، تقاطع دایره‌ی به قطر AB با خط CD را با M نمایش می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که PQ در M بر این دایره مماس است.



شکل ۱ـ۲ـ۳

اثبات را در حالتی انجام می‌دهیم که شکل مورد بحث، شکل ترسیم شده باشد؛ حالت‌های دیگر کاملاً مشابه این حالت هستند. فرض می‌کنیم، T تقاطع مماس‌های در C و D باشد. زوایای ABD و ADT برابرند، زیرا هر دو به اندازه‌ی نصف کمان AD هستند. به همین ترتیب، زوایای ABC و ACT برابرند، زیرا به اندازه‌ی نصف کمان AC هستند. این موضوع مستلزم آن است که:

$$\angle CBD = \angle ABD + \angle ABC = \angle ADT + \angle ACT$$
$$= 180^\circ - \angle CTD$$

که در آن، آخرین برابری از مجموع زوایای مثلث TCD

نتیجه می‌شود. بنابراین، چهارضلعی TCBD محاطی است. چهارضلعی TPBQ نیز محاطی است، زیرا دارای دو زاویه‌ی قائمه‌ی متقابل است. این موضوع، مستلزم آن است که:

$\angle PBQ = 180^\circ - \angle CTD$

به این ترتیب، $\angle PBQ = \angle DBC$، زیرا هردو زاویه‌ی CTD را به عنوان مکمل خود دارند. بنابراین، با تفریق زاویه‌ی CBQ خواهیم داشت:

$\angle CBP = \angle QBD$

چهارضلعی‌های BMCP و BMQD محاطی‌اند، زیرا:

$\angle CMB = \angle CPB = \angle BQD = \angle DMB = 90^\circ$

در نتیجه:

$\angle CMP = \angle CBP = \angle QBD = \angle QMD$

که نشان می‌دهد، M بر PQ واقع است. از این گذشته، در چهارضلعی دوری (محاطی) QMBD،

$\angle MBD = 180^\circ - \angle MQD$

$= \angle QMD + \angle QDM = \angle QMD + \angle ABD$

زیرا هم $\angle QDM$ هم $\angle ABD$ به اندازه‌ی نصف کمان AD هستند. از آن‌جا که:

$\angle MBD = \angle MBA + \angle ABD$

برابری فوق، مستلزم آن است که: $\angle QMD = \angle MBA$؛ در نتیجه، MQ بر دایره‌ی مورد بحث مماس است و مسأله حل می‌شود.

در ادامه، فهرستی از مسائلی به دست داده‌ایم که می‌توان با استفاده از ویژگی‌های چهارضلعی‌های محاطی آن‌ها را حل کرد.

۱. فرض می‌کنیم، $\angle AOB$ زاویه‌ای قائمه، M و N نقاطی به ترتیب واقع بر نیم‌خط‌های OA، OB و MNPQ مربعی چنان باشد که MN نقاط O و P را جدا کنند. مکان هندسی مرکز مربع را هنگامی که M و N تغییر می‌کند، بیابید.

۲. نقطه‌ی درونی P در مستطیل ABCD چنان انتخاب شده است که:

$\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$

مجموع زوایای $\angle DAP$ و $\angle BCP$ را بیابید.

۳. فرض می‌کنیم ABCD مستطیل و P نقطه‌ای متفاوت از رأس‌های آن، بر دایره‌ی محیطی آن باشد. نیز فرض می‌کنیم، X، Y، Z و W، به ترتیب، تصویرهای P بر AB، BC، CD، و DA باشند. ثابت کنید، یکی از نقاط X، Y، Z و W، محل تلاقی ارتفاعات مثلثی است که توسط سه نقطه‌ی دیگر ساخته می‌شود.

۴. ثابت کنید، چهار تصویر رأس A از مثلث ABC بر نیمسازهای درونی و برونی $\angle B$ و $\angle C$، بر یک خط راست واقع‌اند.

۵. فرض می‌کنیم، ABCD یک چهارضلعی محدب و چنان باشد که قطرهای AC و BD متعلق به آن متعامد باشند و P نقطه‌ی تلاقی‌شان باشد. ثابت کنید که انعکاس‌های P نسبت به AB، BC، CD و DA هم‌دور هستند.

۶. فرض می‌کنیم، B وC نقاط انتهایی و A نقطه‌ی میانی یک نیم‌دایره باشند. نیز فرض می‌کنیم، M نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط AC و P و Q، به ترتیب پاهای عمودهای رسم شده از A و C بر خط BM باشند. ثابت کنید: BP=PQ+QC.

۷. نقاط E و F بر ضلع BC از چهارضلعی محدب ABCD مفروضند (E از F به B نزدیک‌تر است). می‌دانیم که $\angle BAE = \angle CDF$ و $\angle EAF = \angle FDE$. ثابت کنید: $\angle FAC = \angle EDB$.

۸. در مثلث ABC، $\angle A = 60^\circ$ و نیمسازهای BB' و CC' در I متقاطع هستند. ثابت کنید: $IB' = IC'$.

۹. فرض می‌کنیم، در مثلث ABC، I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی باشد. ثابت کنید، مرکز دایره‌ی محیطی AIB بر CI واقع است.

۱۰. فرض می‌کنیم، ABC یک مثلث و D پای ارتفاع رسم شده از A باشد. نیز فرض می‌کنیم، E و F بر خطی گذرنده از D و چنان باشند که AE بر BE و AF بر CF عمود باشد، و E و F متفاوت از D باشند. نیز فرض می‌کنیم، M و N، به ترتیب، نقاط میانی پاره‌خط‌های BC و EF باشند. ثابت کنید، AN بر NM عمود است.

۱۱. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی حادالزوایا، و T نقطه‌ای واقع در درون آن و چنان باشد که:

$\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$

نیز فرض می‌کنیم، M، N و P، به ترتیب، تصویرهای T بر BC، CA، و AB باشند.

دایره‌ی محیطی مثلث MNP خطوط BC، CA، و AB را برای دومین بار، به ترتیب در M'، N' و P' قطع می‌کنند. ثابت کنید، مثلث $M'N'P'$ متساوی‌الاضلاع است.

۱۲. فرض می‌کنیم، A نقطه‌ای ثابت بر ضلع Ox از زاویه‌ی xOy باشد. دایره‌ی متغیر C بر Ox و Oy، با نقطه‌ی تماس D با Oy مماس است. مماس دوم از A بر C، آن را در E قطع می‌کند. ثابت کنید، زمانی که C تغییر می‌کند، خط DE از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.

۱۳. فرض می‌کنیم، $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ یک شش‌ضلعی محاطی و P_0 تقاطع A_0A_1 و A_3A_4، P_1 تقاطع A_1A_2 و A_4A_5، و P_2 تقاطع A_2A_3 و A_5A_0 باشد. ثابت کنید، P_0، P_1 و P_2 بر یک خط راست واقع هستند.

حل مسأله‌های قسمت دوم

۲ـ۱. چهار ضلعی‌های محاطی

۱. مرکز مربع را با C نمایش می‌دهیم. از آن‌جا که

$\angle NOM + \angle NCM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی MONC دوری یا محاطی است. به این ترتیب، $\angle MOC = \angle MNC = 45^\circ$ که نشان می‌دهد C بر نیمساز $\angle AOB$ قرار دارد.

برعکس، به ازای هر C ی واقع بر این نیمساز، مربع‌های MONC و MNPQ را رسم می‌کنیم. از آن‌جا که CMN مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، C مرکز MNPQ است. بنابراین، مکان مورد بحث نیمساز $\angle AOB$ است. (از کتاب درسی دبیرستانی رومانی).

۲. مثلث DCP را به مثلث ABP' تبدیل می‌کنیم. به این طریق، چهارضلعی $APBP'$ را به دست می‌آوریم که دوری است؛ زیرا:

$\angle APB + \angle AP'B = 360^\circ -$

$\angle APD - \angle BPC = 180^\circ$

فرض می‌کنیم، Q تقاطع AB و PP' باشد. در این صورت، از آن‌جا که خطوط AD، PP' و BC موازی هستند، داریم:

$\angle DAP + \angle BCP = \angle APQ + \angle QP'B$

اندازه‌ی دو زاویه‌ی اخیر برابر نصف کمان‌های AP' و BP از دایره‌ی محیطی چهارضلعی $APBP'$ است. از طرف دیگر، زاویه‌ی BQP که قائمه است، نصف مجموع این دو کمان است. در نتیجه:

$\angle DAP + \angle BCP = \angle BQP = 90^\circ$

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۵).

۳. بدون از دست رفتن عمومیت مسأله، فرض می‌کنیم P بر کمان AB ای واقع باشد که شامل C و D نیست. باید ثابت کنیم، XY بر ZW عمود است. این مطلب به اثبات این موضوع تحویل می‌شود که مجموع و زوایای XYP و ZWP برابر ۹۰° است. اما از مستطیل‌های XBYP و ZDWP (که چهار ضلعی‌هایی دوری‌اند) داریم:

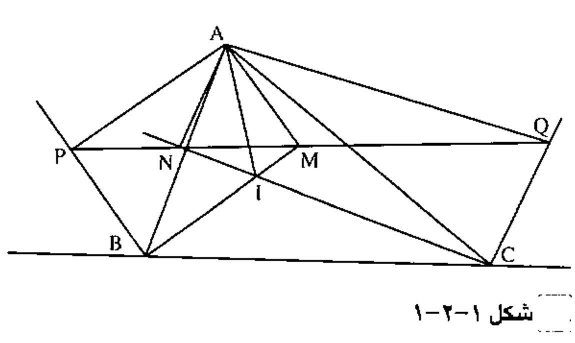
$\angle XYP = \angle XBP$ و $\angle ZWP = \angle ZDP$

نتیجه می‌گیریم که:

$$\angle XYP + \angle ZWP = \angle XBP + \angle ZDP$$
$$= \frac{\overset{\frown}{AP}}{2} + \frac{\overset{\frown}{PC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 90^\circ$$

که همان مطلوب است.

۴. فرض می‌کنیم، M و N به ترتیب، تصویرهای رأس A بر نیمسازهای درونی $\angle B$ و $\angle C$، و P و Q تصویرهای A بر نیمسازهای برونی آن‌ها باشند (شکل ۱ـ۲ـ۱)، و اثبات می‌کنیم که P بر MN قرار دارد.



شکل ۱-۲-۱

از آن جا که نیمسازهای درونی و بیرونی یک زاویه‌ی مثلث متعامدند، چهارضلعی APBM مستطیل است. در نتیجه:

$\angle AMP = \angle ABP$

داریم:

$\angle ABP = (180^\circ - \angle B)/2 = \angle A/2 + \angle C/2$

مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث را با I نمایش می‌دهیم. چهار ضلعی ANIM، از آن جا که دو زاویه‌ی مقابل قائمه دارد، دوری است. در نتیجه:

$\angle AMN = \angle AIN$

زاویه‌ی $\angle AIN$ زاویه‌ی برونی مثلث AIC است؛ در نتیجه:

$\angle AIN = \angle A/2 + \angle C/2$

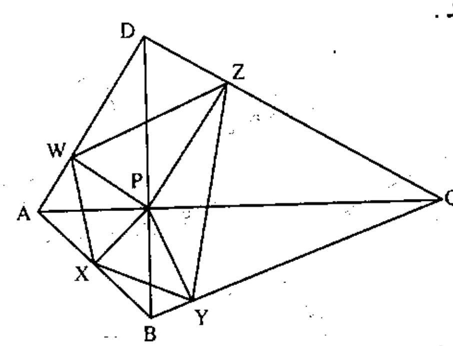
این مطلب نشان می‌دهد که:

$\angle AMP = \angle A/2 + \angle C/2 = \angle AMN$

و به این ترتیب، M، N و P بر یک خط راست قرار دارند. استدلالی مشابه مشخص می‌کند که Q بر MN واقع است، و به این ترتیب مسأله حل می‌شود.

۵. چهارضلعی مورد نظر به نسبت ۲ به چهارضلعی حاصل از تصویرهای P بر اضلاع چهارضلعی مورد بحث است. بنابراین کافی است دوری بودن مورد اخیر را ثابت کنیم.

فرض می‌کنیم X، Y، Z و W، به ترتیب تصویرهای P بر اضلاع AB، BC، CD، و AD باشند (شکل ۱ـ۲ـ۲). چهارضلعی‌های AXPW، BYPX، CZPY، و DWPZ دوری هستند، زیرا جمیع آن‌ها دارای یک جفت زاویه‌ی قائمه مقابلند.



شکل ۱ـ۲ـ۲

با درنظر گرفتن زاویه‌های حاصل از یک ضلع و قطر به دست می‌آوریم:

$\angle WAP = \angle WXP \ , \ \angle PXY = \angle PBY \ ,$

$\angle YZP = \angle YCP \ , \ \angle PZW = \angle PDW$

در مثلث‌های APD و BPC داریم:

$\angle PAD + \angle PDA = 90^\circ$

و:

$\angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

درنتیجه:

$$\begin{aligned}\angle WXY + \angle WZY &= \angle WXP + \angle PXY + \angle YZP + \angle PZW \\ &= \angle WAP + \angle PDW + \angle PBY + \angle YCP \\ &= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد، چهارضلعی XYZW دوری است، و مسأله حل می‌شود. (VSAMO,1993)

۶. راه‌حل اول: فرض می‌کنیم $R \in BQ$ و چنان باشد که Q بین B و R قرار گیرد و QR=QC (شکل ۱ـ۲ـ۳ را ملاحظه کنید). از آن جا که $\angle BQC$ قائمه است، Q بر نیم‌دایره‌ی مورد بحث قرار دارد. درنتیجه، چهارضلعی BAQC دوری است، و بنابراین:

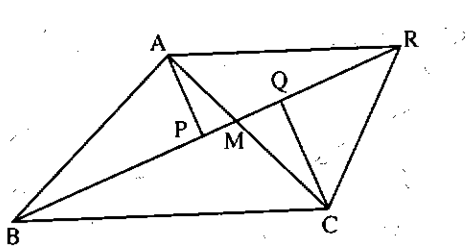
$\angle AQC = 180^\circ - \angle ABC = 135^\circ$

نتیجه می‌گیریم که:

$\angle AQR = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$

این مطلب مستلزم آن است که مثلث‌های AQC و AQR هم‌نهشت باشند، و از آن:

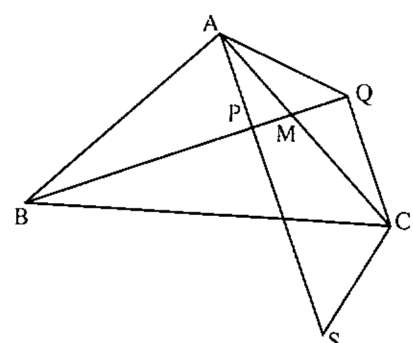
$AR = AC = AB$



شکل ۱ـ۲ـ۳

در مثلث متساوی‌الساقین ABR، AP ارتفاع است، بنابراین: BP=PR. از آن‌جا که: $PR = PQ + QC$، نتیجه به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. از شکل (۱ـ۲ـ۴) استفاده می‌کنیم که در آن، S بر خط AP چنان اختیار شده است که AQCS ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است. از آن‌جا که $\angle BQC = ۹۰°$، Q بر نیم‌دایره قرار دارد، و بنابراین چهارضلعی ABCQ دوری است.



شکل ۱ـ۲ـ۴

نتیجه می‌شود که:

$\angle AQB = \angle ACB = ۴۵°$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی PAQ، $\angle PAQ = ۴۵°$ که مستلزم آن است که: $\angle ASC = ۴۵°$. از آن‌جا که $\angle ASC = \angle ABC$، چهارضلعی ABSC دوری است، بنابراین:

$\angle ASB = \angle ACB = ۴۵°$

در این صورت، مثلث BPS متساوی‌الساقین است و درنتیجه: BP=PS. سرانجام، در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین AQCS، $AS = ۲AP + QC$

درنتیجه:

$BP = PS = AP + QC = PQ + QC$

(صورتی تعدیل یافته از قضیه‌ای منسوب به ارشمیدس)

۷. چهارضلعی AEFD، بنابر برابری $\angle EAF$ و $\angle FDE$، دوری است. بنابراین:

$\angle AEF + \angle FDA = ۱۸۰°$

از برابری $\angle BAE$ و $\angle CDF$ داریم:

$\angle ADC + \angle ABC = \angle FDA + \angle CDF + \angle AEF - \angle BAE = ۱۸۰°$

درنتیجه، چهارضلعی ABCD دوری است. بنابراین:

$\angle BAC = \angle BDC$

و نتیجه می‌گیریم که:

$\angle FAC = \angle BAC - \angle BAF = \angle BDC - \angle EDC = \angle EDB$

(المپیاد ریاضی روسیه، ۱۹۹۶)

۸. از آن‌جا که اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $۶۰°$ است، نتیجه می‌گیریم که مجموع دو زاویه‌ی دیگر $۱۲۰°$ است. درنتیجه:

$\angle IBC + \angle ICB = ۶۰°$

که مستلزم آن است که:

$\angle B'IC' = \angle BIC = ۱۲۰°$

و درنتیجه، چهارضلعی $AB'IC'$ دوری است؛ زیرا مجموع دو زاویه‌ی مقابل آن $۱۸۰°$ است. نتیجه می‌گیریم که:

$\angle IB'C' = \angle IAC' = ۳۰°$

و:

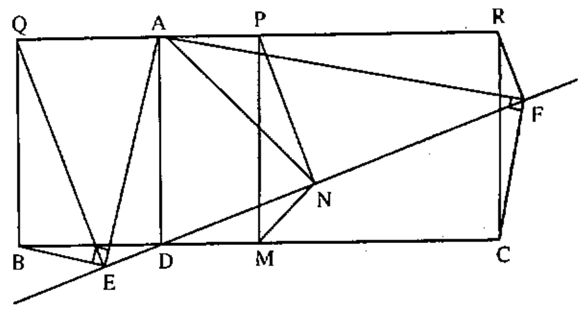
$\angle IC'B' = \angle IAB' = ۳۰°$

زیرا AI نیمساز است. در این صورت، مثلث $IB'C'$ متساوی‌الساقین است، و بنابراین: $IB' = IC'$.

۹. نیمسازهای درونی $\angle A$ و $\angle B$ در I تلاقی می‌کنند، درحالی که نیمسازهای برونی همین زاویه‌ها در I_C، مرکز دایره‌ی محاطی برونی مقابل C‌ی این مثلث، برخورد می‌کنند. نیمسازهای درونی و برونی یک زاویه متعامدند، بنابراین چهارضلعی $AIBI_C$ دارای دو زاویه‌ی قائمه مقابل است. درنتیجه: A، B، I، و I_C بر دایره‌ای به قطر II_C قرار می‌گیرند که در این صورت دایره‌ی محیطی مثلث ABI است. مرکز این دایره، وسط II_C است. از آن‌جا که C، I، و I_C بر یک خط راست قرار دارند، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۱۰. فرض می‌کنیم، P چنان باشد که ADMP مستطیل

شود. بر خط AP نیز نقاط Q و R را چنان اختیار می‌کنیم که QBDA و ADCR مستطیل باشند (شکل ۱ـ۲ـ۵).



شکل ۱ـ۲ـ۵

نقاط Q، B و D بر دایره‌ای به قطر AB قرار دارند. درنتیجه، ADEQ یک چهارضلعی دوری است. همچنین، R، C و D بر دایره‌ای به قطر AC قرار دارند. درنتیجه ADFR نیز یک چهارضلعی دوری است. چهارضلعی‌های ADEQ و ADFR در یک ضلع مشترکند، و دو ضلع دیگرشان خطوط نگهدارنده‌ی یکسان دارند. از آن‌جا که این دو دوری هستند، دو ضلع باقیمانده‌ی EQ و RF باید موازی باشند. به این ترتیب، E، Q، R و F رأس‌های یک ذوزنقه‌اند.

از طرف دیگر، در مستطیل QBCR، M وسط BC است، و MP موازی QB. بنابراین، P وسط QR است. از آن‌جا که N وسط EF است، نتیجه می‌شود که در ذوزنقه‌ی QEFR، NP موازی QE است، که مستلزم آن است که چهارضلعی ADNP دوری و دارای اضلاعی موازی اضلاع ADFR باشد. گذشته از این، A بر دایره‌ی محیطی این چهارضلعی قرار دارد، زیرا سه رأس دیگر مستطیل ADMP بر آن واقع هستند. درنتیجه، A، D، M و N بر دایره‌ای به قطر AM قرار دارد، و درنتیجه: $\angle ANM = \angle ADM = ۹۰^\circ$.

(المپیاد ریاضی آسیا ـ پاسیفیک، ۱۹۹۸، طراح R. Gelca)

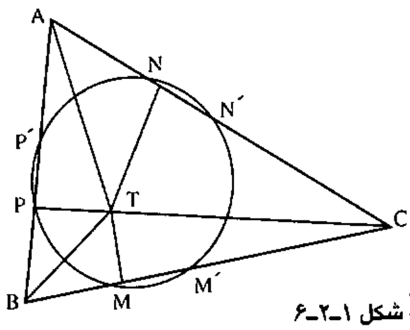
۱۱. چهارضلعی‌های $PN'NP'$ و APTN دوری هستند (شکل ۱ـ۲ـ۶ را ملاحظه کنید).

بنابراین:

$$\angle AN'P' = \angle APN = \angle ATN$$

به همین ترتیب:

$$\angle CN'M' = \angle CMN = \angle CTN$$



شکل ۱ـ۲ـ۶

نتیجه می‌گیریم که:

$$\angle AN'P' + \angle CN'M' = \angle ATN + \angle CTN = \angle ATC = ۱۲۰^\circ$$

بنابراین:

$$\angle P'N'M' = ۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

به همین ترتیب:

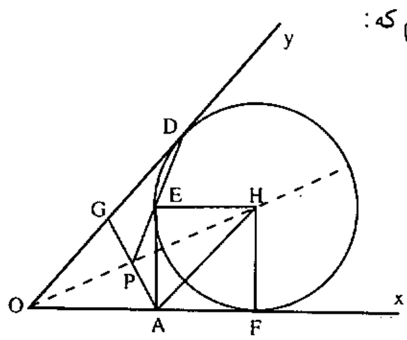
$$\angle N'M'P' = \angle N'P'M' = ۶۰^\circ$$

پس مثلث $M'N'P'$ متساوی‌الاضلاع است.

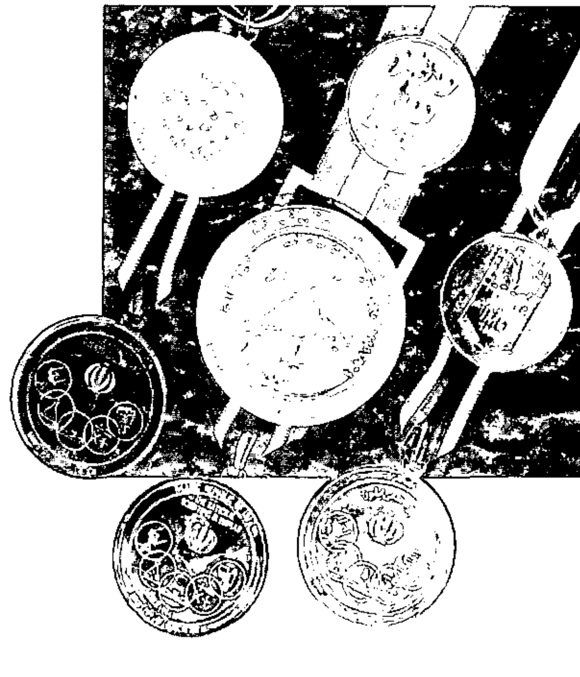
(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۹۲، طراح C. Cocea)

۱۲. فرض می‌کنیم، G نقطه‌ای بر Oy چنان باشد که OG=OA، و F نقطه‌ی تماس C با Ox، و H مرکز C باشد. هنگامی که F به A نزدیک می‌شود، DE به AG نزدیک می‌شود. بنابراین نقطه‌ی ثابت DE باید بر AG قرار گیرد. نیز فرض می‌کنیم، P تقاطع DE و AG باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم، A بین F و O باشد (شکل ۱ـ۲ـ۷). با محاسبه‌ی زاویه‌ها بر حسب کمان‌های دایره‌ی C، نتیجه می‌گیریم که:



شکل ۱ـ۲ـ۷



$\angle DEF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DOF$

نیز، $\angle GAF$ بیرونی مثلث متساوی‌الساقین OAG است؛ بنابراین:

$\angle GAF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DOF$

درنتیجه، $\angle DEF = \angle GAF$ که مستلزم آن است که چهارضلعی PAFE دوری باشد.

با استفاده از تعامد شعاع و مماس بر دایره در نقطه‌ی تماس، نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی HEAF دارای دو زاویه‌ی قائمه‌ی مقابل است و درنتیجه دوری است. بنابراین، APFH نیز دوری است (زیرا P و H هر دو بر دایره‌ی محیطی مثلث AEF قرار دارند). نتیجه می‌شود که:

$\angle HPA = \angle HFA = 90^\circ$

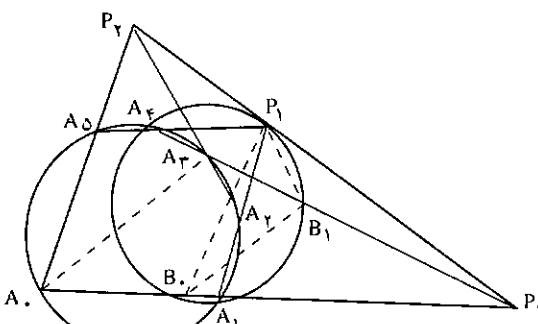
اما HO بر AG عمود است، چرا که نیمساز مثلث متساوی‌الساقین OAG است. این مطلب مستلزم آن است که P نقطه‌ی وسط AG باشد؛ بنابراین وابسته به D نیست.

اگر F بین A و O باشد، محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که: $\angle DEC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOG = \angle GAF$

بنابراین، چهارضلعی PFAE دوری است. از این مرحله به بعد، اثبات چون قبل است. و (مسائلی در هندسه Titeica,Gh., Probleme de geometrie Ed. Tehnica, Bucharest, 1929.)

۱۳. فرض می‌کنیم، B_0 و B_1 نقاط تقاطع دایره‌ی محیطی مثلث $A_1A_4P_1$ با خطوط A_0A_1 و A_3A_4 باشد (شکل ۱-۲-۸ را ملاحظه کنید). چهارضلعی $P_1B_1A_1A_4$ دوری است، درنتیجه:

$\angle B_1P_1A_1 = \angle A_1A_4B_1$



شکل ۱-۲-۸

نیز، چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ دوری است، درنتیجه:

$\angle A_1A_4A_3 = \angle A_3A_2P_1$

از آن‌جا که $\angle A_1A_4A_3$ و $\angle A_1A_4B_1$ در واقع یک زاویه هستند، نتیجه می‌شود که:

$\angle B_1P_1A_1 = \angle A_3A_2P_1$

و درنتیجه P_1B_1 و A_2P_2 موازی هستند. به طریقی مشابه نشان می‌دهیم، B_0P_1 و A_0P_2، و متقابلاً B_1B_0 و A_0A_3 نیز موازی‌اند. از آن‌جا که مثلث‌های $B_1B_0P_1$ و $A_3A_0P_2$ دارای اضلاع موازی‌اند، پرسپکتیو هستند، و این یعنی: A_0A_1، A_3A_4 و P_1P_2 متقاطع‌اند، و نتیجه می‌گیریم که P_0، P_1 و P_2 بر یک خط راست واقع هستند.

(قضیه‌ی پاسکال، راه‌حل به چاپ رسیده توسط Jan Yzeren در American Mathematical Monthly, 1993).

منبع:

Mathematical olympiad Challenges titu Andreescu Raz van Gelca

شرایط تدریس ریاضی

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی موضوع‌هایی که به تدریس ریاضی مربوط می‌شدند، بحث کردیم که عبارت بودند از: ۱ـ بضاعت علمی معلم، ۲ـ سر و وضع مناسب، ۳ـ بیان مقدمه‌ای مناسب برای شروع درس. اینک ادامه‌ی این گونه شرایط را در پی می‌آوریم.

۴. استفاده از تخته‌ی کلاس، گچ و تخته پاک‌کن

معمولاً تخته پاک‌کن از جنس ابر است. آن را کاملاً بشویید و تخته را خوب پاک کنید. هرگز گچ و تخته پاک‌کن را مانند یک شیء کثیف در دست نگیرید. تخته‌ی کلاس را به وسیله‌ی خط‌های عمودی و با حوصله، به دو یا سه یا چند قسمت مساوی تقسیم کنید. بعد از نوشتن، کنار بروید تا همه‌ی دانش‌آموزان، آن را ببینند. در نوشتن روی تخته عجله نکنید. برای جلب توجه بیش‌تر از گچ رنگی استفاده کنید و حتماً دور مطلب مهم را کادر بکشید.

تعریف‌ها را حتماً روی تخته بدون عجله و خوانا بنویسید؛ چون تعریف‌ها اساس حل مسائل هستند. از تندتند نوشتن، بدخط نوشتن و با بی‌حوصلگی نوشتن پرهیز کنید. ممکن است دست و لباستان گچی شود؛ اشکالی ندارد. این گچی شدن‌ها هم جزو کار تدریس است. مگر یک مکانیک اتومبیل، بدون این که دستش سیاه و روغنی شود، می‌تواند ماشین را تعمیر کند؟ معلم هم همین‌طور است. بدون گچی شدن، تدریس ریاضی کامل نخواهد بود. زیبا و مرتب نوشتن، و از گچ رنگی استفاده کردن، هنر است. هر قدر زیبا و دلچسب بنویسید، میزان یادگیری دانش‌آموزان بالا می‌رود.

۵. مطالعه‌ی ادبیات و شعر

معلم ادبیات لازم نیست ریاضی بداند، ولی معلم ریاضی باید ادبیات بداند. تدریس هر مقوله‌ای به کمک کلمات و جملات صورت می‌گیرد. به عبارت دیگر، برای تدریس باید با ادبیات آشنا بود. مطالعه‌ی ادبیات و تسلط بر آن باعث می‌شود بتوانید، یک مفهوم ریاضی را با عبارت‌های متفاوت بیان کنید. به این ترتیب، انتقال اطلاعات به دانش‌آموزان بهتر صورت می‌گیرد.

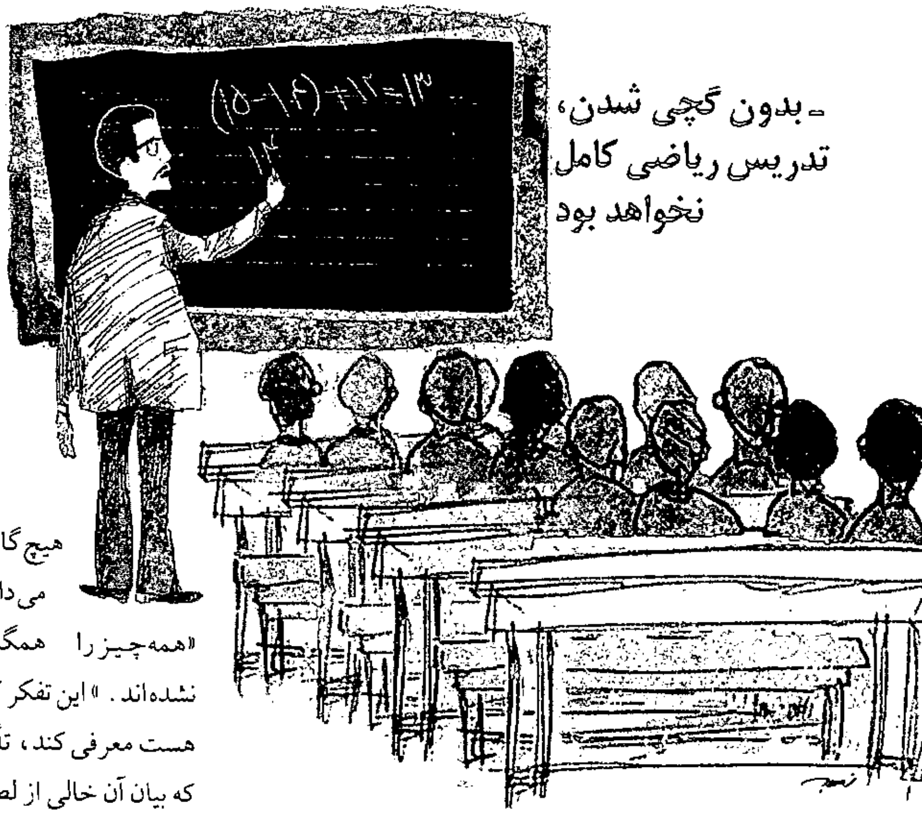
از لغات خارجی و الفاظی که معنی آن‌ها برای دانش‌آموزان روشن نیست، استفاده نکنید. اگر در ادبیات و شعر مطالعه داشته باشید، می‌توانید در تأئید گفته‌های خودتان یا در حواشی مطالب درسی، یکی دو بیت شعر بخوانید. کلاس درس ریاضی را از حالت سُنتی آن که خیلی بی‌روح و خشک بود، خارج کنید. حتی در صورت لزوم، لطیفه‌ای تعریف کنید. بگذارید دانش‌آموزان بخندند و روحیه‌ی شادتری پیدا کنند. از گفته‌های بزرگان استفاده کنید و در صورت نیاز، آن‌ها را معنی و تفسیر کنید.

همه‌ی این موارد در جهت یادگیری بهتر دانش‌آموزان هستند. این گونه گفتار و اعمال نشان می‌دهند که شما آدمی یک بعدی نیستید. نشان دهید که معلم ریاضی می‌تواند روحیه‌ی لطیف هم داشته باشد؛ حتی شاعر هم باشد. اگر معلم ریاضی فقط ریاضی بداند و از ادبیات و شعر بی‌بهره باشد، قبل از هرکس، خودش خسته می‌شود.

در دورانی زندگی می‌کنیم که بی‌اطلاعی از یک موضوع، معادل بی‌سوادی در آن موضوع است. امروزه اگر کسی از رایانه استفاده نکند، در این زمینه بی‌سواد است. من همیشه به

درس دوم

احمد قندهاری



- بدون گچی شدن، تدریس ریاضی کامل نخواهد بود

هیچ گاه طوری نشان ندهیم که همه چیز را می‌دانیم. به گفته‌ی حکیم «بزرگمهر»: «همه چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادرزاده نشده‌اند.» این تفکر که معلم باید خودش را بزرگ‌تر از آن‌چه هست معرفی کند، تأسف‌انگیز است. یاد خاطره‌ای افتادم که بیان آن خالی از لطف نیست.

یادم می‌آید، در سال ۱۳۶۳ یا ۱۳۶۴، روز بعد از کنکور سراسری، با حدود هشت تن از دبیران بسیار خوب ریاضی که در کلاس‌های کنکور تدریس می‌کردند، نشسته بودیم. من مسؤول گروه ریاضی بودم. سؤال‌های ریاضی کنکور در رشته‌ی تجربی به دستمان رسید. هر یک از همکاران نگاهی به سؤال‌ها کرد و عموماً چنین اظهار نظر کردند: سؤال‌ها خیلی سبکند، پیش پا افتاده‌اند، بدون حل هم می‌توان بعضی از آن‌ها را پاسخ داد، جواب‌ها واضحند و...

گفتم: شما مرا می‌شناسید. من اذعان دارم که نمی‌توانم در وقت اعلام شده، این سؤال‌ها را حل کنم. هر کدام از شما که می‌توانید در وقت مقرر این سؤال‌های پیش پاافتاده و ساده را حل کنید، تشریف ببرید اتاق بغلی و آن‌ها را حل کنید.

پاسخ همکاران همان بود که انتظارش را داشتم. یکی گفت الان که نمی‌شود. دیگری گفت من که خسته‌ام، سومی گفت حوصله‌اش را ندارم و... متأسفانه، صداقت بعضی از معلمان کم‌تر از حد معمول است و این آفتی بزرگ برای جامعه‌ی معلمان است.

دانش‌آموزان توصیه می‌کردم، حتماً خلاصه‌ی اخبار رادیو یا تلویزیون را گوش کنند. نباید از حوادثی که در اطراف ما می‌گذرد، بی‌خبر باشیم. مسلماً اطلاعات باعث می‌شود، مطالب زندگی را راحت‌تر جذب و هضم کنیم. ادبیات ما سرشار از نکته‌های دلپذیر و پر از شعرهای دلنشین است که بنا به مناسبت‌هایی می‌شود، از آن‌ها استفاده کرد و روحیه‌ی خود و اطرافیان را تلطیف کرد. من معتقدم، حتی در نوشتن کتاب‌های درسی ریاضی هم باید از لطیفه و شعر و گفتار بزرگان استفاده کرد.

۶. صادقانه تدریس کنید

یکی از موضوعات مهم برای یک معلم، تدریس با صداقت است. یعنی اگر مطلبی، مسأله‌ای یا تستی را نمی‌داند، بگوید نمی‌دانم، هیچ اشکالی ندارد. بگذارید دانش‌آموزان هم احساس کنند که بعضی مطالب را معلم هم نمی‌داند؛ تنها خودش نیست که نمی‌داند.

ندانستن عیب نیست، کتمان ندانستن عیب است.

۷. در کلاس از خود تعریف نکنید و دانش‌آموزان را هم مستقیماً نصیحت نکنید

یک ضرب‌المثل انگلیسی می‌گوید: «نگاه نکنید که چه می‌گوید، ببینید قبلاً چه کارهایی کرده است.»

متأسفانه بسیاری از همکاران سرکلاس می‌گویند: «من شاگرد اول بودم، من چنان بودم، من چنین بودم و... یادم می‌آید حدود ۲۰ سال پیش، یک معلم ریاضی که دیپلمه بود، در کلاس گفت: «من در فوق‌لیسانس، با فلانی هم کلاس بودم؟!»

باز یادم می‌آید که یک دبیر ریاضی در یک کلاس پیش‌دانشگاهی در منطقه‌ی سه آموزش و پرورش تهران، سر کلاس گفت: «من فارغ‌التحصیل هاروارد هستم.»

دبیر فیزیکی را می‌شناختم که دیپلمه بود، خودش را دکتر معرفی می‌کرد و حتی روی جزوه‌های خودش هم می‌نوشت دکتر...

همکاران گرامی باید توجه داشته باشند که دانش‌آموزان ممکن است درس ریاضی را خوب ندانند، ولی لزوماً کم‌هوش نیستند. جمع هوش دانش‌آموزان هر کلاس، قطعاً از هوش معلم بیش‌تر است. وقتی معلمی خارج از واقعیت‌ها حرف‌هایی می‌زند، بچه‌ها می‌فهمند و به روی خودشان نمی‌آورند. این مطالب در خارج از کلاس بازگو می‌شود و درنهایت به تمسخر و افت شخصیت آن معلم می‌انجامد. معلم باید توجه کند که مقابل دانش‌آموزان قرار ندارد، بلکه کنار آن‌هاست. نقش او نقش یک راهنماست که باید در یادگیری مطالب درسی به دانش‌آموزان کمک کند، نه این‌که خودش را تافته‌ی جدابافته بداند و مرتباً از خودش تعریف کند که این کار معمولاً باعث دلزدگی دانش‌آموزان خواهد شد.

موضوع دیگر این است که، هیچ‌گاه مستقیماً دانش‌آموزان را نصیحت نکنید که تقریباً هیچ نتیجه‌ای ندارد و گاهی هم اثرات منفی دارد. به جای نصیحت باید با اعمال و رفتار خود، ارزش‌های انسانی را به دانش‌آموزان بشناسانیم و در این مورد، از هیچ تلاشی دریغ نکنیم.

۸. در تدریس دانش‌آموزان را شرکت دهیم

اگر معلم در کلاس یکسره حرف بزند و تدریس کند، دانش‌آموزان پس از مدت کوتاهی خسته می‌شوند؛ زیرا تدریس ریاضیات جذابیت یک رمان یا یک داستان پلیسی را ندارد. اگر دانش‌آموزان را در بحث و تدریس شرکت دهیم و در صورت لزوم، از آن‌ها نظر بخواهیم یا بپرسیم نظر آن‌ها در این مورد خاص چیست، چند فایده دارد:

۱. دانش‌آموزان بیش‌تر به درس توجه می‌کنند، تا این‌که وقتی از آن‌ها نظرخواهی می‌شود، بهتر بتوانند پاسخ دهند.

۲. کلاس از حالت خمودگی و بی‌حالی خارج می‌شود.

۳. موجبات و زمینه‌هایی برای تشویق دانش‌آموزان در این سؤال‌ها و جواب‌ها حاصل می‌شود که در امر تدریس بسیار مهم است.

۹. وقت‌شناسی

کسی که ریاضیات تدریس می‌کند، مانند نَفْس ریاضیات، باید آدمی درست، منطقی، معقول و صادق باشد. یکی از موارد درست و منطقی بودن، رعایت نظم است. قبل از شروع کلاس‌ها در مدرسه حضور داشته باشید و سر ساعت به کلاس بروید. درست سر ساعت نیز از کلاس



ـ ندانستن عیب نیست، کتمان ندانستن عیب است

خارج شوید.

موقع ورود به کلاس، حتماً در بزنید و چند ثانیه مکث کنید، سپس وارد کلاس شوید. در لحظه‌ی ورود به کلاس، دانش‌آموزان را نگاه نکنید؛ ممکن است نشستن آن‌ها حالت مناسبی نداشته باشد که هم دانش‌آموز شرمنده شود و هم شما ناراحت شوید. پس از مستقر شدن در جایتان، با نام خدا و گفتن صبح بخیر یا روزبخیر و در صورت امکان، احوال‌پرسی کلی، درس را شروع کنید.

مقدار درس در هر جلسه، باید برای شما روشن باشد. بهتر است در اوایل تدریس، مثال‌ها و مسائل مناسب را یادداشت کنید. هیچ‌گاه در آخر وقت، مسأله‌ای را شروع نکنید که لازم شود، وقت استراحت خودتان و دانش‌آموزان برای ادامه‌ی حل مسأله گرفته شود.

۱۰. خلاصه‌ی درس

پس از آمادگی تدریس کلاس، بهتر است مقدمه‌ای درباره‌ی درس‌های قبلی یا خلاصه‌ای از درس‌های گذشته بیان شود تا ذهن دانش‌آموزان آماده‌ی مطالب جدید شود.

در گفتار صرفه‌جویی نکنید. به اصطلاح معروف، تلگرافی مطلب را بیان نکنید. همین جا دوباره سفارش می‌کنم، از مطالعه در ادبیات غافل نباشید، لازمه‌ی یک بیان خوب و جالب، در اختیار داشتن کلمات و لغات مناسب است. برای مثال، وقتی تابع هموگرافیک را تدریس می‌کنید، حتماً کلمه‌ی هموگرافیک را تعبیر و تفسیر کنید. مثلاً بفرمایید: «همو» یعنی مثل، مانند، شبیه، نظیر، عین، و «گراف» یعنی شکل و نمودار. آن‌گاه بفرمایید: هموگرافیک یعنی یک منحنی که از دو قسمت عین هم، مانند هم، و شبیه هم تشکیل شده باشد. با ملایمت و آرامش تدریس کنید.

در پایان درس، می‌توانید از دانش‌آموزی بخواهید، یک بار خلاصه‌ی درس را بیان کند، و پس از این کار، در تشویق او کوتاهی نکنید. سعی کنید همیشه موقعیت تشویق برای دانش‌آموزان ایجاد کنید. در انتهای ساعت تدریس، تخته را خوب پاک کنید، خلاصه‌ی درس را روی آن بنویسید، و برای جلسه‌ی آینده تکلیف معین کنید.



ـ معلم باید توجه کند که مقابل دانش‌آموزان قرار ندارد، بلکه کنار آن‌هاست

۱۱. تکلیف دانش‌آموزان

وقتی برای دانش‌آموزان تکلیف تعیین می‌کنید، توجه داشته باشید، اگر در تکلیف مسأله مشکلی وجود داشت، آن‌ها را حتماً راهنمایی کنید و به آن‌ها بگویید که جلسه‌ی آینده تکلیف آن‌ها را می‌بینید. در جلسه‌ی بعد، حتماً با حوصله و دقت تکلیف‌ها را نگاه کنید.

کسانی را که به‌طور کامل تکلیف خود را انجام داده‌اند، خیلی تشویق کنید و از کسانی که مسائل کمتری حل کرده‌اند، ضمن تشکر بخواهید که دفعات بعد کامل‌تر حل کنند.

اگر دانش‌آموزی تکلیف را انجام نداد و بهانه‌ای آورد، شما آن را به عنوان عذرخواهی بپذیرید. هیچ‌گاه طوری نشان ندهید که راست نمی‌گوید. ضمن حل مسائل روی تخته، از دانش‌آموزان بخواهید که حل‌های خود را نگاه کنند. چنانچه حل آن‌ها متفاوت باشد، آن را بیان کنند. اگر در مسأله‌ای ملاحظه کردید که راه‌حل دانش‌آموز راه‌حل بهتری است، حتماً او را تشویق کنید.

می‌دانیم، حل تصادفی یک مسأله ارزش ریاضی چندانی ندارد. به دانش‌آموزان یاد دهید که قبل از شروع حل مسأله، حتماً با دقت کامل درس را بخوانند و به مثال‌هایی که ضمن درس در کلاس حل شده‌اند، توجه کنند. سپس صورت مسأله را با دقت بخوانند و قبل از شروع حل مسأله، دقایقی بیندیشند و برای خود بیان کنند که چه اعمالی می‌خواهند در حل مسأله انجام دهند. پس از آن مسأله را آغاز کنند.

۱۲. عذرخواهی دانش‌آموزان را بپذیرید

در هر موردی که دانش‌آموز به دلیلی از شما عذرخواهی کرد، پوزش او را بپذیرید. بگذارید او هم بیاموزد که بعضی اوقات باید گذشت کرد. برای مثال، اگر دانش‌آموزی با تأخیر ورود وارد کلاس شد و بابت این تأخیر مطالبی بیان کرد، اولاً: دقیقاً به حرف‌های او گوش دهید، و ثانیاً نشان دهید که حرف‌هایش را باور دارید و عذرش را بپذیرید.

متأسفانه بعضی از همکاران به علت تأخیر، دانش‌آموز را در کلاس نمی‌پذیرند؛ در حالی که:

اولاً نپذیرفتن دانش‌آموز در کلاس خلاف مقررات است؛

ثانیاً، توقع دارید، این یک جلسه درس ریاضی را، دانش‌آموز چگونه جبران کند؟

ثالثاً، مطالب ریاضی زنجیروار به هم مرتبط هستند. اگر یک حلقه از این زنجیر به علتی وجود نداشته باشد، انسجام یادگیری از بین می‌رود.

رابعاً، معلم باید از هر جهت سرمشق باشد؛ چه در گفتار، چه در رفتار.

بسیار اتفاق می‌افتد که معلمی شاگردی را از کلاس اخراج می‌کند که این هم یک خلاف دیگر است. اگر مشکل دانش‌آموز با متانت و گفت‌وگوی پدرانه یا مادرانه قابل حل نباشد، بعد از خاتمه‌ی کلاس می‌توانید اولیای مدرسه را در جریان واقعه قرار دهید. فرض کنیم معلمی به دانش‌آموزی بگوید، از کلاس خارج شود، ولی شاگرد عمل نکند، چه باید کرد؟ باید دست به یقه شد؟ آن وقت این موضوع را چگونه می‌شود جمع و جور کرد؟

معلم باید سعی کند، نام دانش‌آموزان را به خاطر بسپارد. اگر معلم درست درس بدهد و رفتار معقولی هم داشته باشد، پس از مدتی رابطه‌ای عاطفی بین او و شاگردان به وجود می‌آید. معلم یک نام نیست، بلکه مجموعه‌ای از اعمال مناسب و منطقی است که باید به آن‌ها عمل شود. عرض کردم، سعی کنید نام شاگردان را به خاطر داشته باشید. اگر نام کسی یادتان رفت و خواستید او را صدا کنید، با القاب خوب و زیبا و دلچسب او را بخوانید. هیچ گاه به کسی القاب خنده‌دار یا مضحک ندهید.

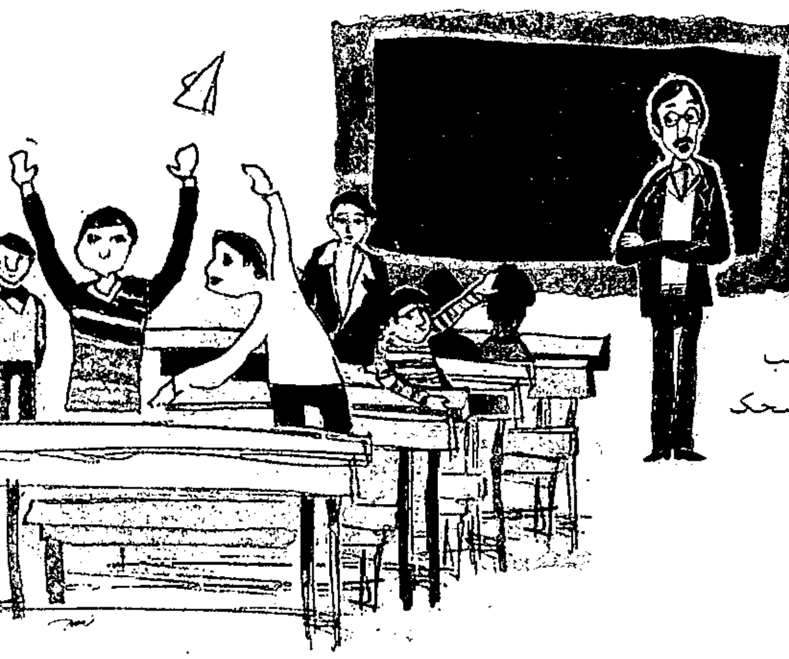
۱۳. پرسش دو هفته یک بار

سعی کنید، هر دو هفته یک بار با قرار قبلی، امتحان ساده‌ای از دانش‌آموزان به عمل آورید. در این نوع امتحان‌ها می‌توانید، پایه‌های اعتماد به یکدیگر را پی‌ریزی کنید. برای مثال، لحظاتی از کلاس خارج شوید. وقتی هم برگشتید، آن‌ها را نگاه نکنید. این عمل باعث می‌شود، آن‌ها هم به این عمل شما پاسخ مثبت دهند. حالا اگر یکی دو نفر هم شیطنت کردند و به ورقه‌ی بغل دستی سرک کشیدند، مهم نیست. نفع این عمل بیش‌تر از زیانش است. این نوع رفتارها باعث می‌شوند، دانش‌آموزان خود را قابل اعتماد احساس کنند و بکوشند آن را محفوظ نگه دارند.

این نوع برگزاری امتحان، علاوه بر امتحان، نوعی آموزش است. آموزش پهنه‌ی گسترده‌ای است که یادگیری درس‌ها، بخشی از آن محسوب می‌شود. پس از امتحان، ورقه‌ها را با دقت تصحیح بفرمایید و در جلسه‌ی بعد، را به دانش‌آموزان برگردانید. حتماً مسائل را روی تخته حل کنید و از آن‌ها بخواهید که ورقه‌ی خودشان را به دقت بررسی کنند و چنانچه در دادن نمره اشتباه شده باشد، به شما مراجعه کنند. هیچ گاه وقت امتحان را تغییر ندهید. بگذارید دانش‌آموزان منظم بار بیایند.

۱۴. سؤال‌های امتحان پایان ترم

سؤال‌های امتحان باید روشن و واضح و خالی از هر نوع ابهام باشند. تا جایی که مقدور است، سؤال‌ها را خوش خط و خوانا بنویسید. حتماً برای طرح سؤال وقت صرف کنید و خودتان قبل از امتحان آن‌ها را حل کنید. اگر معلم خوب تدریس



کرده باشد و امتحانات را دو هفته یک‌بار برگزار کرده باشد و دانش‌آموزان هم طبیعی باشند، معمولاً در امتحانات پایان ترم، به ندرت نمره‌ی کم‌تر از ۱۵ خواهند داشت. معمولاً در یک کلاس طبیعی که تدریس به صورت مطلوب انجام گرفته شده باشد، حدود ۱۵ درصد نمره‌ی کم‌تر از ۱۰ و حدود ۱۵ درصد نمرات عالی می‌گیرند، و بقیه نمراتشان بین ۱۰ تا ۱۷ است. در غیر این صورت، یک جای کار نادرست است: یا تدریس خوب انجام نشده است یا امتحانات هر دو هفته یک‌بار جدی گرفته نشده‌اند، یا سؤال‌های پایان ترم مناسب طرح نشده‌اند، یا...

۱۵. بدقول نباشید

معلم، به هر قول معقول و منطقی که به دانش‌آموزان می‌دهد، باید عمل کند؛ زیرا معلم اول باید کار خودش را جدی بگیرد تا دانش‌آموزان هم او را جدی بگیرند. توجه داشته باشیم، جدی گرفتن با ترسیدن دو مقوله‌ی جدا هستند. در محیط آموزشی، باید ریشه‌های هر نوع ترسی خشکانده شوند. برای مثال، اگر قرار گذاشتید که جلسه‌ی آینده درس را به صورت شفاهی بپرسید، حتماً این کار بکنید؛ حتی اگر تمام وقت کلاس گرفته شود. چه بسا در اثر بازگو کردن درس‌ها به وسیله دانش‌آموزان، مشکل آن‌ها حل شود و در اثر تکرار، آن درس را بهتر بفهمند.

۱۶. مدرسه را به محلی امن برای دانش‌آموزان تبدیل کنید

وقتی صداقت و صمیمیت در رفتار و گفتار شما نمایان باشد، مطمئن باشید، دانش‌آموزان مثل یک پدر یا مادر، شما را دوست خواهند داشت. به حرف‌های شما بیش‌تر توجه می‌کنند و می‌کوشند رضایت شما فراهم شود.

طوری رفتار کنید که دانش‌آموز احساس کند، شما حامی او هستید. اگر با مشکلی مواجه شد، با رغبت آن را با شما در میان بگذارد و احساس کند که شما دلسوز او هستید.

مدرسه فقط محل ارائه‌ی درس نیست. مدرسه محل انسان‌سازی است. در مدرسه دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که آدم‌های درستکار، صمیمی و صدیقی باشند. باید یاد بگیرند که به مقررات مدرسه و قوانین جاری در اجتماع احترام بگذارند و آن‌ها را رعایت کنند. مدرسه واقعاً خانه‌ی دوم دانش‌آموزان است؛ نه در شعار، بلکه در عمل.

در امر تدریس و اداره‌ی مدرسه باید از روان‌شناسی، علوم تربیتی و مدیریت بهره‌مند بود. ما در این مملکت به انسان‌های منطقی، با صداقت و درستکار بیش‌تر نیاز داریم تا به مهندس یا پزشک غیر مسؤول و بی‌صداقت.

۱۷. تشویق و تقویت روحیه

ثابت شده است که تشویق بسیار بسیار مفیدتر از تنبیه است. در مواردی حتی اگر اشتباهی از دانش‌آموزی سرزد، عکس‌العمل سریع و بد نشان ندهید، بعد از خاتمه‌ی کلاس با او پدرانه یا مادرانه صحبت کنید. اثرش خیلی بهتر از عکس‌العمل نامناسب است، در اظهارنظرها، خیلی احتیاط کنید. هر حرف شما ممکن است اثر خوب یا بدی در زندگی دانش‌آموز داشته باشد.

همه‌ی ما آلبرت اینشتین دانشمند بزرگ را می‌شناسیم. او در یک دبیرستان در مونیخ مشغول تحصیل بود و شخصی به نام دگن هارت، دبیر درس یونانی او بود، آلبرت از درس یونانی چندان خوشش نمی‌آمد. متأسفانه آقای دگن هارت هم در مقابل، عکس‌العمل نامناسب نشان می‌داد. یک روز پدر آلبرت از این دبیر پرسید: «آلبرت در درس شما چگونه شاگردی است؟» آقای دگن هارت سریعاً گفت: «این درس مهم نیست، او در هیچ کاری نمی‌تواند موفق شود.» تاریخ ثابت کرد که این دبیر بسیار غیرمسؤولانه اظهارنظر کرده است. چه بسیار دانش‌آموزانی که به علت رفتار غیرمسؤولانه‌ی یک معلم، حتی مجبور به ترک تحصیل شده‌اند.

به بحث خودمان برگردیم. عرض می‌کردم، دانش‌آموز باید در مدرسه آن‌قدر احساس امنیت کند که حرف دلش را با معلم و مدیران مدرسه در میان بگذارد. چه بسا در این گفت‌وگوها، بسیاری از مشکلات و اشتباهات دانش‌آموزان رفع شود. به دانش‌آموزان باید فهماند که آن‌ها هم حق دارند اظهارنظر کنند، ایراد بگیرند و درد دل کنند. مطمئن باشید، این اعمال نه تنها هیچ عواقب سویی ندارد، بلکه رهگشای جوان دانش‌آموز در زندگی او خواهند شد و او را منطقی‌تر و معقول‌تر بار می‌آورند.

منطق ریاضی ۳

حمیدرضا امیری

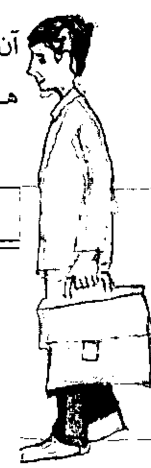
اشاره: در دو قسمت قبل با مقدمات جبر گزاره‌ها و سه ترکیب فصلی، عطفی و شرطی آشنا شدیم. در این شماره، ترکیب دو شرطی گزاره‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی خواص آن می‌پردازیم. در خاتمه نیز، قوانین جبر گزاره‌ها را بیان می‌کنیم و تا حدی کاربرد آن‌ها را نشان خواهیم داد.

ترکیب دوشرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره‌ای مانند p، گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم و همچنین، از گزاره‌ی q گزاره‌ی p را نتیجه بگیریم، از ترکیب دوشرطی با نماد (⇔) استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: $(p \Leftrightarrow q)$ و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

«اگر p آن‌گاه q، و اگر q آن‌گاه p»، «اگر p آن‌گاه q و برعکس»، «p نتیجه می‌دهد q را و برعکس»، «p اگر و فقط اگر q»، «q اگر و فقط اگر p» «p شرط لازم و کافی است برای q» و «q شرط لازم و کافی است برای p».

ترکیب دوشرطی بین دو گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن در صورتی درست که دو گزاره‌ی p و q مطابق جدول زیر هم‌ارز باشند (هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند):



p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

تذکر: با توجه به تعریف ترکیب‌های دوشرطی، رابطه‌ی زیر به‌راحتی از طریق جدول قابل اثبات است:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

نقیض ترکیب دوشرطی

با استفاده از هم‌ارزی اخیر و نقیض گزاره‌های شرطی و عطفی، می‌توان نوشت:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\right] \equiv \left[\sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)\right]$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

تذکر: در قسمت‌های بعدی و پس از بیان قوانین بین گزاره‌ها ثابت می‌کنیم:

$$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$$

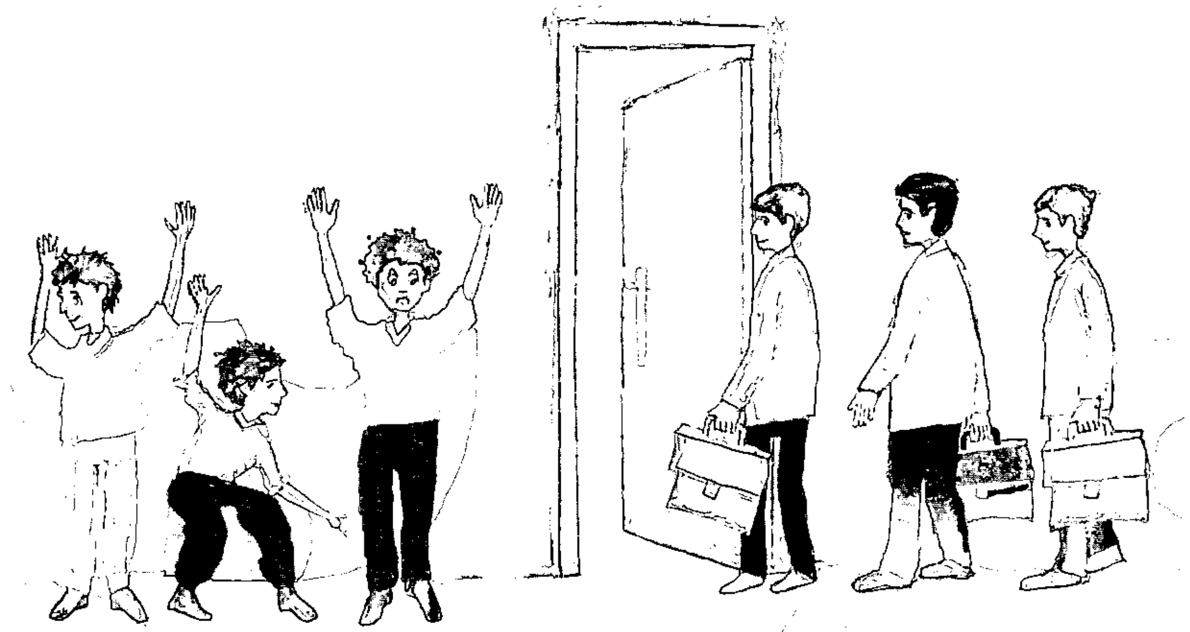
این هم‌ارزی نشان می‌دهد، برای نقیض کردن یک گزاره‌ی دو شرطی کافی است، یکی از دو گزاره را نقیض کنیم؛ یعنی:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$$

این هم‌ارزی‌ها را با استفاده از جدول نیز می‌توان ثابت کرد:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	ن	ن

در ریاضیات، ترکیب‌های دوشرطی و شرطی کاربردهای فراوان دارند و درواقع، تمام قضیه‌های شرطی به‌نوعی ترکیب‌های شرطی، و قضیه‌های دوشرطی، ترکیب‌های



دوشرطی هستند، اگر با فرض درستیِ گزاره‌ای چون p، درستیِ گزاره‌ای چون q را نتیجه بگیریم و این نتیجه گیری صحیح باشد، درواقع یک قضیه‌ی شرطی بیان کرده‌ایم که در آن، p را فرض و q را حکم می‌نامند. و اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی نیز یک قضیه‌ی شرطی باشد، یعنی با فرض درست بودن q بتوانیم درستیِ p را نیز نتیجه بگیریم، یک قضیه‌ی دوشرطی بیان شده است.

قبل از آن‌که به بیان قوانین در جبر گزاره‌ها بپردازیم، لازم است در مورد واژه‌ی «**گزاره‌نما**» که در کتاب‌های درسی از آن استفاده شده و هیچ‌گونه تعریف دقیقی از آن ارائه نشده است، توضیحاتی بدهیم.

هر عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر باشد و ارزش آن به متغیر یا متغیرهایش بستگی داشته باشد، گزاره‌نما نامیده می‌شود. برای هر گزاره‌نما دو مجموعه می‌توان تعریف کرد:

یکی مجموعه‌ی همه‌ی مقادیری که **می‌توانند** به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرند تا گزاره‌نما را به یک گزاره (چه درست، چه نادرست) تبدیل کنند. به این مجموعه **دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما** می‌گویند و آن را با D نمایش می‌دهند.

و دیگری زیرمجموعه‌ای از D (دامنه‌ی متغیر) که اگر به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرد، گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل می‌کند. به آن **مجموعه‌ی جواب** می‌گویند و آن را با M نمایش می‌دهند.

در هریک از گزاره‌نماهای زیر، دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب مشخص شده‌اند:

I) x عددی مثبت است:

$D = \mathbb{R}$ و $M = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

II) y عددی فرد است (صفت زوج و فرد بودن برای اعداد صحیح تعریف می‌شود):

$D=\mathbb{Z}$ و $M = 2\mathbb{Z} + 1 = \{x \in \mathbb{Z} | x = 2K + 1\} \ (K \in \mathbb{Z})$

III) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1)(x + 2) = 0$

$D = \mathbb{R}$ و $M = \{1, -1, -2, 2\}$

تذکر ۱: توجه دارید که وقتی یک معادله را حل می‌کنیم (ریشه‌های آن را پیدا می‌کنیم)، درواقع مجموعه‌ی جواب آن معادله یا یک گزاره‌نما را محاسبه می‌کنیم. (چون معادله شامل متغیر است).

تذکر ۲: اتحادها، گزاره‌نما به حساب نمی‌آیند، زیرا همواره درست هستند و ارزش آن‌ها به متغیر یا متغیرهایشان بستگی ندارد.

IV) $\frac{x + 3}{x^2 - 1}$ عددی منفی است.

$D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ و $M = (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

تذکر ۳: اگر گزاره‌نمایی برحسب متغیر x بیان شده باشد، آن را با p(x) نمایش می‌دهیم و اگر از دو متغیر x و y در آن استفاده شده باشد، آن را با p(x,y) نشان می‌دهیم.

از مطلب مربوط به گزاره‌نماها، دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب در بخش مربوط به **سورها** و گزاره‌های

سوری استفاده خواهیم کرد که مبحثی بسیار مهم و کاربردی است.

قوانین جبر گزاره‌ها

گزاره‌های p، q، r و ... دلخواه در نظر گرفته شده‌اند:

۱) $\begin{cases}(p \vee q) \equiv (q \vee p)\\ (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)\end{cases}$ قوانین جابه‌جایی

۲) $\begin{cases}p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r\\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r\end{cases}$ قوانین شرکت‌پذیری

۳) $\begin{cases}p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)\\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\end{cases}$

قوانین توزیع‌پذیری (پخشی)

تذکر: قوانین پخشی را از دو طرف هم‌ارزی به خاطر بسپارید. زیرا در بسیاری موارد به جای $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ هم‌ارز آن یعنی $p \vee (q \wedge r)$ را به کار می‌بریم.

۴) $\begin{cases}p \wedge (p \vee q) \equiv p\\ p \vee (p \wedge q) \equiv p\end{cases}$ قوانین جذب

تذکر: قوانین جذب را می‌توان به این صورت یاد گرفت که اگر گزاره‌ای چون p دوبار ظاهر شده باشد، یک‌بار با «$\vee$» و بار دیگر با «$\wedge$»، هر گزاره‌ی دیگر غیر از آن (مانند q) جذب p شود، حاصل خودِ p می‌شود، به مثال‌های زیر توجه کنید:

I) $\underline{\sim r} \wedge \left[(q \wedge p) \vee \underline{\sim r}\right] \equiv \sim r$

II) $\underline{(p \wedge \sim q)} \vee \left[(p \vee s) \wedge \underline{(\sim q \wedge p)}\right] \equiv (p \wedge \sim q)$

۵) $\begin{cases}\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)\\ \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)\end{cases}$ قوانین دمورگان

۶) $\begin{cases}(p \vee T) \equiv T\\ (p \vee \sim p) \equiv T\\ F \Rightarrow p \equiv T\end{cases}$ گزاره‌های همیشه درست

۷) $\begin{cases}(p \wedge F) \equiv F\\ (p \wedge \sim p) \equiv F\\ (p \Leftrightarrow \sim p) \equiv F\end{cases}$ گزاره‌های همیشه نادرست

۸) $\begin{cases}p \vee F \equiv p\\ p \wedge T \equiv p\\ T \Rightarrow p \equiv p\end{cases}$

تمرین ۱. قوانین جذب را با استفاده از قوانین ذکر شده ثابت کنید.

I) $p \vee (p \wedge q)$

$\overset{(8)}{\equiv} (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \overset{(3)}{\equiv} p \wedge (T \vee p)$

$\overset{(6)}{\equiv} p \wedge T \overset{(8)}{\equiv} p$

II) $p \wedge (p \vee q)$

$\overset{(8)}{\equiv} (p \vee F) \wedge (p \vee q) \overset{(3)}{\equiv} p \vee (F \wedge q)$

$\overset{(7)}{\equiv} (p \vee F) \overset{(8)}{\equiv} p$

تمرین ۲. هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

I) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$

II) $\left[(\sim p \wedge r) \vee r\right] \vee \left[\sim r \vee (\sim p \wedge \sim r)\right]$

حل:

I) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv \sim p \vee (q \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee F \equiv \sim p$

II) $\underbrace{\left[(\sim p \wedge r) \vee r\right]}_{r} \vee \underbrace{\left[\sim r \vee (\sim p \wedge \sim r)\right]}_{\sim r} \equiv (r \vee \sim r) \equiv T$

تمرین ۳. ثابت کنید، ترکیب شرطی از چپ در عطفی توزیع‌پذیر است یعنی،

$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

$p \Rightarrow (q \wedge r)$

$\overset{\text{تبدیل شرطی به فصلی}}{\equiv} \sim p \vee (q \wedge r) \overset{\text{پخشی}}{\equiv} (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$

$\overset{\text{تبدیل فصلی به شرطی}}{\equiv} (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

از این به بعد سعی می‌کنیم، هم‌ارزی‌ها را بدون استفاده از جدول و فقط با استفاده از قوانین منطق اثبات کنیم؛ یعنی از یک طرف هم‌ارزی حرکت کنیم و با استفاده از قوانین ذکر شده، به سمت دیگر هم‌ارزی برسیم که ان شاءالله در شماره‌های بعدی به تفصیل به این موضوع خواهیم پرداخت.

پس تا بعد!

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

○ حمیدرضا امیری

۱ . مجموعه‌ای را که با اعضا مشخص شده است، با نماد ریاضی و مجموعه‌ای را که با نماد ریاضی مشخص شده است، با اعضایش مشخص کنید .

$$A = \{5, 10, 17, \cdots, 82\}$$

$$B = \left\{(-1)^x \times \frac{1}{x(x+2)} \,\middle|\, x \in N\right\}$$

۲ . طرف دوم این تساوی‌ها را به‌دست آورید .

الف) $(A \cup B) - (B - A) =$

ب) $(A \cap B) \cap (A - B) =$

۳ . درستی این تساوی را ثابت کنید :

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$$

۴ . بسته بودن مجموعه‌ی داده شده را نسبت به عمل جمع و ضرب بررسی کنید .

$$A = \{3k + 1 \mid k \in Z\}$$

۵ . معادله‌ی توانی زیر را حل کنید .

$$\frac{3^{3x} \times 9^{x-2}}{3^{x-1} \times 6^x} = \frac{1}{2^x}$$

۶ . اگر $A = 4^n \times 2^4 \times 5^{n-2}$ و $B = 2^{2n} \times 10^{2n-4}$ ، چه رابطه‌ای بین A و B برقرار است؟

۷ . خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم $(x^3 + 4x^5)$ بر $(x^2 + x + 1)$ را به‌دست آورید .

۸ . در این تساوی، مقادیر a و b و c و d را تعیین کنید :

$$(4x^2 + 2x - 7)(3x + 4) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

۹ . با استفاده از اتحادها، حاصل هر عبارت را بیابید :

الف) $(a^2 + 2)(a^2 - 2)(a^4 + 4a^2 + 4)(a^4 - 4a^2 + 4)$

ب) $(x^2 + 1 - 5x)(x^2 + 1 + 4x)$

ج) $(3a + a^{-2})^3$

۱۰ . اگر $\frac{x^2 + 1}{x} = 2$ ، در این صورت مقدار عددی $(x - \frac{1}{x})$ را به‌دست آورید $(x \neq 0)$.

۱۱ . هریک از عبارت‌های زیر را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید :

الف) $6x - 18 + (x - 3)(x - 2)x$

ب) $a^3 + a - 10$

ج) $(x^2 + 2x)^2 - 3(x^2 + 2x) - 18$

۱۲ . دامنه‌ی عبارت داده شده را تعیین کنید و حاصل را به ساده‌ترین صورت بنویسید .

$$\frac{a + 2}{a - 2} - \frac{2}{1 - a} + \frac{2a}{a^2 - 3a + 2}$$

ریاضیات ۲

○ سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ . به ازای چه مقادیری از m، سه جمله‌ای درجه‌ی دوم

$$(2m + 5)x^2 + (2m - 5)x + 2m - 11$$

به ازای جمیع مقادیر x، همیشه منفی است؟

۲ . حدود n را چنان تعیین کنید که معادله‌ی

$$\frac{7 - x}{n} = \frac{n}{5 + x}$$

دارای جواب‌های حقیقی باشد .

۳ . عبارت $p(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ ، به ازای چه مقادیری از x در R بی‌معناست؟ اگر $p(x) = x + 2$ ، مقدار x چه عددی است؟

۴ . یک‌به‌یک و پوشا بودن تابع با ضابطه‌های زیر را بررسی کنید. در R^+ مقادیر $f(-3 + \sqrt{10})$ و $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را محاسبه کنید و نشان دهید، در R^+ تابع معکوس‌پذیر و صعودی است و معکوس آن را بیابید .

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & x < 0 \\ x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

۵ . معادله‌ی جدید منحنی $x^2 + x - xy - y = 0$ را پس از انتقال محورهای مختصات با حفظ جهت به موازات خود به نقطه‌ی $O'(2,2)$ بیابید . آیا O' مرکز تقارن منحنی جدید است؟

۶ . اگر نقاط $A(m + 3, 4)$ و $B(-2, n - 1)$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگر باشند، مقدار m و n را بیابید .

۷ . تعیین کنید که آیا منحنی $y^2 = x^2 + 9$ محور تقارن $x = 0$ یا $y = 0$ مرکز تقارن (۰ و ۰) دارد؟

۸ . دستگاه $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 4y + 3x = 7 \end{cases}$ را به روش کرامر حل کنید .

۹ . اگر $A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix}$ و $m \neq \pm 1$ ، مقدار m را چنان بیابید که داشته باشیم :

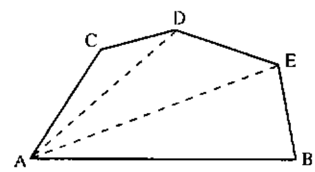
$$(A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

هندسه‌ی ۱

○ محمد هاشم رستمی

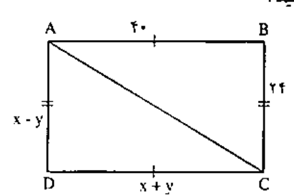
۱. ثابت کنید، هر پاره‌خط از هر خط شکسته‌ی محیط بر آن، کوچک‌تر است. برای مثال، در شکل زیر ثابت کنید:

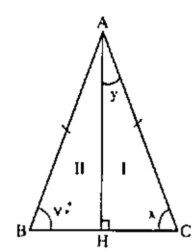
AB<AC+CD+DE+EB

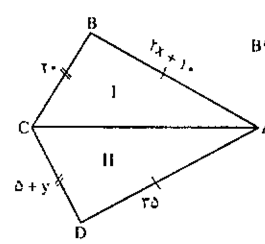


۲. مجموع زاویه‌های درونی یک n ضلعی محدب ۱۶۲۰ درجه است. n را تعیین کنید.

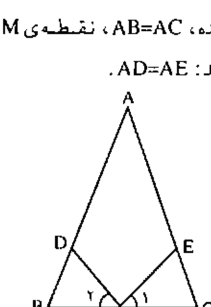
۳. در هر یک از شکل‌های زیر، مثلث‌های I و II هم‌نهشت هستند و علامت‌های یکسان، جزءهای متناظر متساوی را نشان می‌دهند. اندازه‌ی x و y را در هر یک از این شکل‌ها تعیین کنید.







۴. در شکل داده شده، AB=AC، نقطه‌ی M وسط ضلع BC و $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ است. ثابت کنید: AD=AE.



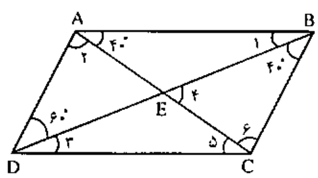
۵. با استفاده از ۶ پاره‌خط خمی رسم کنید که:

الف) ساده و بسته باشد. ب) ساده نباشد. پ) بسته نباشد، اما ساده نباشد.

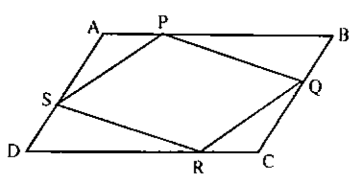
۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD، $A\hat{D}C = 70°$، $D\hat{B}C = 45°$ و $B\hat{A}C = 40°$ است. حساب کنید:

الف) اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{1}$، $\hat{2}$، $\hat{3}$، $\hat{4}$، $\hat{5}$ و $\hat{6}$.

ب) اندازه‌ی زاویه‌های CED و DAB

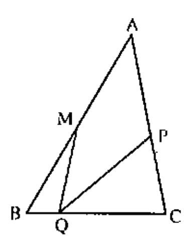


۷. روی ضلع‌های AB، BC، CD و DA از متوازی‌الاضلاع ABCD، پاره‌خط‌های AP، BQ، CR و DS را مساوی هم جدا می‌کنیم. ثابت کنید که چهارضلعی PQRS متوازی‌الاضلاع است.



۸. در مثلث ABC، نقطه‌ی Q روی ضلع BC، نقطه‌ی A وسط ضلع AB و نقطه‌ی P وسط ضلع AC است. ثابت کنید که:

$S_{BQM}+S_{PQC}=S_{AMQP}$



۹. قطر مستطیلی ۵۰ سانتی‌متر و اندازه‌ی یک ضلعش ۳۰ سانتی‌متر است. اندازه‌ی مساحت این مستطیل را تعیین کنید.

۱۰. اندازه‌ی ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی را تعیین کنید که مساحتش مساوی $۲۵\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع باشد.

۱۱. اندازه‌ی x و y را از نسبت‌های مساوی زیر به دست آورید:

$$\frac{2x+y}{12} = \frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$$

حسابان

○احمد قندهاری

۱. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{8-x^2}}$ را بیابید.

۲. فرد یا زوج زدن تابع‌هایی با ضابطه‌های $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$ و $g(x)=\left[\frac{4}{2+x}\right]+\left[\frac{6-x}{2-x}\right]$ را بررسی کنید.

۳. ثابت کنید، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{3x+\sqrt{3x-6}}$ در بازه‌ی $[2,+\infty)$، یک به یک است..

۴. اگر $x>0$، آن‌گاه ضابطه‌ی تابع معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}$ را بیابید.

۵. اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-2(\sqrt{2}+1)x^2+(4\sqrt{2}+1)x-2$ باشد، صفرهای دیگر این تابع را بیابید.

۶. حاصل عبارت $\frac{2\cos 3a\sin a}{\sin 2a}-2\cos 2a$ را بیابید.

۷. ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$$

۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+1$، اگر $x\to 1^+$، آن‌گاه $f(x)\to 3$. اگر بخواهیم $|f(x)-3|<\frac{1}{50}$، آن‌گاه حدود x را بیابید.

۹. حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x)$ را بیابید.

۱۰. اگر $x=1$ و $x=\frac{5}{2}$ مجانب‌های قائم و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx^2-14x+c}$ باشد، a و b و c را بیابید.

۱۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1, & |x|<2\\ |x-1|, & |x|\geq 2\end{cases}$ در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a و b را بیابید.

۱۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{b\sin 4x}{\sqrt{1-\cos 4x}}, & x<0\\ a\lfloor x-1\rfloor, & x>0\\ \lfloor x^2-\sqrt{3}\rfloor, & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است. a و b را بیابید.

جبر و احتمال

○هوشنگ شرقی

۱. به کمک اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید، به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq 3-\frac{1}{n}$$

۲. به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی n، $5^{n+1}+5^n-2$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

۳. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

۴. به کمک برهان خلف ثابت کنید، هرگاه n^2 مضرب ۷ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۷ است و از آن‌جا نشان دهید، $\sqrt{7}$ عددی گنگ است.

۵. درستی نابرابری $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b$ را برای عددهای حقیقی و مثبت a و b به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید و نشان دهید، همه‌ی مرحله‌ها برگشت‌پذیرند.

۶. حداقل چند عدد طبیعی باید انتخاب کرد تا با اطمینان بتوان گفت که دست‌کم چهار تای آن‌ها در تقسیم بر ۶ یک باقی‌مانده دارند؟

۷. به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها، برای مجموعه‌های A و B و C و D ثابت کنید:

الف) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

ب) $A\subseteq B,\ C\subseteq D\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$

۸. اگر داشته باشیم: $A=\{x|x\in\mathbb{R},\ x^3=4x\}$ ، $B=\{x|x\in\mathbb{Z},\ x^2<4x\}$

الف) مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و نمایش هندسی هر یک را نیز مشخص کنید.

ب) مجموعه‌ی $A^2-A\times B$ چند زیرمجموعه دارد؟

ج) مجموعه‌ی $(A^2-A\times B)\cap(A^2-B\times A)$ را تشکیل دهید.

هندسه‌ی ۲

○ محمد هاشم رستمی

۱. ثابت کنید که چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی متوازی‌الاضلاع، مستطیل است.

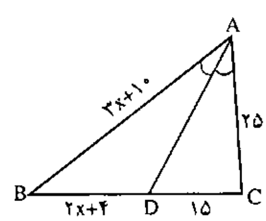
۲. قضیه‌های زیر را به صورت قضیه‌های شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید که عکس آن‌ها قضیه‌ی شرطی است یا نه. اگر قضیه‌ی شرطی است، هر یک از این قضیه‌ها و عکس آن‌ها را به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بنویسید. اگر قضیه‌ی شرطی نیست، یک مثال نقض بیاورید.

قضیه‌ی ۱. در هر مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.

قضیه‌ی ۲. دو شکل هم‌نهشت مساحت‌های مساوی دارند.

۳. سه ضلع مثلثی ۱۲، ۵ و ۸ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی را که نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی درونی مثلث، روی ضلع روبه‌رویش پدید می‌آورد، تعیین کنید.

۴. در شکل داده شده، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABCاست. با توجه به شکل، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



۵. ثابت کنید، در هر مثلث، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر هر ضلع، از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌تر است.

۶. سه پاره‌خط به طول‌های ۱۷، $X-1$ و ۱۳ داده شده‌اند. حدود X را چنان بیابید که این سه پاره‌خط، ضلع‌های یک مثلث باشند.

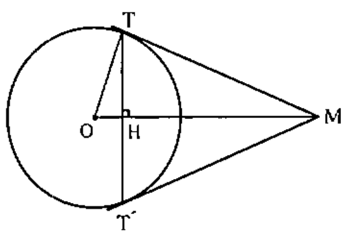
۷. مثلث ABC را با داده‌های زیر رسم کنید.

الف) دو ضلع AB=C، AC=b و میانه‌ی $AA' = m_a$

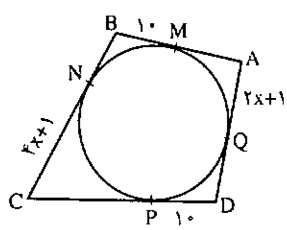
ب) $AA' = m_a$، $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$

۸. سه نقطه‌ی A، B و C در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد.

۹. از نقطه‌ی M که به فاصله‌ی ۲۵ از مرکز دایره‌ی C (O و ۱۰) قرار دارد، دو مماس MT و MT′ را بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر OM، پاره‌خط TT' را در نقطه‌ی H قطع کند، اندازه‌ی پاره‌خط‌های OH، TH و MT را تعیین کنید.

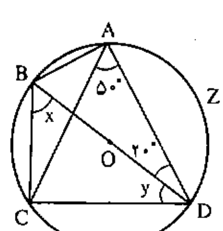


۱۰. اگر محیط چهارضلعی محیطی ABCD برابر با ۱۰۴ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.

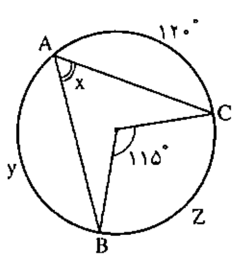


۱۱. دو دایره‌ی هم مرکز به شعاع‌های ۶ و ۱۰ داده شده‌اند. طول وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر را که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، تعیین کنید.

۱۲. اندازه‌ی x، y و z را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.

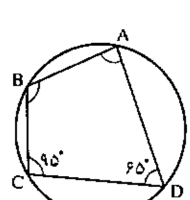


الف



ب

۱۳. اگر چهارضلعی ABCD محاطی باشد، اندازه‌ی زاویه‌های A و B از آن را تعیین کنید.



پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

حل ۱:

$$A=\{5,10,17,\cdots,82\}=\{k^2+1 \mid k\in N, 2\le k\le 9\}$$

$$B=\left\{(-1)^x\times\frac{1}{x(x+2)} \mid x\in N\right\}=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{8},-\frac{1}{15},\frac{1}{24},-\frac{1}{35},\cdots\right\}$$

حل ۲:

الف) $(A\cup B)-(B-A)=(A\cup B)\cap(B\cap A')'$

$$=(A\cup B)\cap(B'\cup A)$$

$$=A\cup(B\cap B')=A\cup\varnothing=A$$

ب) $(A\cap B)\cap(A-B)=(A\cap B)\cap\overbrace{(A\cap B')}^{(B'\cap A)}$

$$=A\cap(B\cap B')\cap A$$

$$=(A\cap\varnothing)\cap A=\varnothing\cap A=\varnothing$$

حل ۳:

$$(A\cup B)-(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)'$$

$$=(A\cup B)\cap(B'\cap C')$$

$$=(B'\cap C')\cap(A\cup B)=\left[(B'\cap C')\cap A\right]\cup\left[\underbrace{(B'\cap C')\cap B}_{\varnothing}\right]$$

$$=\left[A\cap(B'\cap C')\right]\cup\varnothing=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$$

حل ۴: برای این که مجموعه‌ای نسبت به یک عمل بسته باشد، باید حاصل ترکیب هر دو عضو آن مجموعه توسط آن عمل، عضوی از همان مجموعه باشد.

فرض کنیم: $(3k_1+1),(3k_2+1)\in A\Rightarrow$

$$(3k_1+1)\times(3k_2+1)=9k_1k_2+3k_1+3k_2+1$$

$$=3(\underbrace{3k_1k_2+k_1+k_2}_{k})+1=(3k+1)\in A\Rightarrow$$

نسبت به ضرب بسته است.

$$(3k_1+1)+(3k_2+1)=3k_1+3k_2+2=3\underbrace{(k_1+k_2)}_{(K'\in Z)}+2=(3k'+2)\notin A$$

حل ۵:

$$\frac{3^{3x}\times 9^{x-2}}{3^{x-1}\times 6^x}=\frac{1}{2^x}\Rightarrow\frac{3^{3x}\times 3^{2(x-2)}}{3^{x-1}\times 3^x\times 2^x}=\frac{1}{2^x}$$

$$\Rightarrow\frac{3^{3x+2x-4}}{3^{x-1+x}\times 2^x}=\frac{1}{2^x}\Rightarrow 2^x\times 3^{5x-4}=2^x\times 3^{2x-1}$$

$$\Rightarrow 5x-4=2x-1\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1$$

حل ۶:

$$A=4^n\times 2^4\times 5^{n-2}=2^{2n}\times 2^4\times 5^{n-2}=2^{2n+4}\times 5^{n-2}$$

$$B=2^{2n}\times 10^{2n-4}=2^{2n}\times 5^{2n-4}\times 2^{2n-4}=2^{4n-4}\times 5^{2n-4}$$

$$\Rightarrow\frac{B}{A}=\frac{2^{4n-4}\times 5^{2n-4}}{2^{2n+4}\times 5^{n-2}}=2^{(4n-4)-(2n+4)}\times 5^{(2n-4)-(n-2)}$$

$$=2^{2n-8}\times 5^{n-2}$$

حل ۷:

$$\begin{array}{l|l}
4x^5+x^3 & x^2+x+1\\ \hline
\pm 4x^5\pm 4x^4\pm 4x^3 & 4x^3-4x^2+x+3\\ \hline
-4x^4-3x^3 & \\
\pm 4x^4\pm 4x^3\pm 4x^2 & \\ \hline
x^3+4x^2 & \\
\pm x^3\pm x^2\pm x & \\ \hline
3x^2-x & \\
\pm 3x^2\pm 3x\pm 3 & \\ \hline
-4x-3 &
\end{array}$$

خارج قسمت $=4x^3-4x^2+x+3$

باقی‌مانده $=-4x-3$

حل ۸:

$$(4x^2+2x-7)(3x+4)=12x^3+16x^2+6x^2+8x-21x-28$$

$$=12x^3+22x^2-13x-28=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\Rightarrow a=12,\ b=22,\ c=-13,\ d=-28$$

حل ۹:

الف) $(a^2+2)(a^2-2)(a^4+4a^2+4)(a^4-4a^2+4)$

$$=(a^2+2)(a^2-2)(a^2+2)^2(a^2-2)^2$$

$$=(a^4-4)\left[(a^2+2)(a^2-2)\right]^2=(a^4-4)(a^4-4)^2=(a^4-4)^3$$

$$\left[(x^2+1)-5x\right]\left[(x^2+1)+4x\right]$$

ب) $=(x^2+1)^2+(-5x+4x)(x^2+1)+(-5x\times 4x)$

$$=(x^2+1)^2+(-x)(x^2+1)-20x^2$$

$$=(x^4+2x^2+1-x^3-x-20x^2)=x^4-x^3-18x^2-x+1$$

ج) $(3a+a^{-2})^3=(3a+\frac{1}{a^2})^3$

$$=27a^3+9a^2\cdot\times\frac{1}{a^2}+\frac{9}{a^4}\times 3a+(\frac{1}{a^2})^3$$

$$=27a^3+9+27\times\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^6}=27a^3+27a^{-3}+a^{-6}+9$$

حل ۱۰:

$$\frac{x^2+1}{x}=2\overset{(x\neq 0)}{\Rightarrow}x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2$$

$$(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=(x^2+\frac{1}{x^2})-2=2-2=0$$

$$\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=0\Rightarrow x-\frac{1}{x}=0$$

حل ۱۱:

الف) $6x-18+(x-3)(x-2)x=6(x-3)+(x-3)(x-2)x$

$= (x-3)[6+(x-2)x]$

$= (x-3)(x^2-2x+6)$

ب) $a^3+a-10 = a^3+a-2-8 = (a^3-8)+(a-2)$

$= (a-2)(a^2+2a+1)+(a-2)$

$= (a-2)(a^2+a+2)$

ج) $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)-18 = \left[(x^2+2x)-6\right]\left[(x^2+2x)+3\right]$

$= (x^2+2x-6)(x^2+2x+3)$

حل ۱۲ :

$a-2=0 \Rightarrow a=2$

$1-a=0 \Rightarrow a=1$

$a^2-3a+2=0 \Rightarrow (a-1)(a-2)=0 \Rightarrow a=1$ یا $a=2$

$D = \mathbb{R} - \{1,2\}$

$$\frac{a+2}{a-2} - \frac{2}{-(a-1)} + \frac{2a}{a^2-3a+2} = \frac{(a+2)(1-a)+2(a-2)+2a}{(a-2)(a-1)}$$

$$= \frac{-a^2-a+2+2a-4+2a}{(a-2)(a-1)}$$

$$= \frac{-a^2+3a-2}{(a-2)(a-1)} = \frac{-(a^2-3a+2)}{(a-2)(a-1)}$$

$$= \frac{-(a-1)(a-2)}{(a-2)(a-1)} = -1$$

ریاضی ۲

حل ۱ : برای آن‌که سه جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c ، همواره منفی باشد، کافی است که $a<0$ و $\Delta<0$ ؛ بنابراین :

$$\begin{cases} a = 2m+5 < 0 \ ; \ m < \frac{-5}{2} \\ \Delta = (2m-5)^2 - 4(2m+5)(2m-11) < 0 \end{cases}$$

$\Delta = 4m^2-20m+25-4(4m^2-12m-55);$

$\Delta = -12m^2+28m+245 < 0$

برای حل نامعادله‌های درجه‌ی دوم فوق ریشه‌های معادله‌ی $\Delta=0$ را تعیین می‌کنیم :

$-12m^2+28m+245=0 \ ; \ m = \frac{35}{6}, \ \frac{-7}{2}$

m		$-\frac{7}{2}$		$\frac{35}{6}$	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

با توجه به تعیین علامت Δ باید $m < \frac{-7}{2}$ یا $m > \frac{35}{6}$ باشد تا $\Delta<0$. و با توجه به $a<0$ یعنی $m < \frac{-5}{2}$ و اشتراک جواب $a<0$ و $\Delta<0$ داریم : $m < \frac{-7}{2}$

حل ۲ : باید جواب حقیقی معادله‌ی زیر را تعیین کرد :

$\frac{7-x}{n} = \frac{n}{5+x}; \ (7-x)(5+x) = n^2$

$35+2x-x^2 = n^2; \ x^2-2x+n^2-35 = 0$

$\Delta = 4-4(n^2-35) \geq 0 \ ; \ n^2 \leq 36 \ ; \ -6 \leq n \leq 6$

حل ۳ : عبارت $p(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$ به ازای هر مقدار x که $x^2+3x+4 \geq 0$ معین است؛ بنابراین :

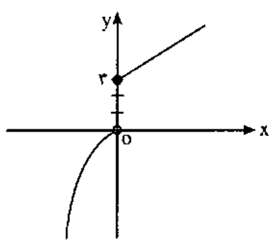
$x^2+3x-4 \geq 0 \ ; \ (x-1)(x+4) \geq 0 \ ; \ x \leq -4$ یا $x \geq 1$

$x \in (-\infty,-4] \cup [1,+\infty)$

حل ۴ : با رسم تابع، به سادگی می‌توان یک‌به‌یک و پوشایی آن را تشخیص داد :

با توجه به نمودار تابع نتیجه می‌شود که تابع یک‌به‌یک است، ولی پوشا نیست.

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & x<0 \\ x+3 & x \geq 0 \end{cases}$$



زیرا اگر در فاصله‌ی (۳ و ۰) (تابع جداشده) خطی به موازات محور xها رسم شود، منحنی‌ها را قطع نمی‌کند. در واقع برد تابع $R_f = (-\infty,0) \cup [3,+\infty)$ است و برابر R نیست.

$x = -3+\sqrt{10} \in R^+ : f(-3+\sqrt{10}) = -3+\sqrt{10}+3 = \sqrt{10}$

$$x \in R^+ : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)+3-(x+3)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

چون $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ ، پس تابع در $x \in R^+$ صعودی است. چون تابع f در R یک‌به‌یک است، بنابراین در R^+ نیز یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. ضابطه‌ی معکوس f را در R^+ به f^{-1} نشان می‌دهیم :

$y = f(x) = x+3 \ ; \ x = y-3 \ ; \ f^{-1}(x) = x-3$

حل ۵ : معادله‌ی منحنی $x^2+x-xy-y=0$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم :

$xy+y = x^2+x \ ; \ y(x+1) = x^2+x \ ; \ y = \frac{x(x+1)}{x+1}$ و $O'\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}$

$(x \neq -1) y = x, \begin{cases} x = X+2 \\ y = Y+2 \end{cases} : \ Y+2 = X+2 \ ; \ Y = X$

نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ متعلق به منحنی قدیم نیست؛ بنابراین نقطه‌ی $A'\begin{vmatrix}-1=X+2\\-1=Y+2\end{vmatrix}$ یا $A'\begin{vmatrix}-3\\-3\end{vmatrix}$ نیز متعلق به منحنی جدید، یعنی Y=X نیست و در دستگاه جدید، نقطه‌ی $A'\begin{vmatrix}-3\\-3\end{vmatrix}$ توخالی است. منحنی جدید، معادله‌ی خط نیمساز ربع اول و سوم است و در واقع، $O'(2,2)$ مبدأ جدید مرکز تقارن منحنی

جدید است.

حل ۶: دو نقطه‌ی $A(x,y)$ و $B(z,t)$ نسبت به محور yها قرینه هستند؛ اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} z=-x \\ t=y \end{cases} ; \begin{cases} -2=-(m+3) \\ n-1=4 \end{cases} ; \begin{cases} m=-1 \\ n=5 \end{cases}$$

حل ۷: نسبت به محور xها متقارن است.

$$y \to -y : (-y)^2 = x^2+9 \; ; \; y^2+x^2+9$$

نسبت به محور yها متقارن است.

$$x \to -x : y^2 = (-x)^2+9 ; \; y^2 = x^2+9$$

نسبت به مبدأ متقارن است.

$$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases} : (-y)^2 = (-x)^2+9 \; ; \; y^2 = x^2+9$$

حل ۸: ابتدا دستگاه را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+4y=7 \end{cases} ; \; x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4+14}{12+6} = \frac{18}{18} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{21-3}{12+6} = \frac{18}{18} = 1$$

بنابراین، جواب دستگاه چنین است: $y=1$ و $x=1$

حل ۹: با توجه به $m \neq \pm 1$، می‌توان نوشت:

$$A^2 = \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 \end{bmatrix} = (m^2-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

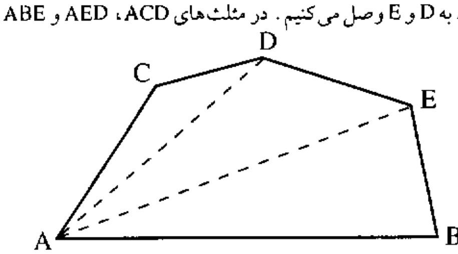
$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|}\begin{bmatrix} m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(m^2-1)^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m^2-1}{(m^2-1)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m^2-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\frac{1}{m^2-1} = 5 \; ; \; m^2-1 = \frac{1}{5}; \; m^2 = \frac{6}{5}; \; m = \pm\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\pm\sqrt{30}}{5}$$

هندسه ۱

۱. از A به D و E وصل می‌کنیم. در مثلث‌های ACD، AED و ABE داریم:



$$AD<AC+CD \qquad (1)$$
$$AE<AD+DE \qquad (2)$$
$$AB<AE+EB \qquad (3)$$

از جمع کردن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$AD+AE+AB<AC+CD+AD+DE+AE+EB$$

پس از حذف مقدارهای مساوی از دو طرف این نامساوی خواهیم داشت:

$$AB<AC+CD+DE+EB$$

۲. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی محدب برابر $(n-2)\times 180^\circ$ است. بنابراین داریم:

$$(n-2)\times 180^\circ = 1620^\circ \Rightarrow n-2=9 \Rightarrow n=11$$

۳. الف) $\begin{cases} x+y=40^\circ \\ x-y=24 \end{cases} \Rightarrow x=32^\circ, \; y=8^\circ$

ب) $x=70^\circ, \; y=50^\circ$

پ) $\begin{cases} 2x+10=35 \\ 5+y=20 \end{cases} \Rightarrow x=12/5, \; y=15$

۴. دو مثلث MBD و MCE به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند، زیرا:

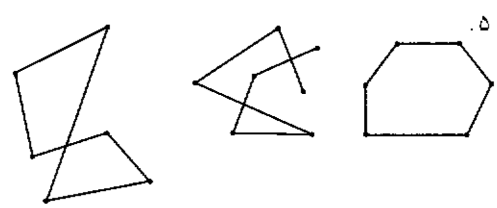
$MB=MC$ و $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ و $AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$

در نتیجه $BD=CE$ است و چون $AB=AC$ است، پس:

$$AB-BD=AC-CE \Rightarrow AD=AE$$

نکته: می‌توان هم‌نهشت بودن دو مثلث AMD و AME را ثابت کرد.

۵.



الف　　　ب　　　پ

۶. الف) $\hat{6}=80^\circ$ و $\hat{5}=40^\circ$، $\hat{4}=60^\circ$، $\hat{3}=20^\circ$، $\hat{2}=80^\circ$ و $\hat{1}=20^\circ$

ب) $D\hat{A}B=120^\circ$ و $C\hat{E}D=120^\circ$

۷. دو مثلث BPQ و DRS، و همچنین دو مثلث APS و RCQ به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند؛ زیرا:

$\hat{B}=\hat{D}$ و $BQ=DS$ و $PB=DR \Rightarrow \Delta BPQ \cong \Delta DSR$

$\hat{A}=\hat{C}$ و $AP=CR$ و $AS=CQ \Rightarrow \Delta APS \cong \Delta CRQ$

بنابراین: $PQ=SR$ و $PS=QR$ و در نتیجه، چهارضلعی PQRS متوازی‌الاضلاع است.

۸ . از Q به A وصل می‌کنیم . در مثلث AQB ، QM میانه‌ی وارد بر ضلع AB و در مثلث AQC ، QP میانه‌ی وارد بر ضلع AC است . از طرف دیگر ، می‌دانیم که هر میانه‌ی یک مثلث ، آن مثلث را به دو مثلث هم‌ارز تبدیل می‌کند . پس داریم :

$$S_{BQM}=S_{AQM} \quad (1)$$
$$S_{CQP}=S_{AQP} \quad (2)$$
$$(1)+(2) \Rightarrow S_{BQM}+S_{CQP}=S_{AQM}+S_{AQP}=S_{AMQP}$$

۹ . دو ضلع مستطیل را a و b و قطر آن را d و مساحتش را S می‌نامیم . داریم :

$$d=50,\ a=30,\ d=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow 50=\sqrt{30^2+b^2}$$
$$\Rightarrow b^2=2500-900=1600\Rightarrow b=40Cm$$
$$S=a\times b\Rightarrow S=30\times 40=1200Cm^2$$

۱۰ . می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مساوی $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ و ارتفاع این مثلث برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است . پس داریم :

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}\Rightarrow a^2=100\Rightarrow a=10Cm$$

اندازه‌ی ارتفاع $\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}Cm$

۱۱ . داریم :

$$2x-2=3\Rightarrow x=\frac{5}{2},\ \frac{5+y}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=1$$

حسابان

حل ۱ :

$$\begin{cases}8-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 8\Rightarrow -2\sqrt{2}\le x\le x2\sqrt{2}\\ 2-\sqrt{8-x^2}\ge 0\Rightarrow 4\ge 8-x^2\Rightarrow x^2\ge 4\Rightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x\le -2\end{cases}\end{cases}$$ یا

$$D_f=[-2\sqrt{2},-2]\cup[2,2\sqrt{2}]$$

حل ۲ :

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}\Rightarrow f(-x)=\frac{2^{-x}+2^x}{2^{-x}-2^x}=-\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-x^{-x}}=-f(x)$$

پس f تابعی فرد است .

$$g(x)=\left[\frac{4}{2+x}\right]+\left[\frac{4+(2-x)}{2-x}\right]=\left[\frac{4}{2+x}\right]\left[\frac{4}{2-x}+1\right]$$
$$g(x)=\left[\frac{4}{2+x}\right]+\left[\frac{4}{2-x}\right]+1$$
$$\Rightarrow g(-x)=\left[\frac{4}{2-x}\right]+\left[\frac{4}{2+x}\right]+1=g(x)$$

پس g تابعی زوج است .

حل ۳ :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{3x_1+\sqrt{3x_1-6}}=\sqrt{3x_2+\sqrt{3x_2-6}}$$
$$3x_1-6=a\Rightarrow 3x_1=a+6,3x_2-6=b\Rightarrow 3x_2=b+6$$
$$\Rightarrow\sqrt{a+6+\sqrt{a}}=\sqrt{b+6+\sqrt{b}}\Rightarrow a+6+\sqrt{a}=b+6+\sqrt{b}\Rightarrow$$
$$a-b+\sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})=0$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)}_{\text{مثبت}}=0\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Rightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow a=b\Rightarrow 3x_1-6=3x_2-6\Rightarrow 3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

حل ۴ :

$$y=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}\Rightarrow y+1=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1\Rightarrow$$
$$y+1=(\sqrt{x}+1)^3\Rightarrow\sqrt{x}+1=\sqrt[3]{y+1}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt[3]{y+1}-1$$
$$\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+1}-1)^2\Rightarrow y=(\sqrt[3]{x+1}-1)^2=f^{-1}(x)$$

حل ۵ : باید f(x) را بر x − ۲ تقسیم کرد و سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار داد :

$$x^3-2\sqrt{2}x^2-2x^2+4\sqrt{2}x+x-2 \;\Big|\; \frac{x-2}{x^2-2\sqrt{2}x+1}$$
$$0$$

$$\text{خارج قسمت}=x^2-2\sqrt{2}x+1=0\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\Rightarrow$$
$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}}{1}=\sqrt{2}\pm 1$$

حل ۶ :

$$2\cos 3a.\sin a=\sin(3a+a)-\sin(3a-a)=\sin 4a-\sin 2a$$
$$=2\sin 2a\cos 2a-\sin 2a$$
$$=\sin 2a(2\cos 2a-1)\Rightarrow$$
$$\frac{2\cos 3a.\sin a}{\sin 2a}-2\cos 2a=\frac{\sin 2a(2\cos 2a-1)}{\sin 2a}-2\cos 2a$$
$$\sin 2a\ne 0\Rightarrow 2\cos 2a-1-2\cos 2a=-1$$

حل ۷ : با فرض $x=\frac{\pi}{9}$ خواهیم داشت :

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=A$$

دو طرف را در 2sinx ضرب می‌کنیم :

$$2\cos x\sin x+\underbrace{2\cos 3x\sin x}+\underbrace{2\cos 5x\sin x}$$
$$+\underbrace{2\cos 7x\sin x}=2A\sin x$$

$$\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+2\sin 6x-\sin 4x+$$
$$2\sin 8x-\sin 6x=2A\sin x$$
$$\sin 8x=2A\sin x\Rightarrow A=\frac{\sin 8x}{2\sin x},\ x=\frac{\pi}{9}$$
$$A=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{9})}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{2}$$

حل ۸:

$$|f(x)-3| < \frac{1}{50} \Rightarrow |2x+1-3| < \frac{1}{50} \Rightarrow |2(x-1)| < \frac{1}{50} \Rightarrow$$

$$|x-1| < \frac{1}{100},\ x \to 1^+ \Rightarrow |x-1| = x-1 > 0$$

$$|x-1| < \frac{1}{100} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{100} \Rightarrow 1 < x < \frac{101}{100}$$

حل ۹:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+6x^2} - x) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+6x^2} - x) \times$$

$$\times \frac{\sqrt[3]{(x^3+6x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+6x^2} + x^2}{\sqrt[3]{(x^3+6x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+6x^2} + x^2} \sim$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+6x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^6} + x\sqrt[3]{x^3} + x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{x^2+x^2+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{3x^2} = 2$$

حل ۱۰:

$$bx^2 - 14x + c = 0 \quad x' = 1,\ x'' = \frac{5}{2}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 + \frac{5}{2} = \frac{14}{b} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{14}{b} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow 1 \times \frac{5}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow \boxed{c = 10}$$

$x \to \pm\infty \Rightarrow$ مجانب افقی

حد $f(x) = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{2}}$

حل ۱۱:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & -2 < x < 2 \\ x - 1 & x \geq 2 \\ -x + 1 & x \leq -2 \end{cases}$$

برای این که این تابع در IR پیوسته باشد، باید در ۲ و ۲ـ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 1$$

$$\Rightarrow 4a + 2b = 0$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) \Rightarrow 4a - 2b + 1 = 3$$

$$\Rightarrow 4a - 2b = 2$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow 8a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}\ 1 + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

حل ۱۲:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{b\sin 4x}{\sqrt{2\sin^2 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{b\sin 4x}{\sqrt{8x^2}}$$ حدّ چپ

$$= \frac{b(4x)}{-2\sqrt{2}x} = -\frac{2b}{\sqrt{2}}$$

$f(0) = \lfloor 0 - \sqrt{3} \rfloor = -2$ مقدار تابع

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a\lfloor 0^+ - 1 \rfloor = -a$ حدّ راست

$$-a = -2 \Rightarrow \boxed{a = 2},\ \frac{-2b}{\sqrt{2}} = -2 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{2}}$$

جبر و احتمال

حل ۱:

$$n = 1:\ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \leq 3 - \frac{1}{1} \Rightarrow 1 + 1 \leq 2 (1 + 1 = 2)$$

$$n = k:\ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \leq 3 - \frac{1}{k}$$ (فرض استقرا)

$$n = k+1:\ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{k+1}$$ (حکم استقرا)

طرفین فرض را با $\frac{1}{(k+1)!}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)!}$$ (فرض جدید)

از مقایسه‌ی فرض جدید و حکم نتیجه می‌شود که کافی است، نابرابری زیر اثبات شود:

$$3 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{k+1}$$

این نابرابری به روش برگشتی ثابت می‌شود:

$$-\frac{1}{k+1} \geq -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)!} \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{(k+1)!} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)!} \Rightarrow (k+1)! \geq k(k+1) \Rightarrow k! \geq k \Rightarrow$$

$$(k-1)! \geq 1$$

نابرابری نهایی همواره صحیح است. اکنون استدلال تکمیلی بیان می‌شود:

$$(k-1)! \geq 1 \Rightarrow k! \geq k \Rightarrow (k+1)! \geq k(k+1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow -\frac{1}{k+1} \geq -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)!} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)!} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \leq 3 - \frac{1}{k+1}$$

حل ۲:

$$n = 1 \Rightarrow 4 \mid 5^2 + 5 - 2 \Rightarrow 4 \mid 28$$

$$n = k \Rightarrow 4 \mid 5^{k+1} + 5^k - 2 \Rightarrow 5^{k+1} + 5^k - 2 = 4r$$ (فرض استقرا)

$$n = k+1 \Rightarrow 4 \mid 5^{k+2} + 5^{k+1} - 2 \Rightarrow 5^{k+2} + 5^{k+1} - 2 = 4r'$$ (حکم استقرا)

طرفین فرض را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$5(5^{k+1} + 5^k - 2) = 20r \Rightarrow 5^{k+2} + 5^{k+1} - 10 = 20r \Rightarrow$$

$$5^{k+2} + 5^{k+1} - 2 = 20r + 8 = 4(\underbrace{5r+2}_{r'}) = 4r'$$

حل ۳:

$$a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$$

$$4k(k+1) + 1$$

چون یکی از دو عدد صحیح و متوالی k و k + ۱ زوج هستند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها حتماً عددی زوج است؛ یعنی $k(k+1) = 2m$. درنتیجه داریم:

$$a^2 = 4(2m) + 1 = 8m + 1$$

حل ۴:

فرض کنیم n مضرب ۷ نباشد، بنابراین: $n = 7k + r$ و ۶ و ... و ۲ و $r = 1$. و از آن‌جا داریم:

$$n^2 = (7k + r)^2 = 49k^2 + 14kr + r^2 = 7(\underbrace{7k^2 + 2kr}_{m}) + r^2 = 7m + r^2$$

یعنی به ازای هیچ یک از مقادیر r، r^2 مضرب ۷ نیست. بنابراین n^2 هم مضرب ۷ نیست و این با فرض مسأله تناقض دارد.

حال فرض می‌کنیم، $\sqrt{7}$ عددی گویا چون $\frac{m}{n}$ باشد و کسر $\frac{m}{n}$ را آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به کسری تحویل‌ناپذیر تبدیل شود، یعنی m و n نسبت به هم اول شوند:

$\sqrt{7} = \frac{m}{n}$ و m و $n \in Z$ و $n \neq 0$ و $(m,n) = 1$

$$\Rightarrow 7 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 7n^2$$

یعنی m^2 مضرب ۷ است و از آن‌جا طبق نتیجه‌ی قبل، m نیز مضرب ۷ است؛ یعنی $m = 7k$. درنتیجه:

$$m^2 = (7k)^2 = 7n^2 \Rightarrow 7k^2 = n^2$$

بنابراین n^2 مضرب ۷ و از آن‌جا n نیز مضرب ۷ است: $n = 7k'$. درنتیجه، m و n هر دو مضرب ۷ هستند و نسبت به یکدیگر اول نیستند که این با فرض اول بودن m و n نسبت به هم تناقض دارد.

حل ۵:

$$a, b > 0: \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b \Rightarrow$$

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b),$$

$$a + b > 0 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

نتیجه‌ی آخر به روشنی درست است. برگشت‌پذیری مرحله‌ها به صورت زیر است:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b) \Rightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

حل ۶: باقی‌مانده‌های تقسیم بر ۶، شش نوعند: ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ یعنی شش لانه داریم و می‌خواهیم هر لانه شامل حداقل ۴ عضو باشد. پس حداقل ۱۹ = ۱ + ۳ × ۶ عدد باید انتخاب کنیم.

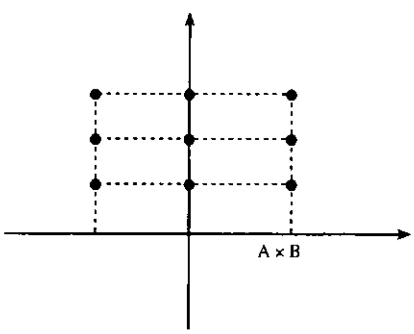
حل ۷:

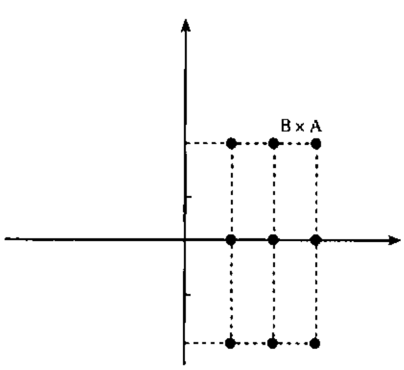
الف) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap B') \cap (C \cap D') =$
$(A \cap C) \cap (B' \cap D') = (A \cap C) \cap (B \cup D)' =$
$(A \cap C) - (B \cup D)$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ و $C \subseteq D \Rightarrow C \cup D = D \Rightarrow$
$(A \cup B) \cup (C \cup D) = B \cup D \Rightarrow (A \cup C) \cup (B \cup D) = B \cup D) \Rightarrow$
$(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

حل ۸:

الف) $x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0,\ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$
$x = 0$ یا $\pm 2 \Rightarrow A = \{0, 2, -2\}$
$x^2 < 4x \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow x(x - 4) < 0 \Rightarrow 0 < x < 4,$
$x \in Z \Rightarrow x = 1$ یا ۲ یا $3 \Rightarrow B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$
$A \times B = \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,1),(2,2),(2,3),(-2,1),(-2,2),(-2,3)\}$
$B \times A = \{(1,0),(2,0),(3,0),(1,2),(2,2),(3,2),(1,-2),(2,-2),(3,-2)\}$





ب)

$A^2 = \{(0,0),(0,2),(0,-2),(2,0),(2,2),(2,-2),(-2,0),(-2,2),(-2,-2)\}$
$A^2 - A \times B = \{(0,0),(0,-2),(2,0),(2,-2),(-2,0),(-2,-2)\}$

پس $A^2 - A \times B$، ۶ عضو و درنتیجه $64 = 2^6$ زیرمجموعه دارد.

ج)

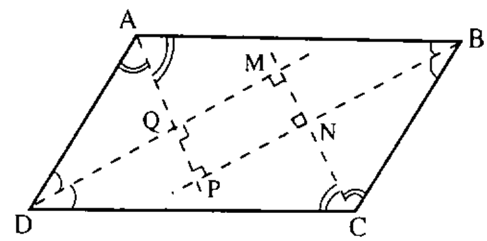
$A^2 - B \times A = \{(0,0),(0,2),(0,-2),(-2,0),(-2,2),(-2,-2)\}$
$\Rightarrow (A^2 - A \times B) \cap (A^2 - B \times A)$
$= \{(0,0),(0,-2),(-2,0),(-2,-2)\}$

هندسه ۲

۱. می‌دانیم که نیمسازهای هر دو زاویه‌ی مجاور از یک متوازی‌الاضلاع، بر هم عمودند؛ بنابراین:

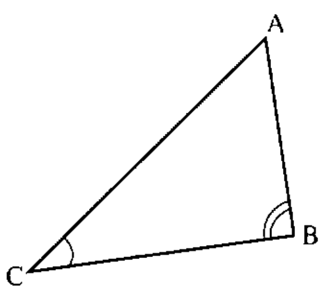
$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = ۹۰^\circ$

و در نتیجه، چهارضلعی MNPQ مستطیل است.



۲. الف) قضیه: اگر در مثلثی دو زاویه مساوی نباشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.

برای مثال، در مثلث ABC اگر $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\overline{AC} > \overline{AB}$ است.



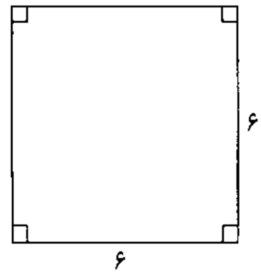
عکس قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع مساوی نباشند، آن‌گاه زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر. یعنی در مثلث ABC، اگر $\overline{AC} > \overline{AB}$ باشد، آن‌گاه $\hat{B} > \hat{C}$ است.

می‌دانیم که این قضیه و عکس آن هر دو درست هستند، پس می‌توان گفت: شرط لازم و کافی برای آن‌که یک زاویه از مثلثی بزرگ‌تر از یک زاویه‌ی دیگر از آن مثلث باشد؛ آن است که ضلع روبه‌رو به این زاویه، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی دیگر باشد. یعنی در مثلث ABC داریم:

$\hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow AC > AB$

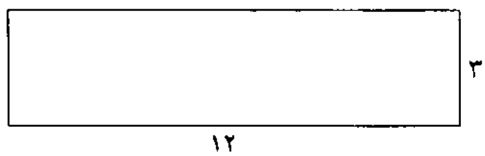
ب) قضیه: اگر دو شکل هم‌نهشت باشند، آن‌گاه مساحت‌های آن‌ها با هم برابر است.

عکس این قضیه درست نیست، زیرا دو شکل که مساحت‌های برابر دارند، همواره هم‌نهشت نیستند. برای مثال، مستطیل ABCD و مربع MNPQ مساحت‌های برابر دارند، زیرا:



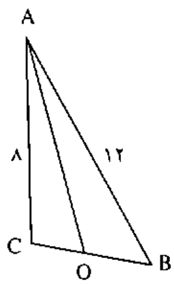
$S = ۶^۲ = ۳۶$ مربع

$S = ۳ \times ۱۲ = ۳۶$ مستطیل



اما این دو شکل هم‌نهشت نیستند.

فرض می‌کنیم AB=۱۲، BC=۵ و AC=۸ باشد. کوچک‌ترین زاویه، زاویه‌ای است که روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است. پس در این شکل، زاویه‌ی A کوچک‌ترین زاویه است. بنابراین نیمساز AD را رسم می‌کنیم.



داریم:

$$DB = \frac{BC \times AB}{AB + AC} = \frac{a.c}{b+c} = \frac{۵ \times ۱۲}{۱۲ + ۸} = ۳$$

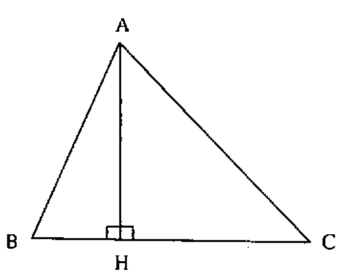
$$DC = \frac{BC \times AC}{AB + AC} = \frac{a.b}{b+c} = \frac{۵ \times ۸}{۱۲ + ۸} = ۲$$

۴. بنا بر ویژگی نیمساز داریم:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۲x+۴}{۱۵} = \frac{۳x+۱۰}{۲۵} \Rightarrow \frac{۲x+۴}{۳} = \frac{۳x+۱۰}{۵}$$

$$۱۰x + ۲۰ = ۹x + ۳۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

۵. مثلث ABC و ارتفاع AH از این مثلث را در نظر می‌گیریم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH داریم:



$$\begin{cases} AH < AB & (۱) \\ AH < AC & (۲) \end{cases}$$

از جمع کردن این دو نامساوی خواهیم داشت:

$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۲AH < AB + AC \Rightarrow AH < \frac{AB + AC}{۲}$$

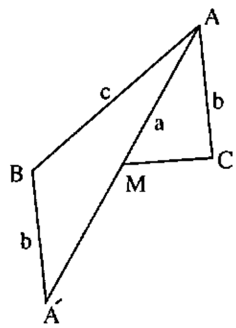
۶. در مثلث ABC داریم:

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

پس اگر AB=۱۷ ، BC=x−۱ و AC=۱۳ باشد، داریم:

$$|۱۷-۱۳| < x-۱ < ۱۷+۱۳ \Rightarrow ۴ < x-۱ < ۳۰$$
$$\Rightarrow ۵ < x < ۳۱$$

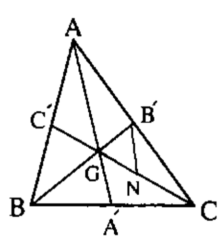
با توجه به این که باید $۰ < x-۱$ یا $x > ۱$ باشد، پس حدود به دست‌آمده برای X قابل قبول است.



۷. الف) فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. میانه‌ی AM از این مثلث را رسم می‌کنیم و آن را از طرف M به اندازه‌ی خودش تا نقطه‌ی A′ امتداد می‌دهیم و از A′ به B (یا C) وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABA′C متوازی‌الاضلاع است، پس: BA′=AC=b است. از طرف دیگر، AB=C و $AA'=۲AM=۲m_a$ است، بنابراین مثلث ABA′ به دلیل معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش قابل رسم است. برای رسم مثلث خواسته شده به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مثلث ABA′ را با ضلع‌های AB=C ، BA′=b و $AA'=۲m_a$ رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی B به نقطه‌ی M وسط ضلع AA′ وصل می‌کنیم و پاره‌خط BM را به اندازه‌ی خود امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی C به دست آید. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

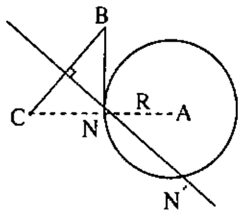
به شرط قابل رسم بودن مثلث ABA′، مسأله جواب دارد.



ب) فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC، جواب مسأله باشد. میانه‌های AA′، BB′ و CC′ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این میانه‌ها در نقطه‌ی G مرکز ثقل مثلث، هم‌رأسند.

از نقطه‌ی N وسط پاره‌خط GC، به نقطه‌ی B′ وسط ضلع AC وصل می‌کنیم. در مثلث AGC، پاره‌خط NB′ وسط‌های دو ضلع AC و GC را به هم وصل کرده است؛ پس موازی و مساوی نصف GA است. یعنی: $NB' = \frac{GA}{۲} = \frac{\frac{۲}{۳}m_a}{۲} = \frac{۱}{۳}m_a$. از طرف دیگر، $GN = \frac{۱}{۳}CC' = \frac{۱}{۳}m_c$ و $GB' = \frac{۱}{۳}BB' = \frac{۲}{۳}m_b$ است، بنابراین سه ضلع مثلث GB′N معلوم است. این مثلث به دلیل معلوم بودن اندازه‌ی سه ضلعش قابل رسم است. برای حل مسأله، نخست مثلث GNB′ را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن، نقطه‌های A، B و C، رأس‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم و این مثلث را رسم می‌کنیم. برای مثال، اگر GB′ را به اندازه‌ی دو برابر خود از طرف G امتداد دهیم، رأس B به دست می‌آید و...

۸. مکان هندسی نقطه‌هایی از یک صفحه که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره‌خط BC است، پس عمود منصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم.



از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه‌هایی از این صفحه که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی R قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم و آن را دایره‌ی C می‌نامیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد خط Δ و دایره‌ی C جواب مسأله‌اند. به تعداد نقطه‌های برخورد این دو، مسأله دارای جواب است.

۹. در مثلث قائم‌الزاویه OMT($\hat{T}=۹۰°$)، TH ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

$$OT^۲ = OH.OM \Rightarrow ۱۰^۲ = OH \times ۲ \Rightarrow OH = ۴$$
$$TH^۲ = OH \times HM \;,\; HM = OM - OH = ۲۵ - ۴ = ۲۱$$
$$\Rightarrow TH^۲ = ۴ \times ۲۱ = ۸۴ \Rightarrow TH = \sqrt{۸۴} = ۲\sqrt{۲۱}$$

از طرف دیگر داریم:

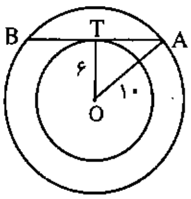
$$MT = \sqrt{OM^۲ - OT^۲} = \sqrt{۲۵^۲ - ۱۰^۲} = \sqrt{۵۲۵} = ۵\sqrt{۲۱}$$

۱۰. می‌دانیم، مماس‌هایی که از یک نقطه بر یک دایره رسم می‌شوند، با هم مساوی‌اند. بنابراین داریم:

$$AM = AQ = ۲x+۱ \;,\; BN = BM = ۱۰ \;,\; CP = CN = ۴x+۱,$$
$$DQ = DP = ۱۰$$

محیط چند ضلعی $= AB+BC+CD+DA = ۲(AB+CD)$

$$\Rightarrow ۱۰۴ = ۲[(۲x+۱+۱۰)+(۴x+۱+۱۰)]$$
$$\Rightarrow ۱۰۴ = ۱۲x+۴۴ \Rightarrow ۱۲x = ۶۰ \Rightarrow x = ۵$$



۱۱. وتر AB از دایره‌ی بزرگ‌تر را که در نقطه‌ی T بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، در نظر می‌گیریم. از O مرکز مشترک دو دایره به A و T وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOT داریم:

$$AT = ۶ \;,\; AO = ۱۰ \;,\; O\hat{T}A = ۹۰° \Rightarrow AT = \sqrt{OA^۲ - OT^۲}$$
$$\Rightarrow AT = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸ \Rightarrow AB = ۲AT = ۱۶$$

بدیهی است که نقطه‌ی T وسط وتر AB است.

۱۲. الف) $x = ۵۰° \;,\; y = ۴۰° \;,\; z = ۱۴۰°$

ب) $z = ۱۱۵° \;,\; x = \frac{۱۱۵°}{۲} = ۵۷°,۳۰'$ و

$$y = ۳۶۰° - (۱۱۵° + ۱۲۰°) = ۱۲۵°$$

۱۳. در هر چهار ضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{A} + ۹۵° = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{A} = ۸۵°$$
$$\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{B} + ۶۵° = ۱۸۰° \Rightarrow B = ۱۱۵°$$

این نکته را یادآور می‌شویم که الفاظ «الگوریسم» و «الگوریتم» (که با کلمه‌ی لگاریتم فرق دارد) که در زبان‌های اروپایی تا سده‌ی هجدهم میلادی نام معمولی حساب با ارقام هندی بود و هنوز هم به معنی «روش ویژه‌ی محاسبه در نوع خاصی از مسائل ریاضی» به کار می‌رود، به این مناسبت است که ترجمه‌ی لاتینی کتاب حساب خوارزمی عنوان Liber algorismi (کتاب خوارزمی) داشت و لفظ «الگوریسم» که از تحریف نام الخوارزمی پدید آمد بعدها نزد اروپاییان برای فنّ حساب عملی با ارقام هندی مصطلح شد و این اصطلاح در مقابل اصطلاح «اریثمتیک» (arithmetic) که به معنی علم نظری اعداد (ارثماطیقی) بود به کار می‌رفت. همچنین لفظ «جبر» در زبان‌های اروپایی (algèbre-algebra و غیره) بدون تردید مشتق از عنوان کتاب الجبر و المقابله خوارزمی است، اگرچه بعضی آن را مشتق از لفظ آسوری gabrû دانسته‌اند.

آثار ریاضی خوارزمی

ابن ندیم در الفهرست نام چهار کتاب از تألیفات خوارزمی را ذکر کرده که عبارتند از: کتاب زیج در دو نسخه (اول و دوم) و کتاب الرخامه و کتاب العمل بالاسطرلاب و کتاب عمل الاسطرلاب و کتاب التاریخ و از سایر تألیفات وی که موجود است نامی نبرده است.

***

برای مزید فایده متذکر می‌شویم که سارتن در کتاب مدخل تاریخ علم خود فهرست اسامی تقریباً بیست و سه کتاب یا مقاله را که درباره‌ی آثار مختلف خوارزمی تا سال ۱۹۲۷ میلادی (سال تألیف جلد اول کتاب مدخل) به چاپ رسیده بوده آورده و این فهرست را به شش بخش تقسیم کرده است: بررسی‌های عمومی، متون ریاضی، نقد علمی آثار ریاضی، متون نجومی و مثلثاتی، نقد علمی آثار نجومی و مثلثاتی، جغرافیا.

***

اکنون می‌پردازیم به ذکر اسامی آثار ریاضی موجود خوارزمی

۱. مختصر من حساب الجبر و المقابله

این قدیمی‌ترین کتاب ریاضی است که از دوره‌ی اسلامی به دست ما رسیده است. فردریک رُزِن در سال ۱۸۳۱م این کتاب را از روی متن عربی نسخه‌ی خطی آن که در کتابخانه‌ی آکسفورد موجود است به انگلیسی ترجمه کرد و با متن عربی آن به چاپ رسانید. این ترجمه دارای اشتباهاتی است که قسمتی از آن‌ها بعداً توسط محققان تصحیح شده است.

یک نسخه‌ی خطی دیگر از کتاب جبر و مقابله خوارزمی در قاهره موجود است و در شماره‌ی ماه نوامبر ۱۹۵۶م مجله‌ی معهد المخروطات العربیه بالقاهره معرفی شده است.

متن عربی جبر و مقابله‌ی خوارزمی بار دیگر در سال ۱۹۳۹م توسط علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد در مصر چاپ شد. این چاپ دارای مقدمه‌ای درباره‌ی زندگینامه‌ی خوارزمی است و در تهیه‌ی یادداشت‌های ذیل صفحات آن از کتاب رزن استفاده شده است.

۲. کتاب الجمع و التفریق

این نخستین کتابی است که در دوره‌ی اسلامی درباره‌ی حساب با ارقام هندی نوشته شده و در بسط و رواج فن حساب هندی، چه در کشورهای اسلامی و چه بعداً در کشورهای اروپایی، تأثیر فوق‌العاده داشته است و مسلمین و اروپاییان نخستین بار توسط این کتاب با حساب هندی آشنا شدند.

قفطی در تاریخ الحکماء نوشته است: «و دیگر از علوم ایشان (=هندیان) که به ما رسیده، کتابی است در علم حساب عدد ایشان. ابوجعفر محمدبن موسی الخوارزمی آن را شرح و بسط داده است.

متن عربی کتاب الجمع و التفریق خوارزمی از بین رفته است ولی یک نسخه‌ی خطی از ترجمه‌ی لاتینی آن در کتابخانه‌ی کمبریج موجود است. روسکا ثابت کرده است که این ترجمه‌ی لاتینی ترجمه‌ی همان کتاب الجمع و التفریق است که احیاناً باید به عنوان عربی آن به حساب الهندی را افزود.

۳. زیج

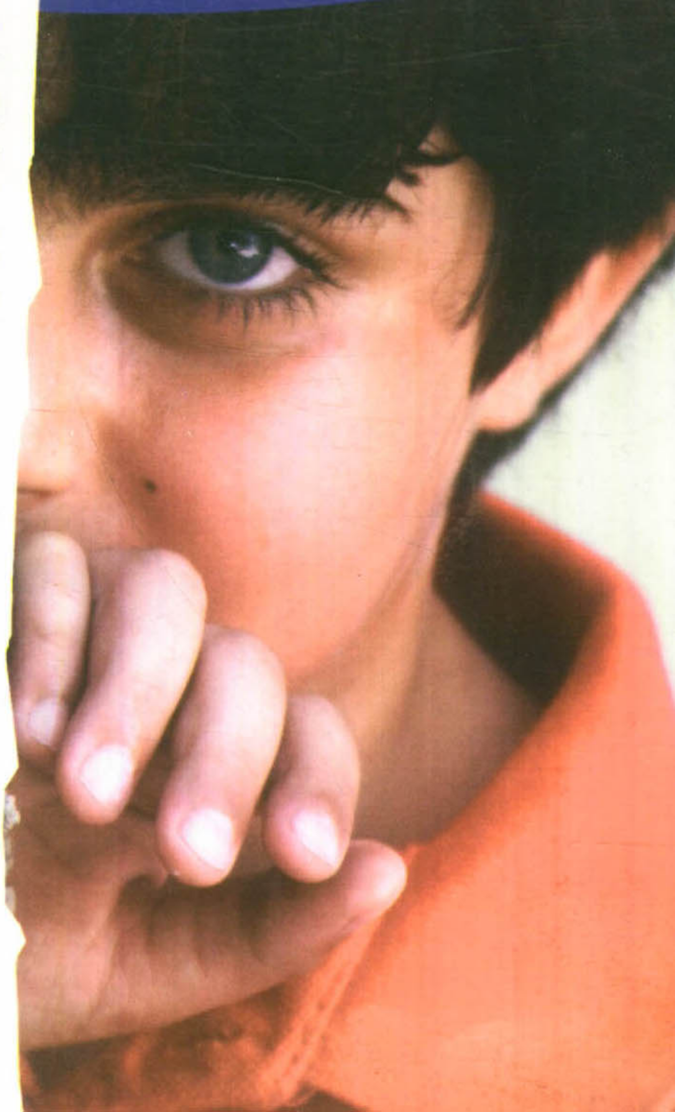
چنان که پیش از این گفته شد ابن ندیم در الفهرست دو زیج به نام خوارزمی ثبت کرده و نوشته است که او دارای دو کتاب زیج است و یادآور شده که این زیج‌ها به «زیج سند هند» معروف هستند.

قفطی در تاریخ الحکماء در ضمن ترجمه‌ی احوال و آثار ابراهیم فزاری از قول ابن الادمی نوشته است که در سال ۱۵۶ هـ.ق مردی از اهل هند به خدمت منصور عباسی پیوست و کتابی با وی بود و منصور فرمان داد که آن کتاب را به لغت عربی نقل نمایند و محمدبن ابراهیم فزاری متولی این خدمت شد و کتابی از آن تألیف نمود که منجمان آن را سند هند کبیر می‌نامند و اهل آن زمان به آن عمل می‌نمودند. و افزوده است: «تا زمان مأمون رسید. پس ابوجعفر محمدبن موسی الخوارزمی آن را اختصاری نمود و زیج خود را که در بلاد اسلام مشهور است، از آن بساخت. و در آن زیج اعتماد کرد بر اوساط سند هند و در آن موافقت نمود، لیکن در تعادیل و در میل مخالفت کرد، بلکه در تعادیل، موافقت منجمین فرس و در میل موافقت بطلمیوس اختیار نمود و چندین ابواب نیکو متضمن تقریب و نزدیک شدن حساب به تحقیق اختراع نمود... بالجمله اهل آن زمان از منجمین که معتقد طریقه‌ی سند هند بودند زیج مذکور را پسندیده داشتند و در آفاق مشهور گردانیدند.»

ابوریحان بیرونی به زیج خوارزمی توجه داشته و از آن در تألیفات خود نام برده و علاوه بر این کتابی درباره‌ی علل زیج خوارزمی نوشته بوده است. نیز بیرونی در فصل دوازدهم از رساله‌ی استخراج الاوتار از کتابی یاد می‌کند که ابوالعباس فرغانی در تعلیل و تصحیح زیج خوارزمی نوشته بوده است.

منبع ....

برگرفته از کتاب زندگی نامه ریاضی دانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی



رشد برهان

مجله ریاضی

۴۹

www.roshdmag.org

آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۳

❖ بهار ۱۳۸۵ ـ بها: ۲۵۰۰ ریال

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی



ویژه‌ی این شماره:
مسائل نمونه‌ی کتاب درسی
با حل تشریحی

- یادهای آموزشی
- حل معادله‌های کلاسیک مثلثاتی
- مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا
- معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی
- با راهیان المپیادهای ریاضی
- منطق ریاضی

ریاضیدان و منجم ایرانی

اقلیدسی
ابوالحسن احمد بن ابراهیم اقلیدسی

اقلیدسی یکی از ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی تقریباً ناشناخته است. در هیچ یک از منابع مهم عربی و فارسی که درباره‌ی زندگینامه‌ی دانشمندان دوره‌ی اسلامی می‌شناسیم ترجمه‌ی احوال او نیامده است. اما تنها می‌دانیم که وی در حدود نیمه‌ی اول سده‌ی چهارم می‌زیسته و در سال ۳۴۱ هـ ق در دمشق کتاب حساب مهمی به زبان عربی تالیف کرده است. چون در قدیم عنوان «اقلیدسی» به کسانی داده می‌شده که کتاب اصول اقلیدس را برای فروش رونویس می‌کرده‌اند شاید ابوالحسن اقلیدسی زندگی خود را از این راه می‌گذارنده است. از محتویات کتاب حسابش چنین برمی‌آید که به تدریس ریاضی نیز می‌پرداخته است.

آثار ریاضی موجود وی

۱- الکتاب الحجری فی الحساب

نسخه‌ی خطی این کتاب به قول سزگین درمانیسا موجود است و احمد آتش آن را در مجله‌ی معهدالمخطوطات العربیه معرفی کرده است.



۲- الفصول فی الحساب الهندی

نسخه‌ی خطی منحصر به فرد این کتاب در کتابخانه‌ی ینی جامعه استانبول موجود است و دارای ۲۳۰ برگ است.

این کتاب را نخستین بار دکتر احمد سلیم سعیدان استاد دانشگاه اردن هاشمی در سال ۱۹۶۶ م در مجله‌ی ایزیس معرفی کرد و سپس در سال ۱۹۷۳م متن عربی آن را به ضمیمه‌ی مقدمه و تعلیقات مفصل و بسیار مفید به چاپ رسانید.

موضوع فصل‌های کتاب حساب اقلیدسی

اقلیدسی در مقدمه‌ی کتاب الفصول فی الحساب الهندی اظهار می‌دارد که همه‌ی کتاب‌های مهمی را پیش از او و یا در زمان او راجع به حساب هندی تألیف شده خوانده است و با کسانی که در علم حساب زبردست بوده و شهرت داشته‌اند ملاقات کرده و از آنان کسب اطلاع نموده است. ادعا می‌کند که کتاب او از همه‌ی کتاب‌های دیگری که درباره‌ی حساب هندی تألیف شده جامع‌تر است.

کتاب حساب اقلیدسی دارای چهار فصل است و هر فصل آن به باب‌های متعدد تقسیم شده است.

فصل اول درباره‌ی ارقام هندی و عددنویسی در دستگاه اعشاری و اعمال اصلی حساب (جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد صحیح و کسری) و استخراج جذر است. اقلیدسی برای هر یک از این اعمال مثال‌های مختلف درباره‌ی عددهای صحیح و کسری چه در دستگاه اعشاری و چه در دستگاه شصتگانی (ستّینی) آورده است.

در فصل دوم همان مطالب فصل اول در سطح بالاتری ذکر شده است. مؤلف در مقدمه‌ی کتاب می‌گوید که در فصل دوم روش‌هایی را که محاسبان زبردست در حساب هندی به کار برده‌اند گردآورده است. این فصل از جمله شامل همه‌ی روش‌های گوناگون عمل ضرب است که در کتاب‌های حسابی که بعد از اقلیدسی تألیف شده دیده می‌شود.

در فصل سوم بسیاری از مفاهیم و مراحل عملیات که در دو فصل اول آمده به صورت جواب به سؤالاتی که با چرا و چگونه شروع می‌شود مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است.

برای آنکه مطالب فصل چهارم را بهتر بتوانیم ارزیابی کنیم مقدمه‌ی کوتاهی لازم است:

مقصود از حساب هندی روش محاسبه با دستگاه شمار اعشاری است که در آن هر یک از ارقام که برای نوشتن عدد به کار می‌رود بر حسب جای خود دارای ارزش نسبی است. مثلا در عدد ۵۴ ارزش نسبی رقم ۴ (مرتبه‌ی یکان) ۴ واحد است اما ارزش نسبی رقم ۵ (مرتبه‌ی صدگان) ۵۰ واحد (پنج بار ده) است.

ادامه در صفحه‌ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

رشد برهان متوسطه ۴۹

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۳ ● بهار ۱۳۸۵ ● شمارگان: ۱۲۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه
❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ❖ سردبیر: حمیدرضا امیری ❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
❖ ویراستار ادبی: کبری محمودی ❖ اعضای هیات تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره:

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

- مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

یادداشت سردبیر

اگر بخواهید به کتابفروشی هایی که کتاب های کمک درسی و کمک‌آموزشی می‌فروشند بروید و برای درس یا درس های ریاضی خود کتاب تهیّه کنید، چه ملاک هایی برای انتخاب دارید؟ به نظر شما یک کتاب کمک درسیِ خوب چه ویژگی هایی باید داشته باشد؟ آیا اگر تمام مسائل کتاب درسی را حل کرده باشد، برای استفاده مناسب است؟ و اگر مطالب خارج از کتاب درسی را نیز شامل شود، آیا آن را باید نشانه ی قدرت و توان نویسنده دانست یا نشانه ی ضعف او؟

واقعیت این است که شما وقتی می توانید یک کتاب کمک درسی خوب انتخاب و از آن استفاده کنید که:

۱ـ شناخت و تسلط کافی روی مطالب، اهداف و روش ارائه ی مطالب داشته باشید.

۲ـ از یک نفر کارشناس که کتاب درسی شما را خوب بشناسد و با اهداف آموزشی آن (برنامه ی درسی کتاب مورد نظر) آشنا باشد، کمک بگیرید.

۳ـ یک مرکز معتبر که با همه ی موارد ذکر شده آشنایی دارد، اجازه ی نشر آن کتاب را صادر و یا آن را تأیید کرده باشد.

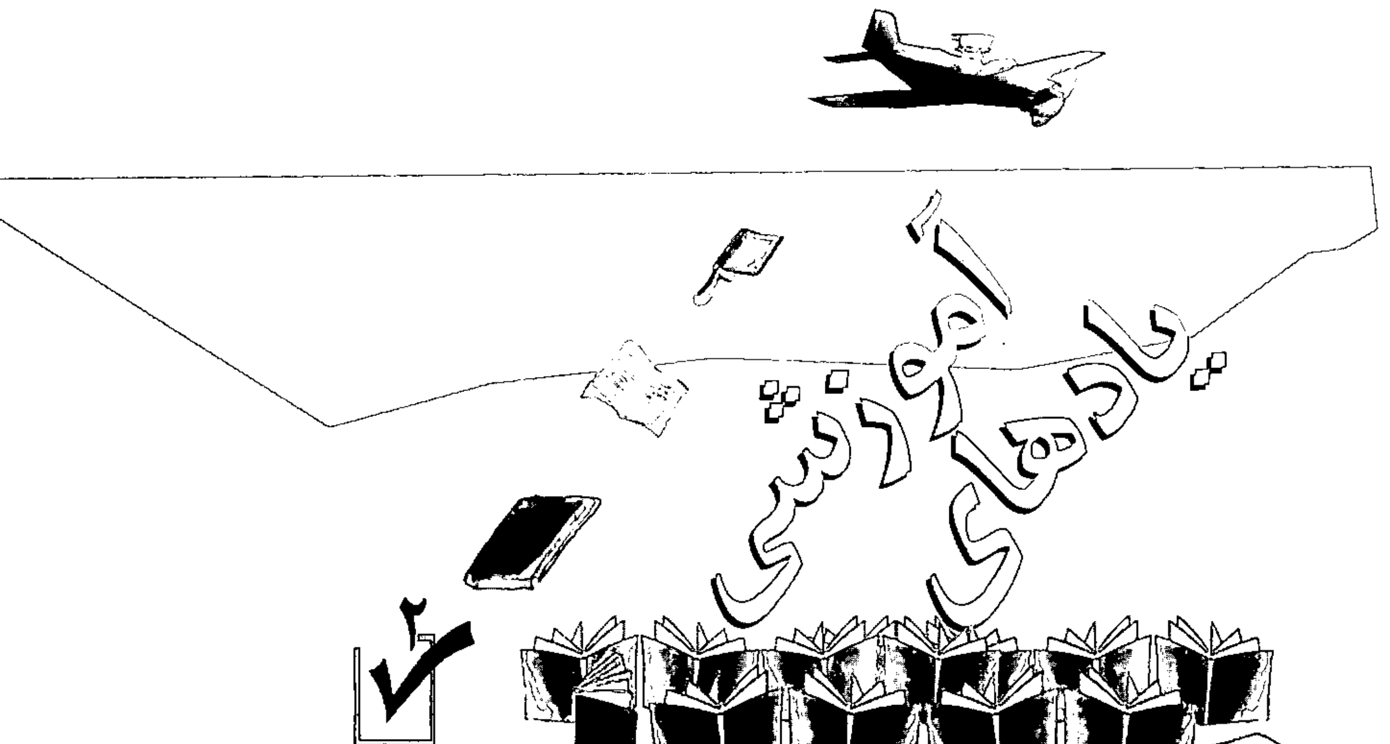
مورد (۱) عملاً برای شما آن هم در ابتدای سال تحصیلی امکان پذیر نیست؛ در مورد (۲) نیز شاید چنین کارشناسی در دسترس شما نباشد. پس فقط راه سوم باقی می ماند، راهی که تا ۱۵ سال پیش نیز به آن عمل می شد، ولی متأسفانه در حال حاضر و در حدود ۱۵ سال است که هیچ ارگانی از آموزش و پرورش مسؤولیت چنین امر مهم و سرنوشت سازی را به طور رسمی به عهده نگرفته است.

دانش‌آموز عزیز، خوب است بدانید که برای تألیف یک کتاب درسی، در مرحله ی اول جلسات بسیار زیادی در دفتر برنامه ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی برگزار می شود و نیروهایی متخصص (اعضای شورای برنامه ریزی) روی آن کار می کنند و رئوس مطالب، شامل فهرستِ مباحث، فصل ها و بخش های کتاب را تهیه کرده و در اختیار مؤلف یا مؤلفان قرار می‌دهند. آنگاه مؤلفان با صرف وقت و انرژی فراوان اقدام به تألیف می نمایند. تازه بعد از تألیف، کتاب باید مرحله یا مراحل ویراستاری علمی و ادبی را بگذراند تا برای چاپ آماده شود. طی مراحل چاپ نیز مشکلات خاص خود را دارد که بماند!

در کتاب های درسی تمرین ها به گونه ای هدفمند و در جهت اهدافِ آموزشی آن کتاب تدوین شده است، لذا دبیران محترم شما نیز با همین تمرین ها، که شما حل می کنید، پی به میزان آموزش خود می برند. شما نیز از همین طریق میزان درک و یادگیری خود را درخواهید یافت. متأسفانه بسیاری از کتاب های کمک درسی موجود حل کاملِ این مسائل و تمرین ها را یک جا در اختیار دانش‌آموزان گذاشته (تازه، درست یا غلط این حل ها جای بحث دارد) و همه ی زحمات، هزینه ها و انرژی ها را دفعتاً بر باد می دهند! یا مطالبی را به عنوان مطالب اضافی و خارج از کتاب درسی و به بهانه ی یک تست در کنکور، ارائه می کنند که هیچ ربطی به درس ندارد و گاهی حتی در خلافِ جهتِ اهداف آموزشی کتاب درسی است.

به هر صورت، دانش‌آموز عزیز، سعی کنید در انتخاب کتاب کمک درسی خوب حتماً از دبیران خودتان و افراد آگاه به مسائل آموزشی و برنامه ی درسی کتاب مورد نظر کمک گرفته و از ناشران معتبر و حتی‌الامکان وابسته به آموزش و پرورش کتاب های مورد نیاز خود را تهیه نمایید تا خدای ناکرده از چاهی به چاهی دیگر نیفتید! در این زمینه می توانید با ما نیز مشورت کنید.





یادهای آموزشی ۲

● پرویز شهریاری

آلبرت اینشتین (۱۹۵۵ـ ۱۸۷۹)، فیزیکدان مشهور آلمانی و برنده‌ی جایزه‌ی نوبل در فیزیک سال ۱۹۲۱، به همراه همکار خود اینفلد، عضو فرهنگستان علوم لهستان (از سال ۱۹۵۲)، کتابی دارد به نام «سرگذشت پیشرفت فیزیک»، که در آن می‌نویسد: «خوانندگان داستان‌های پلیسی خوب می‌دانند که اگر نشانه‌ی نادرست و ساختگی، جای نشانه‌ی حقیقی را بگیرد، پی بردن به رازها، تا چه اندازه عقب می‌افتد. . . نتیجه‌گیری‌های الهامی که نتیجه‌ای بدون واسطه از مشاهده‌اند، همیشه با حقیقت سازگار نیستند؛ زیرا برخی وقت‌ها، برگه‌های دروغین و گمراه‌کننده‌ای را می‌سازند. . . در بهترین داستان‌ها نیز ممکن است، آشکارترین نشانه سبب پیدایش گمراه‌ترین احتمال شود. هنگام جست‌وجو برای درک قانون‌های طبیعت (و جامعه)، تغییرهایی که از روشن‌ترین حدس‌های الهامی نتیجه می‌شوند، اغلب نادرست‌ترین آن‌ها هستند.

بازار کتاب خراب است و حتی می‌توان گفت بسیار خراب است. شمارگان کتاب تا ۵۰۰ و هزار نسخه پائین آمده است و همین شمارگان اندک هم، در قفسه‌های کتابخانه‌ها خاک می‌خورد.

می‌گویند مردم از کتاب خیری ندیده‌اند و به همین مناسبت، از آن فاصله گرفته‌اند. می‌گویند تنها کتاب‌های نفیس و پر نقش و نگار خریدار اندکی دارند، آن هم برای زینت دادن کتابخانه‌های شخصی نوکیسه‌هایی که ادای «اشراف» را درمی‌آورند و کتاب‌های پرقیمت را در قفسه‌های ساخت ایتالیای سالن پذیرایی خود جا می‌دهند؛ بی‌آن‌که آن‌ها را یک‌بار هم ورق‌زده باشند. و این، رسم تازه‌ای نیست. از زمانی که به یاد دارم، کتابخانه‌های شخصی و قفسه‌های سالن‌های پذیرایی خانه‌های اشرافی، وسیله‌ای برای خودنمایی و فضل‌فروشی بوده است.

بی‌تردید در سرگذشت‌ها خوانده‌اید که سرمایه‌داران و اشراف انگلیسی و فرانسوی سده‌ی نوزدهم (و شاید بازمانده‌های سنتی آن‌ها تا به امروز) به کتاب مانند «اشیای عتیقه» می‌نگریستند و به آنان، نه برای نوشته‌هایش، بلکه برای اعتباری که به صاحبش می‌بخشد و در ضمن وسیله‌ای برای اندوختن سرمایه می‌شود، علاقه داشتند...

سال‌ها پیش به سراغ زنده‌یاد احمدی در «کتاب فروشی اندیشه» رفته بودم. او از قاضی‌های شریف و درستکار بود و دوران بازنشستگی خود را به عنوان فروشنده‌ی کتاب می‌گذراند... همیشه می‌توانست شنونده را با یادهای تلخ و شیرین جالبی که از دادگستری داشت، مجذوب خود کند و باشرح گرفتاری‌های کسانی که ناخواسته به دام پرونده‌های «قانونی» افتاده بودند، در واقع گوشه‌ای از تاریخ مردم این سرزمین را باز گوید ...

اتومبیلی بانشانه‌ی «بنز» جلوی کتاب‌فروشی ترمز کرد. راننده پیاده شد، در عقب اتومبیل را باز کرد و مردی چهار شانه و بلند قامت، با سبیلی سپید و سیاه و کم‌پشت، ولی آویزان، با لباسی نیمه رسمی از آن پیاده شد.

عصای پاریسی در دست و «شاپوی» قهوه‌ای با لبه‌ای نه چندان بلند و اندکی به بالا برگشته بر سر داشت... با چهره‌ای اخم‌آلود (و شاید هم همراه با تفکر) وارد مغازه شد و بدون مقدمه گفت: «آقا من دو متر و نیم کتاب ۴۰ سانتی می‌خواهم، با جلد طلاکوب و کاغذ

اعلا.»

کارتی جلو زنده‌یاد احمدی گذاشت و همان‌طور که به آرامی برمی‌گشت تا بیرون برود، گفت: «قیمت کتاب‌ها را تلفنی به من اطلاع دهید. راننده‌ی من چک آن را برای شما می‌آورد و کتاب‌ها را تحویل می‌گیرد...»

من شگفت‌زده به این گفت‌وگوی غیرعادی گوش می‌دادم. زنده‌یاد احمدی که متوجه حیرت من شده بود، توضیح داد: «این آقا از کارچاق‌کن‌های بزرگ است... در واقع، کارش کلاه‌برداری یا به زبان ساده‌تر دزدی است. خانه‌ی تازه‌ای ساخته و بخشی از سالن پذیرایی را با قفسه‌هایی برای نمایش وسیله‌های قیمتی و عتیقه پر کرده است. دو سه طبقه را هم برای پر کردن کتاب در نظر گرفته است. این طبقه‌ها ارتفاعی به اندازه‌ی چهل سانتی‌متر و



روی هم، طولی به اندازه‌ی دو مترونیم دارد...»

ـ خب، شما...

ـ من به انبار می‌روم و کتاب‌های خوش چاپ و خوش جلد را جدا می‌کنم و در جعبه‌ای جا می‌دهم تا راننده‌ی او آن‌ها را ببرد.

ـ چه کتاب‌هایی؟

ـ مهم نیست که کتاب مربوط به ریاضیات باشد یا فال‌بینی و کف‌بینی. تنها باید زیبا باشند و تا آن‌جا که ممکن است، همراه با عکس‌های رنگی. این آقا دکور می‌خواهد نه کتاب...

و هنوز این نمایش ادامه دارد، بازیگران عوض می‌شوند، ولی نمایش تغییر نمی‌کند.

با وجود این، مطلب به این سادگی نیست. خودنمایی آدم‌های پولدار، چه نوکیسه باشند و چه کهنه‌کیسه، همیشه بوده است وکسی آن‌ها را کتابخوان به شمار نیاورده است.

چه کسانی کتاب می‌خوانند؟ اگر از کتاب‌های درسی و کمک درسی و به ویژه کتاب‌های تستی که نیاز عبور از هفت خان «کنکور» را برآورده می‌کنند بگذریم، کتاب را باید نزد علاقه‌مند به آن پیدا کرد و این کسی است که صاحب فرهنگ است یا می‌خواهد با فرهنگ شود. چنین کسی زندگی را دوست دارد و در آرزوی اعتلای فرهنگ وتمدن سرزمین خود (و تنها سرزمین خود) می‌سوزد، غم ناراستی‌ها و زشتی‌های جهان امروز قلب او را می‌فشارد و... چنین انسانی، نه سرمایه‌ای دارد و نه می‌تواند راهی «میان‌بر» برای سرمایه‌اندوزی پیدا کند.

به‌ویژه در شرایط اقتصادی امروز ایران، کارمندان دولت، افسران و کارمندان سازمان‌های نظامی و انتظامی، معلمان و استادان دانشگاه و کارمندان علمی، پژوهشگران و مهندسان، دانش‌آموزان و دانشجویان و ... یعنی همه‌ی کسانی که به ناچار با درآمد ثابت و ناچیز خود زندگی می‌کنند، کتاب به نوعی کالای لوکس درجه‌ی دوم برای آن‌ها تبدیل شده است. خانواده ناچار است در آغاز به ضروری‌ترین هزینه‌هایی بپردازد که برای زنده ماندن لازم هستند و سپس، اگر چیزی باقی ماند (که به‌ندرت پیش می‌آید)، صرف پیشرفت دانش و فرهنگ اعضای خود کند.

اگر بخواهیم مسأله‌ی مربوط به عدم تعادل درآمد و هزینه‌ی خانواده‌های با فرهنگ و کتابخوان را بررسی کنیم، به نتیجه‌ای اندوه‌بار می‌رسیم که ریشه‌ی بیش‌تر درماندگی‌های اجتماعی ماست؛ ولی جای آن در این‌جا نیست و به نیروی تحلیل جامعه‌شناسان و اقتصاددانان نیاز دارد.

توسعه‌ی اقتصادی و پیشرفت اجتماعی، بدون گسترش فرهنگ ممکن نیست و به همین مناسبت در کشورهای توسعه یافته با شیوه‌های متفاوت به آن یاری می‌رسانند. سرزمین ما، نه تنها از نظر مواد اولیه و گوناگون آب و هوا، پرنعمت و کم‌نظیر است، که از نظر استعداد و تلاش مردم هم، برای توسعه‌ی تند اقتصادی، آمادگی کامل دارد. ولی باید از راهی رفت که این نعمت‌ها و این استعدادها ضایع نشوند و در مسیر درستی قرار گیرند. و این، بدون گسترش سریع فرهنگ و کتابخوانی ممکن نیست.

یکی از شرایط گسترش فرهنگ، وجود کتاب و نشریه و در کنار آن کتابخانه‌های عمومی است که دولت باید نقش شایسته‌ای در این زمینه به عهده بگیرد. دولت باید همراه با توسعه‌ی کتابخانه‌های عمومی و کتابخانه‌های مدرسه‌ها و دانشگاه‌ها، راهی جدی و عاجل برای



کمک به ناشران آزاد پیداکند و باحمایت از آن‌ها، سقوط فرهنگ را مانع شود. هنوز کتاب‌های چاپ شده در پیچ و خم‌های کارهای اداری گاه خیلی طولانی معطل می‌شوند. گرچه این مانع‌ها به خودی خود بسیار ترمزکننده‌اند و گاه به عاملی «ضد فرهنگی» تبدیل می‌شود، ولی تنها از میان برداشتن آن‌ها هم، دشواری را حل نمی‌کند. بدون هیچ اغراقی باید گفت که ناشران آزاد، اگر از استثناها بگذریم، با گذشت‌ترین صاحبان حرفه‌ها هستند، زیرا در شرایطی که با اندک «هوشیاری» می‌توان سرمایه و توان خود را در راه‌هایی به کار انداخت که سودهایی کلان و خرد صددرصد داشته باشد، مسیری را ادامه می‌دهند که یا ضرر دارند یا سوی بسیار اندک.

ناشران آزاد، مردمانی عاشقند؛ عاشق مردم و فرهنگ و دانش سرزمین خود. در راه توسعه‌ی اقتصادی، بدون یاری این دوستداران دانش و فرهنگ، در شرایط اجتماعی امروز، نمی‌توان موفق شد. باید راه و روش جدی برای یاری به آن‌ها و در نتیجه، یاری به خانواده‌های کتابخوان پیدا کرد. هر پولی در این راه هزینه شود، سرانجام چند ده برابر خود را به جامعه باز می‌گرداند. همیشه باید به یاد داشته باشیم، بدون کتاب و نشریه و کتابخوان، هیچ انتظاری در جهت توسعه‌ی فرهنگی و در نتیجه، توسعه‌ی اقتصادی نمی‌توان داشت.

در ابتدای مقاله، جمله‌ای به نقل از اینشتین و اینفلد آوردیم که به زبان ساده می‌گفت: «باید از نشانه‌ی نادرست و ساختگی به جای نشانه‌ی حقیقی پرهیز کرد تا آدمی را گمراه نکند». آنچه تا این جا آمد نادرست نبود، ولی نشانه‌هایی فرعی بود برای این که به نشانه‌ی درست و واقعی برسیم. باید درباره‌ی کتاب و کتابخوان، دست روی مسأله‌ی اساسی یعنی «کنکور» بگذاریم که سال‌هاست به ویران کردن دانش کشور ما مشغول است. اگر راهی عاجل برای آن پیدا نکنیم، به کتاب و کتابخوان هم نمی‌توانیم هیچ امیدی داشته باشیم.

ذات و اهمیت کنکور چنان است که حتی در بهترین شکل خود، نمی‌تواند بهترین‌ها را انتخاب کند. انسان موجودی پیچیده است و تجربه نشان داده است که نتیجه‌ی آزمایش نمی‌تواند استعدادها و توانایی‌ها را طبقه‌بندی کند؛ به ویژه «آزمایش تستی» به هیچ وجه قدرت منعکس کردن عمق سواد و درک دانش‌آموزان را ندارد. کم‌ترین عارضه‌ی جسمی یا روانی در روزها و ساعت‌های نزدیک به «مسابقه» می‌تواند، همه‌ی امیدها را بر باد دهد و سرنوشت‌ها را دگرگون کند.

دانش‌آموز علاقه‌مند از همان سال‌هایی که گام به دبیرستان و حتی دوره‌ی راهنمایی تحصیلی می‌گذارد، نگران عبور از «خوان کنکور» است و در سال‌هایی که باید بیش‌ترین کتاب را بخواند، به تست زدن مشغول می‌شود. خانواده‌ی او هم، به هر دری می‌زند که بتواند فرزندش را برای ورود به دانشگاه آماده کند. هنوز بازار کار و فعالیت اجتماعی چنان نیست که بتواند جوان دیپلمه را به راه دیگری، جز ادامه‌ی تحصیل، تشویق کند و جوان دبیرستانی احساس می‌کند، اگر از تحصیل باز بماند، قافیه را می‌بازد، در صحنه‌ی زندگی از قافله عقب می‌ماند و درهای پیشرفت به روی او بسته می‌شوند. از این هم می‌گذریم که به فرض قبولی در یک رشته‌ی دانشگاهی، تنها سرگردانی او چند سال عقب‌تر می‌رود.

این وضع در کار معلم و دانش‌آموز در کلاس درس اثری عمیق، و به اعتقاد من، اثری مخرب گذاشته است. همین که دبیری، به ویژه در سال‌های آخر دبیرستان، بخواهد مطلبی را بشکافد و عمیق‌تر درباره‌ی آن صحبت کند، یا اگر معلمی بخواهد، برای نمونه، در درس ریاضیات به مفهوم‌ها و ریشه‌های اصلی بپردازد، دانش‌آموزان را با تاریخ و یا کاربردِ ریاضیات یا ماهیت انسانی و قانونمند ریاضیات آشنا کند، تشویش و نگرانی سراپای دانش‌آموزان را فرا می‌گیرد که: «این‌ها چه کمکی به موقعیت من در کنکور می‌کنند؟»

دانش‌آموز در بازار کتاب در جست‌وجوی کتاب یا نشریه‌ی علمی نیست، «تست» می‌خواهد و «راهنمای کنکور». در کلاس هم از دبیر خود توقع «پلی‌کپی» و «تست» دارد، چرا که می‌خواهد راهی برای شکستن سد کنکور پیدا کند. ماهیت درس‌ها و درک عمیق آن‌ها ربطی به او ندارد.

... و همین نیاز مبرم دانش‌آموز است که «کلاس‌های کنکور و تقویتی» را رونق داده است، بازاری گرم برای «درس خصوصی» و «معلم خصوصی» پیدا شده است و حتی این‌جا و آن‌جا «دفتر»هایی باز شده‌اند که در برابر «حق‌الزحمه»، قبولی او را تضمین می‌کنند... و همه‌ی این‌ها، نه فراگیری عمیق ریاضیات، بلکه شیوه‌ی تست زدن را به دانش‌آموز می‌آموزند.

مدرسه‌ها، از گونه‌های متفاوتی وجود دارند که تنها دانش‌آموزانی را می‌پذیرند که معدل نمره‌های آن‌ها بالای ۱۹ باشد و در جریان سال‌های تحصیلی، آن‌ها را با «پلی‌کپی» و «تست» بمباران می‌کنند تا درصد قبولی شاگردان خود را در کنکور بالا ببرد و راهی برای تبلیغ و جلب دیگران و تأمین «سرمایه‌ی» آینده‌ی خود باز کنند.

این وضع می‌تواند تمام آینده‌ی دانش کشور ما را دچار تزلزل کند و به خطر بیندازد. از این راه، نه دانشمند بلکه جوانانی با روح مضطرب و جانی آشفته خواهیم داشت که تنها یاد گرفته‌اند، چگونه از رشته‌های در هم‌بافی که با کارتونک‌های تستی به هم بافته شده‌اند، خود را نجات دهند.

برای حل این مسأله باید، چاره‌ای اندیشید؛ مسأله‌ای خطرناک و در عین حال بغرنج و درهم تنیده. نباید دست روی دست گذاشت، چرا که به سرنوشت دانش کشور ما، پژوهشگران، و همه‌ی برنامه‌های زیربنایی سرزمین مربوط می‌شود...



اشاره:

در قسمت اول معادله‌ی درجه دوم، پس از بررسی حالت‌های ناقص معادله و اثبات فرمول‌های حل معادله، چند نکته‌ی مفید با ذکر مثال‌های متنوع مطرح شدند. اینک قسمت دوم معادله درجه‌ی دوم ارائه می‌شود.

۲

پرویز قندهاری

تجزیه و تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c

فرض می‌کنیم $f(x)=ax^2+bx+c$، ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ را صفرهای $f(x)$ می‌نامیم. همچنین، Δ یا مبیّن معادله‌ی درجه دوم را Δ یا مبیّن $f(x)$ می‌نامیم.

حالت اول: اگر Δ مثبت باشد، آن‌گاه معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز x' و x'' دارد (فرض می‌کنیم: $x'<x''$). می‌نویسیم:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$f(x)=a\left[x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}\right]$$

داشتیم: $x'+x''=-\frac{b}{a}$ و $x'.x''=\frac{c}{a}$. پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=a\left[x^2-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

یا

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

این عمل را «تجزیه به حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول» گوییم.

مثال: حدود m را چنان بیابید که سه‌جمله‌ای $mx^2-2(m-3)x+(m+2)$ را بتوان به صورت حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول نوشت.

حل: باید $\Delta=b^2-4ac>0$ یا $\Delta'=b'^2-ac>0$

$$\Delta'=b'^2-ac>0\Rightarrow\Delta'=(m-3)^2-m(m+2)^2>0$$

$$\Rightarrow m^2-6m+9-m^2-2m>0\Rightarrow-8m+9>0$$

$$\Rightarrow-8m>-9\Rightarrow m<\frac{9}{8}$$

حالت دوم: اگر (Δ) برابر صفر باشد، می‌دانیم در این صورت معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد: $x'=x''=-\frac{b}{2a}$

در حالت اول که Δ مثبت بود، داشتیم:

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

اکنون $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ پس:

$$f(x)=a(x-x')^2=a(x-x'')^2=a(x+\frac{b}{2a})^2$$

اگر $a>0$ آن‌گاه عبارت بالا را مربع کامل گویند.

مثال: به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $4x^2-2(m-4)x+(m-1)$ را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت.

حل: باید Δ یا Δ' را مساوی صفر قرار داد.

$$\Delta'=b'^2-ac=0\Rightarrow (m-4)^2-4(m-1)=0$$
$$\Rightarrow m^2-8m+16-4m+4=0\Rightarrow m^2-12m+20=0$$
$$m=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{1}=6\pm\sqrt{16}=6\pm 4$$
$$\Rightarrow m=10 \text{ یا } 2$$

حالت سوم: اگر $\Delta<0$، آن‌گاه معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ ریشه‌های حقیقی ندارد. در این صورت می‌نویسیم:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$
$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$
$$f(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$
$$f(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \quad ;(4ac-b^2>0)$$
$$f(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a})^2\right]$$

عبارت داخل کروشه را مجموع مربعات دو عبارت گویند.

مثال: حدود m را چنان بیابید که بتوان سه‌جمله‌ای $2\sqrt{2}x^2-4x+(m-2)$ را به صورت مجموع مربعات دو عبارت نوشت.

حل: باید Δ یا Δ' منفی باشد.

$$\Delta'=b'^2-ac<0\Rightarrow 4-2\sqrt{2}(m-2)<0$$
$$4-2\sqrt{2}m+4\sqrt{2}<0\Rightarrow 2\sqrt{2}m>4\sqrt{2}+4$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2}m>4(\sqrt{2}+1)\Rightarrow \sqrt{2}m>2(\sqrt{2}+1)$$
$$\Rightarrow m>\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}\Rightarrow m>\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow m>2+\sqrt{2}$$

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c

حالت اول: اگر $\Delta>0$، آن‌گاه:

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

فرض می‌کنیم: $x'<x''$

$$a(x-x')(x-x'')=0\Rightarrow (ax-ax')(x-x'')=0$$
$$\begin{cases}x_1=x'\\ x_2=x''\end{cases}$$

x	$-\infty$ تا x'	x' تا x''	x'' تا $+\infty$
$ax-ax'$	مخالف علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a
$x-x''$	−	−	+
f(x)	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

نتیجه: اگر در سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c، $\Delta>0$، آن‌گاه علامت آن بین دو ریشه‌ی مخالف علامت a و علامت آن در خارج دو ریشه موافق علامت a است.

تذکر: نامعادله‌ی درجه دوم در حالت کلی با تعیین علامت حل می‌شود.

مثال ۱. اگر $n\in N$، آن‌گاه نامعادله‌ی $2n^2-27n+25<0$ چند جواب دارد؟

حل:
$$f(n)=2n^2-27n+25=0$$
$$\Rightarrow n=\frac{27\pm\sqrt{27^2-200}}{4}=\frac{27\pm 23}{4}=1\ ,\ \frac{25}{2}$$

n	$-\infty$ تا ۱	۱ تا $\frac{25}{2}$	$\frac{25}{2}$ تا $+\infty$
f(n)	+	−	+

$$f(x)<0\Rightarrow 1<n<\frac{25}{2} \text{ و } n\in N\Rightarrow n=2,3,4,\dots 12$$

تعداد جواب‌ها $=(12-2)+1=11$

مثال ۲. نامعادله‌ی $\frac{۲x^۲+۷x+۵}{۴-x^۲}>۰$ را حل کنید.

حل: باید صورت و مخرج کسر را تعیین علامت کرد:

$$۲x^۲+۷x+۵=۰ \Rightarrow x=-۱\,,\,-\frac{۵}{۲}$$

$$۴-x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۲$$

x	$-\infty$ تا $-\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۵}{۲}$ تا -۲	-۲ تا -۱	-۱ تا ۲	۲ تا $+\infty$
$۲x^۲+۷x+۵$	+	−	−	+	+
$۴-x^۲$	−	−	+	+	−
P(x)	−	+	−	+	−

$-\frac{۵}{۲}<x<-۲$ $-۱<x<۲$

جواب این نامعادله $(-\frac{۵}{۲},-۲)\cup(-۱,۲)$ است. در ضمن، کسر P(x) به ازای ریشه‌های مخرج یعنی $x=۲$ و $x=-۲$ تعریف نشده است.

حالت دوم: اگر $\Delta=۰$، آن‌گاه: $f(x)=a(x-x')^۲$

عبارت $(x-x')^۲$، به ازای $x=x'$ صفر است و در بقیه‌ی موارد مثبت است. پس $a(x-x')^۲$ به ازای $x=x'$ صفر است و در بقیه موارد موافق علامت a است.

x	$-\infty$	$x'=x''$	$+\infty$
f(x)	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

برای مثال، اگر $f(x)=۲(x-۷)^۲$، آن‌گاه f(x) به ازای $x=۷$، صفر است و به ازای بقیه مقادیر حقیقی، f(x) مثبت است. همچنین، اگر $g(x)=-۴(x-۱)^۲$، آن‌گاه g(x) به ازای $x=۱$ صفر است و به ازای بقیه مقادیر حقیقی، g(x) منفی است.

حالت سوم: اگر $\Delta<۰$ آن‌گاه داریم:

$$f(x)=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^۲+(\frac{\sqrt{۴ac-b^۲}}{۲a})^۲\right]$$

عبارت داخل کروشه همواره مثبت است. پس علامت f(x) همواره موافق علامت a است.

تذکر مهم: سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^۲+bx+c$ وقتی همواره مثبت است که $\Delta<۰$ و $a>۰$. و این سه‌جمله‌ای وقتی همواره منفی است که $\Delta<۰$ و $a<۰$.

مثال۱. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $(m-۱)x^۲-۲mx+(m-۲)$ همواره منفی است؟

حل: باید Δ یا Δ' منفی و a هم منفی باشد.

$$\begin{cases}\Delta'=b'^۲-ac<۰\\ a<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^۲-(m-۱)(m-۲)<۰\\ m-۱<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m^۲-m^۲+۳m-۲<۰\\ m-۱<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳m-۲<۰\\ m-۱<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<\frac{۲}{۳}\\ m<۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}}m<\frac{۲}{۳}$$

مثال۲. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $(m+۲)x^۲-۲mx+(m+۴)$ همواره مثبت است؟

حل: باید Δ یا Δ' منفی و a مثبت باشد.

$$\begin{cases}\Delta'=b'^۲-ac<۰\\ a>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^۲-(m+۲)(m+۴)<۰\\ m+۲>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m^۲-m^۲-۶m-۸<۰\\ m+۲>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۶m-۸<۰\\ m+۲>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶m+۸>۰\\ m+۲>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m>-\frac{۴}{۳}\\ m>-۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}}m>-\frac{۴}{۳}$$

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$

حالت اول: اگر (Δ) مثبت باشد، در این صورت معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۱) حاصل‌ضرب دو ریشه $=x'.x''=\frac{c}{a}>۰\Rightarrow$

هر دو ریشه‌ی معادله هم‌علامت هستند.

۲) حاصل‌ضرب دو ریشه $=x'.x''=\frac{c}{a}<۰\Rightarrow$

دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند.

۳) حاصل ضرب دو ریشه $= x'.x'' = \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$
یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر $(-\frac{b}{a})$ است.

بنابراین داریم:

$$1)\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x' < x'' & \text{هر دو ریشه مثبت هستند.} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x' < x'' < 0 & \text{هر دو ریشه منفی هستند.} \end{cases}$$

$$2)\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x''| > |x'| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x'| > |x''| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x'' = -x' \end{cases}$$

$$3)\ \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow x' = 0 < x'' \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x' < 0 = x'' \end{cases}$$

حالت دوم: $\Delta' = 0$ یا Δ درنتیجه $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ که می‌گوییم، معادله‌ی دو ریشه‌ی حقیقی مساوی یا یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد. مقدار ریشه‌ی مضاعف برابر با $-\frac{b}{2a}$ است.

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow 0 < x' = x'' & \text{ریشه‌ی مضاعف مثبت است.} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow x' = x'' < 0 & \text{ریشه مضاعف منفی است.} \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x' = x'' = 0 & \text{ریشه مضاعف صفر است.} \end{cases}$$

مسأله‌ی ۱. حدود m را چنان بیابید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 - 2mx + (m-4) = 0$ مثبت باشند.

حل: براساس درس، برای این‌که هر دو ریشه‌ی این معادله مثبت باشند باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{a} > 0 \text{ و } \frac{c}{a} > 0 \text{ ، } \Delta' > 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = m^2 - 2(m-4) > 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 8 > 0$$

$\Delta' = m^2 - 2m + 1 + 7 = (m-1)^2 + 7 > 0$. همواره مثبت است Δ'

$$\frac{c}{a} = \frac{m-4}{2} > 0 \Rightarrow m - 4 > 0 \Rightarrow m > 4$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$\begin{cases} m > 4 \\ m > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} m > 4$$

مسأله‌ی ۲. حدود m را چنان بیابید که هر دو ریشه‌ی معادله‌ی $mx^2 - 2(m+1)x + (m-1) = 0$ منفی باشند.

حل: باید $\Delta' > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$

$$\Delta' = b'^2 - ac > 0 \Rightarrow (m+1)^2 - m(m-1) > 0 \Rightarrow$$

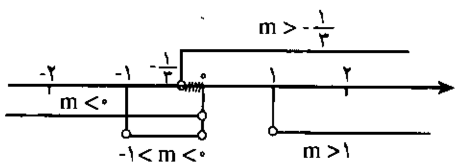
$$m^2 + 2m + 1 - m^2 + m > 0 \Rightarrow 3m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{3}$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 1$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m} < 0 \Rightarrow -1 < m < 0$$

$$\begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < 0 \text{ یا } m > 1 \\ -1 < m < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} -\frac{1}{3} < m < 0$$

در شکل زیر هم اشتراک جواب‌ها نشان داده شده است.



مسأله‌ی ۳. به ازای چه مقدارهای m، سه‌جمله‌ای $2x^2 - 2mx + (m+1)$ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عبارت نوشت.

حل: باید $\Delta' < 0$

$$\Delta' = b'^2 - ac < 0 \Rightarrow m^2 - 2(m+1) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 2 < 0$$

این نامعادله با تعیین علامت حل می‌شود:

$$m^2 - 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{1} = 1 \pm \sqrt{3}$$

چون a در معادله‌ی $m^2 - 2m - 2 = 0$ مثبت است، پس بین دو ریشه علامت منفی خواهد شد؛ یعنی:

$$1 - \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{3}$$

منطق ریاضی ۴

حمیدرضا امیری

اشاره. در شماره‌ی قبل با قوانین بین گزاره‌ها و ترکیب‌های فصلی، عطفی، شرطی و دوشرطی آشنا شدیم، و با طرح و حل چند هم‌ارزی، کاربرد آن‌ها را در اثبات هم‌ارزی‌ها مشاهده کردیم. در این مقاله پس از اثبات چند هم‌ارزی مهم، به معرفی گزاره‌نماها و گزاره‌های سوری خواهیم پرداخت.

قرارداد: در منطق ریاضی، گزاره‌ی شرطیِ همیشه درست را «استلزام منطقی» می‌نامند.

مثال ۱. ثابت کنید، گزاره‌ی شرطی $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ یک استلزام منطقی است.

حل:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv [(\sim p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv (q \wedge p) \Rightarrow q$$

$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge q) \vee q \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q) \equiv \sim p \vee T \equiv T$$

مثال ۲. ثابت کنید:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \equiv \sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

تمرین: ثابت کنید، ترکیب شرطی از چپ در تمام ترکیب‌ها توزیع‌پذیر است؛ یعنی:

I) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

II) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

III) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

IV) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

مثال ۳. ثابت کنید: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

حل:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv \sim (p \vee q) \vee r \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r$$

$$\equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

تمرین: ثابت کنید:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$$

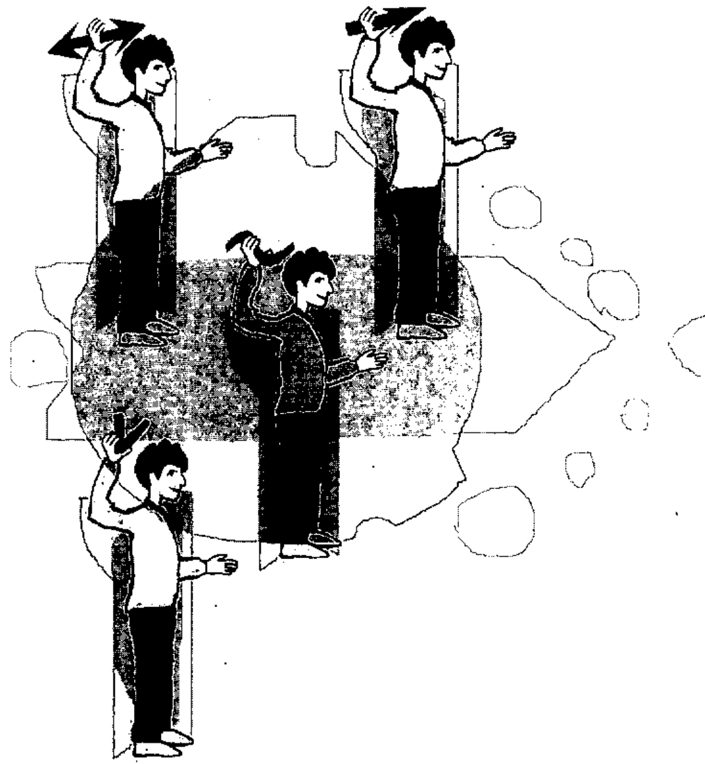
در این قسمت به تعریف گزاره‌نما و مطالب مربوط به دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب یک گزاره‌نما می‌پردازیم تا زمینه‌ای برای تعریف و معرفی سورها و گزاره‌های سوری فراهم شود.

تعریف گزاره‌نما: هر عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر باشد (به طوری که نتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم)، گزاره‌نما نامیده می‌شود. مثلاً: «x عددی زوج است»، یا: «y عددی اول و z عددی منفی است»، هرکدام یک گزاره‌نما هستند.

سؤال: آیا عبارت $x^2 - 4 = 0$ گزاره‌نماست؟

جواب: بله، این عبارت گزاره‌نما است، زیرا عبارتی است خبری و دارای متغیر، و نمی‌توان ارزش آن را تعیین کرد. مثلاً اگر به جای x عدد ۲ یا (۲-) قرار دهیم، تساوی برقرار و گزاره‌نما به گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود، ولی به ازای هر $x \neq \pm 2$ گزاره‌ای نادرست حاصل می‌شود.

تعریف دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما: مجموعه‌ی مقادیری که مُجازند به جای متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما قرار بگیرند و



گزاره‌نما را به گزاره (چه درست و چه نادرست) تبدیل کنند، دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما نامیده می‌شوند.

مجموعه‌ی جواب گزاره‌نما: زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر که گزاره‌نما را به گزاره‌ی **درست** تبدیل می‌کند، مجموعه‌ی جواب گزاره‌نما نامیده می‌شود.

مثال: دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب را برای گزاره‌نماهای زیر به دست آورید:

I) x عددی فرد است.

II) z عددی طبیعی بین ۴ و ۷ است.

III) y عددی صحیح بین ۲ و ۳ است.

IV) k عددی بین ۱ و ۲ است.

V) $x^2 - 1 = 0$

VI) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

حل:

I) چون صفت زوج و فرد فقط برای اعداد صحیح قابل تعریف است، پس (حق نداریم یا مجاز نیستیم، به جای x عدد $\sqrt{2}$ و یا $\frac{1}{2}$ قرار دهیم):

$\mathbb{Z}=$ دامنه‌ی متغیر و $2\mathbb{Z}+1=$ مجموعه جواب

II) وقتی به صراحت نوع متغیر بیان می‌شود، تعیین دامنه راحت است. در این قسمت چون قید شده، z عددی طبیعی است، پس:

$\mathbb{N}=$ دامنه‌ی متغیر و $\{5,6\}=$ مجموعه‌ی جواب

III) با توجه به توضیح قبل داریم:

$\mathbb{Z}=$ دامنه‌ی متغیر و $\varnothing=$ مجموعه‌ی جواب

IV) چون قیدی روی عدد k گذاشته نشده است، پس:

$\mathbb{R}=$ دامنه‌ی متغیر و $\{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2\} = (1,2) =$ مجموعه‌ی جواب

V) در عبارت $x^2 - 1 = 0$، به جای x هر عدد حقیقی را می‌توان قرار داد؛ پس:

$\mathbb{R}=$ دامنه‌ی متغیر و $\{1,-1\}=$ مجموعه‌ی جواب

IV) باید عبارت $x^2 - 3x + 2$ را تعیین علامت کرد، پس:

$\mathbb{R}=$ دامنه متغیر و $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)=$ مجموعه‌ی جواب

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$		$-$		$+$	

سورها

سورها نمادهایی هستند که برای بیان کمیت به کار می‌روند. اگر یک سور در ابتدای یک گزاره‌نما واقع شود، آن گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل می‌کند. به چنین گزاره‌ای «گزاره‌ی سوری» می‌گویند. سورها بر سه دسته‌اند:

سور عمومی: برای عمومیت و کلیت بخشیدن به کار

می‌رود. نماد آن به شکل $(\forall)$ است. گزاره‌ی سوری که با سور عمومی بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن با هم برابر باشند. این نماد را «به ازای هر»، «برای تمام مقادیر»، «همه‌ی» و «هر» می‌خوانیم.

سور وجودی: برای بیان وجود شیئی یا خاصیتی از این سور، از نماد $(\exists)$ استفاده می‌شود. گزاره‌ی سوری که با سور وجودی بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن تهی نباشد. این نماد را «وجود دارد»، «به ازای بعضی مقادیر» و «عضوی هست» می‌خوانیم.

سور صفر: برای بیان نبود شیئی یا خاصیتی از این سور، از نماد $(\nexists)$ استفاده می‌شود. گزاره‌ی سوری که با سور صفر بیان شود، زمانی دارای ارزش درست است که مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای آن تهی باشد. این نماد را «وجود ندارد»، «به ازای هیچ مقدار» و «عضوی نیست» می‌خوانیم.

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^۲ > ۰$

ب) $\forall x \in \mathbb{N}; x+۱ > ۱$

ج) $\exists x \in \mathbb{N}; x+۲ \leq ۳$

د) $\exists x \in \mathbb{R}; x^۲ \leq ۰$

هـ) $\nexists x \in \mathbb{R}; x+۱ < ۱$

و) $\nexists x \in Z; x^۲ - ۲ = ۰$

جواب:

الف) نادرست است، زیرا: $۰ \in \mathbb{R}$ و $۰ \ngtr ۰^۲$

ب) درست است، زیرا: $\mathbb{N}$ = دامنه و $\mathbb{N}$ = مجموعه‌ی جواب

ج) درست است، زیرا: $\varnothing \neq \{۱\}$ = مجموعه‌ی جواب

د) درست است، زیرا: $\varnothing \neq \{۰\}$ = مجموعه‌ی جواب

هـ) نادرست است، زیرا:

مجموعه‌ی جواب = $\{x \in \mathbb{R} | x < ۰\} \neq \varnothing$

و) درست است، زیرا: $\varnothing$ = مجموعه‌ی جواب

نقیض گزاره‌های سوری: گزاره‌های سوری $(\forall x, p(x))$ و $(\exists x, p(x))$ و $(\nexists x, p(x))$ را به ترتیب به صورت‌های (تمام xها خاصیت p دارند) و (xای است که خاصیت p دارد) و (وجود ندارد xای که خاصیت p داشته باشد) می‌خوانیم که برای نقیض کردن آن‌ها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) $\sim (\forall x; p(x)) \equiv (\exists x; \sim p(x))$

(xای هست که خاصیت p ندارد) ≡ (تمام xها خاصیت p دارند) ~

ب) $\sim (\exists x; p(x)) \equiv (\nexists x; p(x))$

(xای نیست که خاصیت p داشته باشد) ≡ (xای هست که خاصیت p دارد) ~

نکته: هر گزاره‌ی سوری عمومی را می‌توان با تغییراتی هم‌ارز با یک گزاره با سور صفر نوشت؛ به این صورت:

$(\forall x; p(x)) \equiv (\nexists x; \sim p(x))$

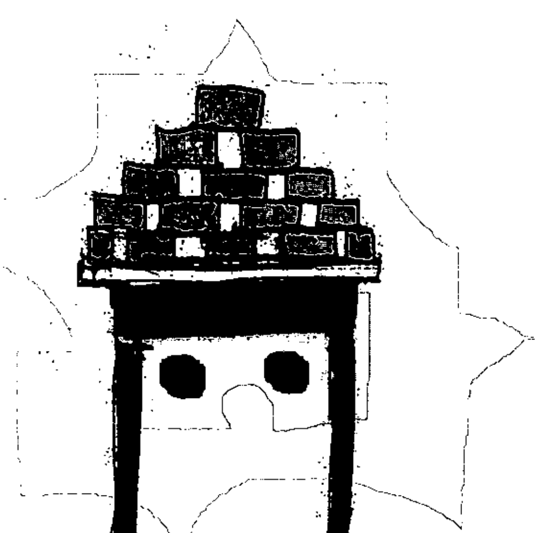
(xای نیست که خاصیت p نداشته باشد) ≡ (تمام xها خاصیت p دارند)

با توجه به نکته‌ی بالا و قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم که:

$$\sim (\exists x, p(x)) \equiv (\nexists x; p(x)) \equiv (\forall x; \sim p(x)) \Rightarrow$$
$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv (\forall x; \sim p(x))$$

ج) $\sim (\nexists x; p(x)) \equiv (\exists x; p(x))$

بنابراین، هرگاه بخواهیم برای نقیض کردن گزاره‌ی



سوری با سور عمومی از سور وجودی استفاده کنیم، یا برای نقیض کردن سور وجودی از سور عمومی استفاده کنیم، باید خاصیت بیان شده را نیز نقیض کنیم. ولی در تبدیل عمومی به صفر یا سور صفر به عمومی، با خاصیت بیان‌شده کاری نداریم.

نقیض گزاره‌های سوری با بیش از یک سور

الف) $\sim(\forall x \forall y; p(x,y)) \equiv (\exists x \exists y; \sim p(x,y))$

اثبات:

$$\sim[\forall x(\forall y; p(x,y))] \equiv \exists x \sim (\forall y; p(x,y)) \equiv (\exists x \exists y; \sim p(x,y))$$

ب) $\sim(\exists x \exists y; p(x,y)) \equiv (\forall x \forall y; \sim p(x,y))$

ج) $\sim(\forall x \exists y; p(x,y)) \equiv (\exists x \forall y; \sim p(x,y))$

د) $\sim(\exists x \forall y; p(x,y)) \equiv (\forall x \exists y; \sim p(x,y))$

مثال ۱. نقیض گزاره‌ی زیر کدام است؟

« $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ x > y \Rightarrow y < x \leq y+1$ »

۱) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x < y \Rightarrow y+1 < x \leq y$

۲) $\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R};\ (x > y) \vee x \leq y \vee x > y+1$

۳) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x > y+1$

۴) $\nexists x \in \mathbb{R};\ \exists y \in \mathbb{R},\ x > y \Rightarrow y < x \leq y+1$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین:

$$\sim[x > y \Rightarrow y < x \leq y+1] \equiv (x > y) \wedge [x \leq y \vee x > y+1]$$

$$\equiv \underbrace{[(x > y \wedge x \leq y)]}_{F} \vee [(x > y) \wedge x > y+1]$$

$$\equiv F \vee [x > y \wedge x > y+1] \equiv (x > y) \wedge (x > y+1) \equiv (x > y+1)$$

مثال ۲. نقیض گزاره‌ی زیر کدام است؟

« $\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R};\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ »

۱) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2$

۲) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ (x \neq y) \wedge (x^2 = y^2)$

۳) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R};\ (x = y) \wedge (x^2 \neq y^2)$

۴) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R};\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R},\ \nexists y \in \mathbb{R}; x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} \sim (\nexists y \in \mathbb{R},\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

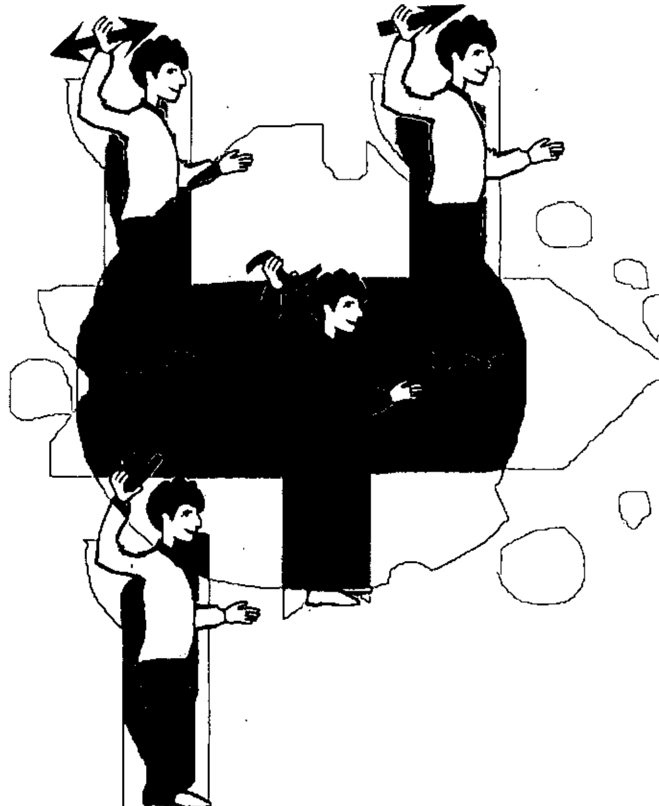
$$\equiv (\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$$

دیدیم که برای نقیض کردن، سور وجودی را به سور صفر، و سور صفر را به وجودی می‌توان تبدیل کرد و خاصیت تغییر نمی‌کند.

استنتاج

استنتاج به معنی نتیجه‌گیری است. در منطق، هرگاه از یک سلسله گزاره‌های درست که آن‌ها را مقدمات استنتاج می‌نامیم، بتوانیم گزاره‌ای درست که آن را نتیجه‌ی استنتاج می‌نامیم، نتیجه بگیریم، به کل چنین اعمالی یک دستگاه استنتاجیِ معتبر گفته می‌شود.

تذکر: زیر هم نوشتن چند گزاره به معنی ترکیبِ عطفی آن‌ها است و در این صورت، از به کار بردنِ نماد « $\wedge$ » خودداری می‌کنیم:



$$\begin{array}{l} p \\ q \\ r \\ . \\ . \\ \underline{s} \\ \therefore Q \end{array}$$

اگر با فرض درست بودن گزاره‌های p و q و r و... و s بتوانیم ثابت کنیم که گزاره‌ی Q نیز درست است، به چنین شکلی یک دستگاه استنتاجی معتبر یا اصطلاحاً یک استنتاج معتبر گفته می‌شود.

معرفی چند استنتاج معتبر و معروف (قوانین استنتاج)

قانون انتزاع: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون انتزاع معروف است.

(همواره از هر ترکیب شرطی و مقدم آن می‌توان تالی اش را نتیجه گرفت.)

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

قانون نقیض انتزاع

(همواره از هر ترکیب شرطی و نقیض تالی اش می‌توان نقیض مقدمش را نتیجه گرفت.)

$$\begin{array}{c} (p \Rightarrow q) \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array} \equiv \boxed{\begin{array}{c} (\sim q \Rightarrow \sim p) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

قانون رفع مؤلفه

$$\begin{array}{c} (p \Rightarrow q) \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array} \equiv \boxed{\begin{array}{c} (\sim p \vee q) \\ p \\ \therefore q \end{array}}$$

(از هر ترکیب فصلی و نقیض یکی از مؤلفه‌ها می‌توان مؤلفه‌ی دیگر را نتیجه گرفت.)

مثال:

$$\begin{array}{l} (p \vee r) \\ \underline{\sim p} \\ \therefore r \end{array}$$

قانون قیاس: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون قیاس معروف است.

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \\ (q \Rightarrow r) \\ \therefore (p \Rightarrow r) \end{array}}$$

قانون عطف مقدمات: هم‌ارزی زیر به قانون عطف مقدمات معروف است. از این قانون در اثبات هم‌ارزی و استنتاج‌ها استفاده می‌شود.

$$\boxed{p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r}$$

از طرفی: $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (q \wedge p) \Rightarrow r \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

بنابراین: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

مثال ۱: به جای علامت ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا استنتاج زیر معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} (p \wedge \sim r) \Rightarrow q \\ \underline{\quad \sim r} \\ \therefore \ ? \end{array}$$

۱) p ۲) $(r \vee p)$

۳) $(\sim p \vee q)$ ۴) $(q \Rightarrow r)$

جواب: گزینه‌ی (۳) صحیح است، زیرا:

$$\begin{array}{c} (p \wedge \sim r) \Rightarrow q \equiv \sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \\ \underline{\sim r} \\ \therefore \quad (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \end{array}$$

قانون انتزاع

مثال ۲: گزاره‌ی $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت همیشه نادرست است؟

۱) p و q درست، r نادرست ۲) p و q نادرست، r درست

۳) p درست، q و r نادرست ۴) p نادرست، q و r درست

جواب: گزینه‌ی (۱) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم که $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ بنابراین برای

نادرست بودن ارزش گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow r$ باید مقدم درست و تالی نادرست باشد؛ پس باید p و q هر دو درست باشند و r نادرست باشد.

مثال ۳: گزاره‌ی $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $(p \vee q) \wedge r$ ۲) $(p \vee q) \vee r$

۳) $(p \vee \sim q) \vee r$ ۴) $(p \wedge q) \wedge r$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow r$$
$$\equiv \sim(\sim p \wedge \sim q) \vee r \equiv (p \vee q) \vee r$$

قانون ادخال فاصل: استنتاج زیر همواره معتبر، و به قانون ادخال فاصل معروف است.

$$\boxed{\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}}$$

(از هر گزاره‌ی درست می‌توان ترکیب فصلی آن گزاره با هر گزاره‌ی دلخواه دیگر را نتیجه گرفت.)

مثال ۴: به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا بحث معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} q \Rightarrow \sim r \\ r \\ \hline \therefore\ ? \end{array}$$

۱) $q \Rightarrow p$ ۲) $\sim r \Rightarrow \sim q$

۳) $\sim s \Rightarrow \sim q$ ۴) هر سه گزینه‌ی قبل

جواب: گزینه‌ی (۴) صحیح است، زیرا طبق قانون نقیض انتزاع:

$$\begin{array}{l} q \Rightarrow \sim r \\ r \\ \hline \therefore\ \sim q \end{array}$$ طبق قانون نقیض انتزاع

از طرفی

$$\begin{array}{c} \sim q \\ \hline \therefore \sim q \vee r \equiv \sim r \Rightarrow \sim q \end{array}$$ و $$\begin{array}{c} \sim q \\ \hline \therefore \sim q \vee p \equiv q \Rightarrow p \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sim q \\ \hline \therefore \sim q \vee s \equiv \sim s \Rightarrow \sim q \end{array}$$



قانون حذف عاطف: استنتاج زیر همواره معتبر و به قانون حذف عاطف معروف است.

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array} \text{ یا } \begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

(از هر ترکیب عطفی می‌توان هریک از مؤلفه‌هایش را نتیجه گرفت.)

مثال ۵: به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا استنتاج معتبر باشد؟

$$\begin{array}{l} (p \wedge \sim q) \Rightarrow r \\ (p \wedge \sim r) \\ \hline \therefore\ ? \end{array}$$

۱) $\sim p$

۲) q

۳) $\sim q$

۴) r

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است، زیرا:

۱) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

۲) $(p \wedge \sim r)$

۳) $p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ از ۱ و عطف مقدمات

۴) p از ۲ و حذف عاطف

۵) $(\sim q \Rightarrow r)$ از ۳ و ۴ و انتزاع

۶) $\sim r$ از ۲ و حذف عاطف

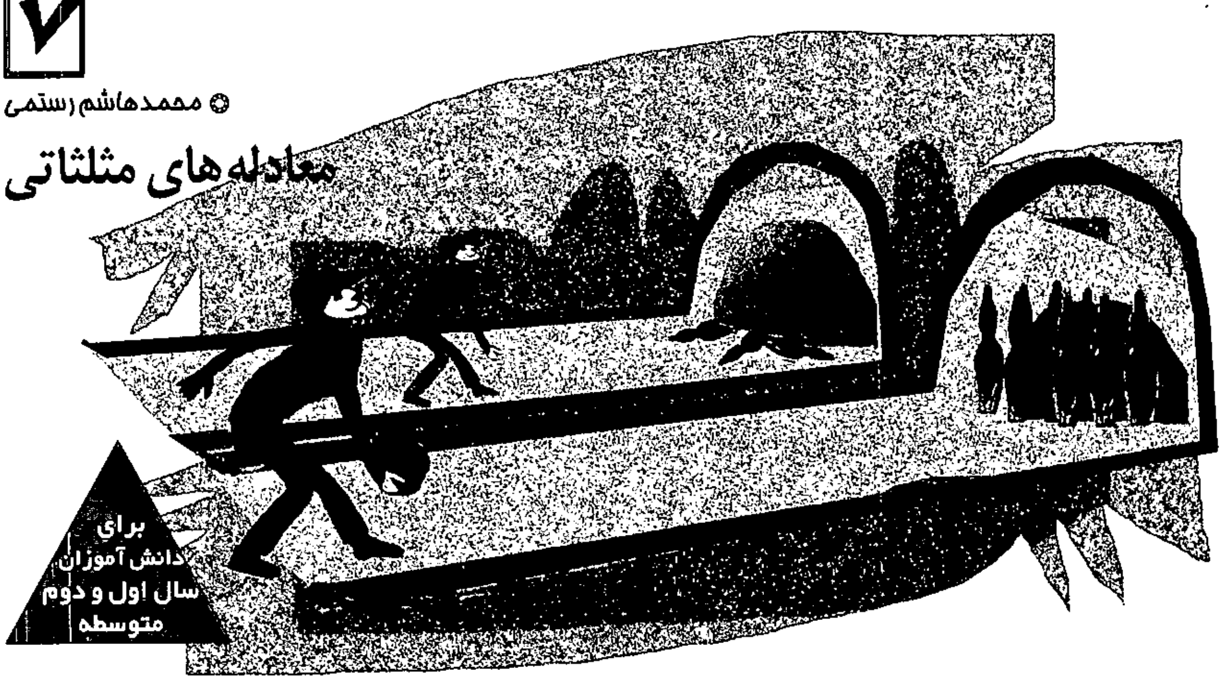
۷) $\therefore q$ از ۵ و ۶ و نقیض انتزاع

نکته: هرگاه نتیجه‌ی یک استنتاج، گزاره‌ای شرطی باشد، برای اثبات معتبر بودن استنتاج می‌توانیم مقدم نتیجه‌ی استنتاج را جزء مقدمات استنتاج فرض، و از آن به عنوان یک گزاره‌ی درست استفاده کنیم (زیرا اگر نادرست باشد، نتیجه‌ی استنتاج به انتفای مقدم درست است و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند).

۱۱

محمدهاشم رستمی

معادله‌های مثلثاتی



حل معادله های كلاسيك مثلثاتی

اشاره

در شماره های قبل راجع به حل معادله های مثلثاتی بحث کردیم. اینک دومین دسته ی مهم از معادله های غیرساده‌ی مثلثاتی، را بررسی می‌کنیم که صورت (فرم) مشخصی دارند و راه‌حل آن‌ها نیز مشخص است. این معادله ها که معادله های کلاسیک نام دارند، بر چهار نوع هستند که در این مقاله نوع اول آن‌ها را مطالعه می‌کنیم.

معادله‌ی کلاسیک نوع اول

این معادله به صورت کلی $a\sin X + b\cos X = c$ است؛ یعنی معادله‌ای است درجه‌ی اول نسبت به سینوس و کسینوس یک زاویه؛ مانند معادله های:

$2\sin x + \cos x = -1$ ؛

$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2$ ؛

$3\sin(x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ ؛

$\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$.

برای حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول به یکی از راه‌های ذیل عمل می‌کنیم:

راه‌حل اول

۱ . طرفین معادله را بر a ، یعنی بر ضریب $\sin X$، تقسیم می‌کنیم . خواهیم داشت :

$$\frac{a\sin X}{a} + \frac{b\cos X}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin X + \frac{b}{a}\cos X = \frac{c}{a}$$

۲ . فرض می‌کنیم $\frac{b}{a} = tg\alpha$ باشد ($\frac{b}{a}$ هر عددی باشد، همواره زاویه‌ای مانند α وجود دارد به قسمی که $\frac{b}{a} = tg\alpha$). در این صورت خواهیم داشت :

$$\sin X + tg\alpha \cos X = \frac{c}{a}$$

۳ . در معادله‌ی بالا به جای $tg\alpha$ مقدار مساوی‌اش $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ را قرار می‌دهیم و خواهیم داشت :

$$\sin X + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos X = \frac{c}{a}$$

و یا: $\sin X\cos\alpha + \cos X\sin\alpha = \frac{c}{a}\cos\alpha$

و از آن‌جا: $\sin(X+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$

۴. اگر $-۱ \le \frac{c}{a}\cos\alpha \le +۱$ باشد، فرض می‌کنیم $\frac{c}{a}\cos\alpha = \sin\varphi$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\sin(X+\alpha) = \sin\varphi$$

و این معادله، یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی است که جواب‌های آن برابرند با:

$$\left|\begin{array}{l} X+\alpha = ۲k\pi+\varphi \\ X+\alpha = ۲k\pi+\pi-\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} X = ۲k\pi+\varphi-\alpha \\ X = ۲k\pi+\pi-\varphi-\alpha \end{array}\right.$$

نکته‌ی ۱. در روش بالا می‌توانیم طرفین معادله را بر b، یعنی بر ضریب cosX، تقسیم کنیم و سپس $\frac{a}{b} = tg\alpha$ یا $\frac{a}{b} = \cot g\beta$ اختیار نماییم. در این صورت، نیز یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی به دست خواهد آمد که با حل آن، جواب‌های معادله‌ی داده شده به دست می‌آید.

نکته‌ی ۲. در مرحله‌ی دوم راه‌حل اول، می‌توانیم $\frac{b}{a} = \cot g\alpha$ اختیار کنیم. در این صورت نیز یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی به دست خواهد آمد که با حل آن، جواب‌های معادله‌ی داده شده محاسبه می‌شوند.

شرط جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول: همان‌طوری که دیدیم معادله‌ی کلاسیک نوع اول در صورتی دارای جواب است که داشته باشیم:

$$-۱ \le \frac{c}{a}\cos\alpha \le +۱$$

یا: $\frac{c^۲}{a^۲}\cos^۲\alpha \le ۱$

و یا: $\frac{c^۲}{a^۲} \le \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} \le ۱+tg^۲\alpha$

اما، $tg\alpha = \frac{b}{a}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{c^۲}{a^۲} \le ۱+\frac{b^۲}{a^۲} \Rightarrow c^۲ \le a^۲+b^۲ \text{ یا } a^۲+b^۲ \ge c^۲$$

بنابراین، **شرط وجود جواب برای معادله‌ی کلاسیک نوع اول** آن است که داشته باشیم:

$$a^۲+b^۲ \ge c^۲ \text{ یا } a^۲+b^۲-c^۲ \ge ۰$$

نکته: در صورتی که $a^۲+b^۲ > c^۲$ باشد، معادله دو جواب متمایز دارد و در صورتی که $a^۲+b^۲ = c^۲$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. معادله‌ی $۳\sin x + \sqrt{۳}\cos x = ۳$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a = ۳$، $b = \sqrt{۳}$ و $c = ۳$ است و شرط $a^۲+b^۲ > c^۲$ برقرار است، زیرا $(۳)^۲ + (\sqrt{۳})^۲ > (۳)^۲$ یا $۹ > ۳ + ۹$ یا $۱۲ > ۹$ است، پس این معادله دو جواب متمایز دارد. برای حل این معادله با روش ذکر شده، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. دو طرف معادله را بر ۳، یعنی بر ضریب sinx تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۳}{۳}\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\cos x = \frac{۳}{۳} \Rightarrow \sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\cos x = ۱$$

۲. به جای $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $tg\frac{\pi}{۶}$ را قرار می‌دهیم، زیرا $tg\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. پس داریم:

$$\sin x + tg\frac{\pi}{۶}\cos x = ۱$$

۳. به جای $tg\frac{\pi}{۶}$، مقدار $\frac{\sin\frac{\pi}{۶}}{\cos\frac{\pi}{۶}}$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{۶}}{\cos\frac{\pi}{۶}}\cos x = ۱ \Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{۶} + \cos x\sin\frac{\pi}{۶} = \cos\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴. می‌دانیم که $\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$ است. پس خواهیم داشت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{۶} = ۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \\ x+\frac{\pi}{۶} = ۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{array}\right.$$

مثال ۲. معادله‌ی $\sqrt{۳}\sin ۴x - \cos ۳x = ۲$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=\sqrt{3}$ ، $b=-1$ و $c=2$ است و شرط $a^2+b^2=c^2$ برقرار است؛ زیرا داریم:

$$(\sqrt{3})^2+(-1)^2=(2)^2 \Rightarrow 3+1=4 \Rightarrow 4=4$$

بنابراین، معادله ریشه‌ی مضاعف دارد. برای حل این معادله به روش ارائه شده عمل می‌کنیم. داریم:

$$(1)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sin 4x-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin 4x-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(2)\ \frac{\sqrt{3}}{3}=tg\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin 4x-tg\frac{\pi}{6}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(3)\ \sin 4x-\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos 4x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin 4x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 4x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin(4x-\frac{\pi}{6})=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$$

$$(4)\ 1=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(4x-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 4x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

مثال ۳. معادله‌ی $\sin(x-\frac{\pi}{6})-\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=1$ ، $b=-1$ ، $c=1$ و $a^2+b^2>c^2$ است؛ زیرا: $(1)^2+(-1)^2>(1)^2$ یا $2>1$ است.

پس معادله دو جواب متمایز دارد. برای حل این معادله با استفاده از روش ارائه شده داریم:

$$(1)\ \sin(x-\frac{\pi}{6})-1\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$(2)\ 1=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})-tg\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$(3) \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})-\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(x-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{4}=1\times\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin[(x-\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{4}]=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x-\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(4)\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x-\frac{5\pi}{12})=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\frac{5\pi}{12}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x-\frac{5\pi}{12}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۴. معادله‌ی $(m-1)\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}=m+2$ داده شده است:

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله جواب داشته باشد.

۲. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های این معادله $x=\frac{\pi}{3}$ باشد.

حل:

۱. شرط وجود جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول $a\sin x+b\cos x=c$ آن است که $a^2+b^2\ge c^2$ باشد، در این معادله داریم:

$$a=m-1,\ b=3,\ c=m+2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(m-1)^2+(3)^2\ge(m+2)^2 \Rightarrow m^2-2m+1+9\ge m^2+4m+4$$

$$\Rightarrow -6m+6\ge 0 \Rightarrow -6m\ge -6 \Rightarrow m\le 1$$

پس معادله‌ی داده شده در صورتی دارای جواب است که $m\le 1$ باشد.

۲. شرط آن‌که $x=\frac{\pi}{3}$ یکی از جواب‌های این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$(m-1)\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+3\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=m+2$$

$$\Rightarrow (m-1)\sin\frac{\pi}{6}+3\cos\frac{\pi}{6}=m+2$$

$$\Rightarrow (m-1)\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m+2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}m=\frac{5-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m=3\sqrt{3}-5$$

مثال ۵. معادله‌ی $3m\sin x+(1-2m)\cos x=3m-1$ داده شده است.

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله ریشه داشته باشد.

۲. مقدار m را چنان بیابید که ریشه‌های معادله‌ی $۲\sin x = ۱$ ، ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشد.

۳. به ازای $m=۱$ ، معادله را حل کنید.

حل:

۱. در این معادله، $a = ۳m$ ، $b = ۱-۲m$ و $c = ۳m-۱$ است. شرط وجود جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول را می‌نویسیم. داریم:

$$a^۲ + b^۲ \ge c^۲ \Rightarrow (۳m)^۲ + (۱-۲m)^۲ \ge (۳m-۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۹m^۲ + ۱ + ۴m^۲ - ۴m \ge ۹m^۲ + ۱ - ۶m \Rightarrow ۴m^۲ + ۲m \ge ۰$$

پس باید $۴m^۲ + ۲m$ را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$۴m^۲ + ۲m = ۰ \Rightarrow ۲m(۲m+۱) = ۰ \Rightarrow ۲m = ۰$$

$$\Rightarrow m = ۰ \text{ و } ۲m+۱ = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۲}$$

m	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$+\infty$
$۴m^۲+۲m$		+	۰	−	۰	+	
		ریشه دارد	ریشه دارد	ریشه ندارد	ریشه دارد	ریشه دارد	

۲. جواب‌های کلی معادله‌ی $۲\sin x = ۱$ یا جواب‌های خصوصی موجود دربازه‌ی $[۰,۲\pi]$ از این معادله، باید در معادله‌ی داده شده صدق کند. پس نخست جواب‌های معادله‌ی $۲\sin x = ۱$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$۲\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \quad \text{جواب‌های کلی معادله}$$

k	x
۰	$x = \frac{\pi}{۶}, x = \frac{۵\pi}{۶}$
۱	$۲\pi + \frac{\pi}{۶} > ۲\pi, ۲\pi + \frac{۵\pi}{۶} > ۲\pi$

از آن‌جا داریم:

$$x = \frac{\pi}{۶} \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} ۳m\sin\frac{\pi}{۶} + (۱-۲m)\cos\frac{\pi}{۳} = ۳m-۱ \Rightarrow$$

$$\frac{۳}{۲}m + (۱-۲m)\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳m-۱ \Rightarrow (\frac{۳}{۲} - \sqrt{۳} - ۳)m = -۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow (-\frac{۳}{۲} - \sqrt{۳})m = (-۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) \Rightarrow$$

$$m = \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}+۳} = \frac{(۲+\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}-۳)}{(۲\sqrt{۳}+۳)(۲\sqrt{۳}-۳)} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$x = \frac{۵\pi}{۶} \xrightarrow{\text{در معادله‌ی داده شده}} ۳m\sin\frac{۵\pi}{۶} + (۱-۲m)\cos\frac{۵\pi}{۶} = ۳m-۱$$

$$\Rightarrow ۳m\times\frac{۱}{۲} + (۱-۲m)(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}) = ۳m-۱$$

$$\Rightarrow (\frac{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{۲})m = \frac{\sqrt{۳}-۲}{۲} \Rightarrow m = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

۳. مقدار $m=۱$ را در معادله قرار می‌دهیم. داریم:

$$m = ۱ \xrightarrow{\text{در معادله}} ۳\sin x - \cos x = ۲ \Rightarrow \sin x - \frac{۱}{۳}\cos x = \frac{۲}{۳}$$

$$tg\alpha = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \sin x - tg\alpha\cos x = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \sin x - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{۲}{۳}$$

$$\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha = \frac{۲}{۳}\cos\alpha \Rightarrow \sin(x-\alpha) = \frac{۲}{۳}\cos\alpha,$$

$$\sin(x-\alpha) = \frac{۲}{۳}\cos\alpha = \sin\varphi \Rightarrow x - \alpha = ۲k\pi + \varphi$$

$$x - \alpha = ۲k\pi + \pi - \varphi \Rightarrow x = ۲k\pi + \varphi + \alpha \text{ و}$$

$$x = ۲k\pi + \pi + \alpha - \varphi$$

نکته: چون $tg\alpha = \frac{۱}{۳}$ است، $\cos\alpha = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{۲}{۳}\cos\alpha = \frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۵} < ۱$$

بنابراین، زاویه‌ای مانند φ وجود دارد که $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵} = \sin\varphi$ باشد.

به صورت دیگر می‌توان گفت، چون $|\cos\alpha| \le ۱$ است، پس $\frac{۲}{۳}|\cos\alpha| \le \frac{۲}{۳}$ می‌باشد. بنابراین تساوی $\frac{۲}{۳}\cos\alpha = \sin\varphi$ درست است.



اعداد اول

● سید محمدرضا هاشمی موسوی ●

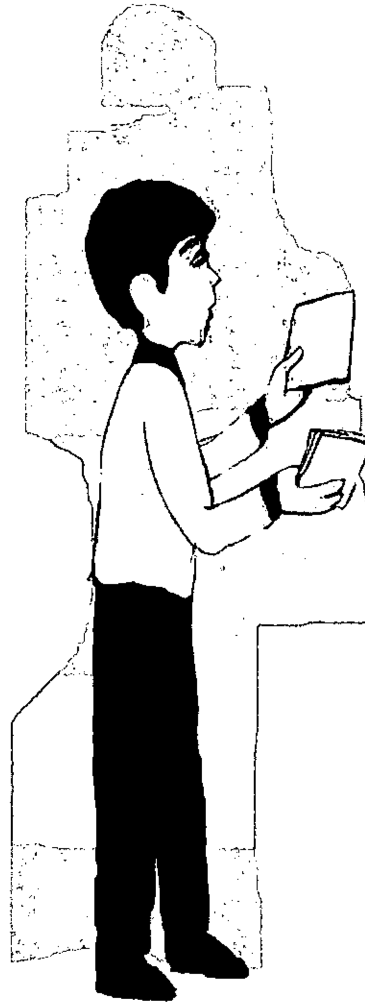
در این جا می‌خواهیم اعدادی را معرفی کنیم که در واقع سنگ زیربنای همه‌ی اعداد هستند؛ یعنی اعدادی که توسط آن‌ها می‌توان، تمام اعداد طبیعی به جز یک را تولید کرد. این نوع اعداد را در فارسی «اول» و در لاتین «Prime» نام نهاده‌اند. Prime در دو معنای «ساده بودن» و «بنیادی بودن» به کار رفته است که اتفاقاً، اعداد اول این هر دو ویژگی را دارند. برای سهولت، اعداد اول را فقط برای اعداد صحیح مثبت تعریف می‌کنند.

این اعداد را شاید به این دلیل اول نامیده‌اند که هم ساده (از نظر تجزیه)، و هم زیربنایی (از نظر تجزیه‌ی اعداد طبیعی به جز یک، به حاصل ضرب آن‌ها) هستند. تعداد این نوع اعداد بی‌نهایت است. آن‌ها به طور بسیار نامنظم بین اعداد طبیعی ظهور می‌کنند و همین توزیع نامنظم، سبب به وجود آمدن بسیاری از مسائل حل نشدنی در این باب شده است. امروزه، پس از گذشت چند قرن، مسائل بی‌شماری از این اعداد شگفت‌انگیز، یا به صورت حدس (نه ردّ مسأله و نه اثبات آن) و یا به صورت مسأله‌ای حل نشدنی مطرح هستند که مورد توجه خاص بسیاری از ریاضیدانان حرفه‌ای و غیرحرفه‌ای قرار دارند.

از طرف دیگر، مسائلی در تئوری اعداد وجود دارند که به طور مستقیم و یا غیرمستقیم با این اعداد در ارتباط هستند و بدون آگاهی از ویژگی‌ها و قضیه‌های اعداد اول، به هیچ یک از آن‌ها نمی‌توان پاسخ گفت. به همین دلیل، هر محصل این شاخه از ریاضیات ابتدا باید سیری در اعداد اول داشته باشد و سپس در مورد مباحث دیگر مطالعه کند. همچنین، بحث مستدل در بعضی از این مسائل، موقوف به تسلط کامل بر بعضی دیگر از رشته‌های ریاضیات (مانند: آنالیز حقیقی و تئوری توابع تحلیلی و...) و موضوع شاخه‌های خاص و تخصصی از تئوری اعداد است که برخی از آن‌ها بسیار پهناور و سخت دشوارند. دو مسأله از این مسائل حل نشدنی که همیشه مورد توجه خاص و عام بوده‌اند، یکی «توزیع اعداد اول به توسط یک یا چند ضابطه‌ی معین»، و دیگری «تعداد اعداد اول، در هر فاصله‌ی دلخواه» است.

در این جا، ما فقط به تعریف و بررسی برخی از ویژگی‌های اعداد اول و بیان برخی از قضیه‌های مهم و اساسی می‌پردازیم و به دیگر جنبه‌های بحث‌انگیز و مسدود این نوع اعداد، تنها اشاره خواهیم کرد.

تعریف: هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک، مانند p را اول



می‌نامیم، هرگاه هیچ شمارنده یا مقسوم علیه مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد.

می‌دانیم، هر عدد صحیح مانند $a \neq \pm 1$، حداقل دارای چهار شمارنده‌ی ± 1 و $\pm a$ است. برای سهولت، بدون این که از عمومیت مطلب کاسته شود، اعداد اول را فقط برای اعداد صحیح مثبت تعریف می‌کنند. برای مثال، عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ را که جز یک و خودشان هیچ شمارنده‌ی دیگری ندارند، «اول» گوییم و عددهایی مثل ۹، ۱۲، ۱۵، ۲۴، ۲۷، ۳۴، ۹۹ را که جز یک و خودشان دارای عامل یا عامل‌هایی دیگر هستند، «مرکب» گوییم. بنابر تعریف، عددی که اول نباشد، مرکب است.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، بدیهی است که عدد ۱ نه اول است و نه مرکب. خواهیم دید که پذیرفتن عدد ۱ در زمره‌ی اعداد اول، نه تنها مفید نیست، بلکه در یکتایی تجزیه‌ی هر عدد صحیح به عامل‌های اول، باعث اختلال می‌شود.

با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عدد اولی به صورت $p=a.b$ $(a<b)$ باشد، در این صورت $a=1$ و $b=p$؛ زیرا:

$p=a.b \Rightarrow$ (a و b مقسوم علیه‌های p هستند) $a=1$ و $b=p$ (۱)

هر عددی مثل n، دارای یک تجزیه‌ی بدیهی $n \times 1$ است. برای مثال، تجزیه‌ی بدیهی عدد ۱۸ به صورت 18×1 (حاصلضرب دو عدد) و تجزیه‌های غیربدیهی و جدی آن به صورت‌های زیر است:

$18=2\times 9=3\times 6(=2\times 3^2=9\times 2=6\times 3)$

نتیجه‌ی ۱. گزاره‌ی (۱) نشان می‌دهد که عدد اول به جز تجزیه‌ی بدیهی $p\times 1$، تجزیه‌ی نابدیهی ندارد. این واقعیت، ساده و بسیط بودن اعداد اول را نشان می‌دهد.

نتیجه‌ی ۲. اگر p عددی اول و k عددی مثبت و $k|p$، آن‌گاه $k=1$ یا $k=p$.

نتیجه‌ی ۳. اگر p و q دو عدد اول و $p|q$ یا $q|p$، آن‌گاه $p=q$؛ زیرا:

$p|q \Rightarrow p=1$ یا $p=q \xrightarrow{(p\neq 1 \text{ و } q \text{ اول})} p=q$

تعریف: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد را که اول نباشد (تجزیه‌ی نابدیهی هم داشته باشد)، عدد مرکب می‌نامیم.

مثال: همه‌ی عددهای طبیعی x و y را که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند، بیابید.

$$25y^2-16x^2=-31$$

حل: معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$16y^2-25x^2=31\ ;\ (4y-5x)(4y+5x)=31 \times 1$ (۲)

از برابری (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}4y-5x=1\\4y+5x=31\end{cases}$$

تنها جواب این دستگاه در مجموعه‌ی اعداد طبیعی $x=3$ و $y=4$ است.

این نتیجه از تجزیه‌ی عدد اول ۳۱ به صورت 31×1 حاصل شده است، زیرا بنابر اول بودن عدد ۳۱، تجزیه‌ی غیربدیهی ندارد و تجزیه‌ی بدیهی آن هم منحصر به فرد است.

قضیه‌ی ۱: با فرض این که p عددی طبیعی و به جز یک باشد و a و b دو عدد طبیعی دلخواه باشند، در این صورت اگر p در گزاره‌ی شرطی زیر صدق کند، p اول است:

$\forall a,b\in \mathbb{N};\ p|ab \Rightarrow p|a$ یا $p|b$ (۳)

اثبات (برهان خلف): فرض می‌کنیم p در شرط (۳) صدق کند، ولی اول نباشد. پس p دارای تجزیه‌ی نابدیهی به دو عامل مثبت مثل $n=ab$ است (واضح است که $n>a$ و $n>b$). از طرف دیگر، برابری $n=ab$ رابطه‌ی $n|ab$ را در بردارد

که با توجه به گزاره‌ی شرطی (۳) باید $n|a$ یا $n|b$ که با $n>a$ و $n>b$ متناقض است. بنابراین، فرض خلف نادرست و حکم برقرار است.

۴: عدد اول زوجی به جز ۲ وجود ندارد؛ زیرا اگر $p>2$ عددی زوج باشد، بدیهی است که $2|p$ و این با اول بودن p در تناقض است (p عاملی جز ۱ و خودش ندارد).

۵: هیچ دو عدد اول و متوالی به جز ۲ و ۳ وجود ندارند؛ زیرا به ازای هر عدد اول p که بزرگ‌تر از ۳ باشد، $p+1$ زوج است و با توجه به نتیجه‌ی ۴، هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مرکب است.

قضیه‌ی ۲: هر عدد صحیح به جز ± 1، لااقل یک مقسوم علیه اول دارد.

قضیه‌ی ۳: مجموعه‌ی اعداد اول، مجموعه‌ای نامتناهی است (بی‌نهایت عدد اول وجود دارد).

قضیه‌ی ۴: اگر n عددی مرکب باشد، آن‌گاه حداقل یک مقسوم علیه اول و کوچک‌تر یا برابر با $\sqrt{n}$ خواهد داشت.

۶: اگر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱ باشد و هیچ مقسوم علیه اول و کوچک‌تر یا برابر $\sqrt{n}$ نداشته باشد، آن‌گاه n عددی اول است.

نتیجه‌ی ۶، در واقع الگوریتمی برای تشخیص اول بودن اعداد طبیعی است. برای مثال، برای تشخیص عدد ۱۲۷، کافی است که این عدد را بر همه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{127}$ تقسیم کنیم. چون $\sqrt{127} \approx 11/27$ و $3 \nmid 127$، $5 \nmid 127$، $7 \nmid 127$ و $11 \nmid 127$، پس ۱۲۷ عددی اول است. می‌دانیم، هر عدد اول p نسبت به همه‌ی اعداد کوچک‌تر از خودش اول است و بنابراین، نسبت به حاصل‌ضربشان نیز اول است. از این‌رو، شرط کافی برای اول بودن p چنین است:

$$(p,\ (p-1)!) = 1 \quad (4)$$

برای سهولت می‌توان حاصل‌ضرب همه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{p}$ را در نظر گرفت. در صورتی که حاصل‌ضرب همه‌ی اعداد اول فرد کوچک‌تر از $\sqrt{p}$ را با نماد $\overline{\lfloor\sqrt{p}\rfloor}!$ نشان دهیم، شرط کافی برای اول بودن p چنین است:

$$\left(p,\ \overline{\lfloor\sqrt{p}\rfloor}!\right) = 1 \quad (5)$$

مثال: با توجه به رابطه‌ی (۵)، شرط کافی برای اول بودن عدد ۱۲۷ را بنویسید.

حل: با توجه به $\sqrt{127} \approx 11/27$ و $\lfloor 11/27 \rfloor = 11$ و رابطه‌ی (۵)، می‌توان نوشت:

$$\left(127,\ \overline{\lfloor\sqrt{127}\rfloor}!\right) = 1;\ (127, 3\times5\times7\times11) = 1$$

نتیجه‌ی ۷: برای تشخیص اول بودن اعداد طبیعی، کافی است با استفاده از روش نردبانی برای محاسبه‌ی ب. م. م (الگوریتم اقلیدسی) عمل کنیم و $d = \left(p,\ \overline{\lfloor\sqrt{p}\rfloor}!\right)$ را محاسبه کنیم. در صورتی که $d=1$، آن‌گاه p عددی اول است.

مثال: با استفاده از الگوریتم اقلیدسی، مشخص کنید که عدد $p=127$، اول است.

حل: در واقع باید $d = \left(127, \underbrace{3\times5\times7\times11}_{1155}\right)$ را تعیین کنیم:

چون $d=1$، پس عدد $p=127$، اول است.

(خارج‌قسمت‌ها)	۹	۱۰	۱	۱	۲	۲
۱۱۵۵	۱۲۷	۱۲	۷	۵	۲	۱=d
(باقی‌مانده)	۱۲	۷	۵	۲	۱	۰

نتیجه‌ی ۸: اگر a یک عدد طبیعی دلخواه و p عددی اول باشد، در این صورت دو حالت ممکن $(a,p)=1$ یا $(a,p)=p$ وجود دارد؛ زیرا با فرض $(a,p)=d$، خواهیم داشت:

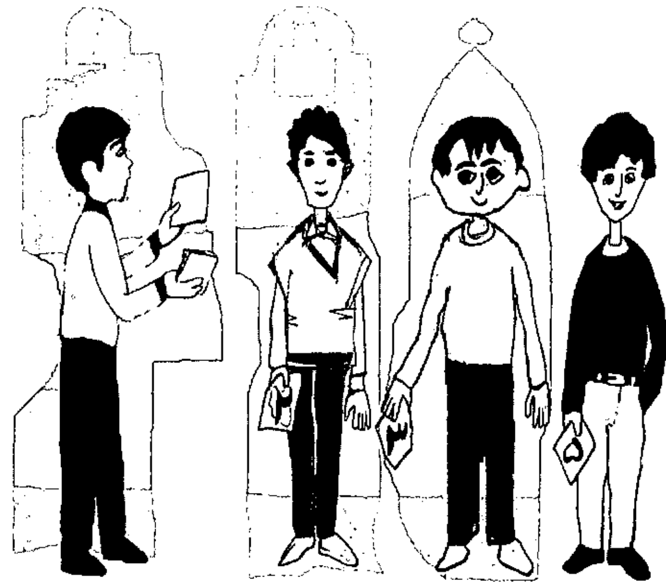
$$d|p \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ \text{یا} \\ d=p \end{cases} \quad (\text{p اول است})$$

نتیجه‌ی ۹: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$p \nmid a \Leftrightarrow (p,a)=1$$

با توجه به نتایج اخیر، واضح است که برای یافتن ب. م. م عدد اول p و یک عدد صحیح دلخواه مانند a، فقط به یک بار تقسیم کردن نیاز است؛ زیرا اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر p برابر صفر شود، ب. م. م همان p است و اگر باقی‌مانده صفر نشود، ب. م. م برابر ۱ خواهد بود. برای مثال، می‌خواهیم (۲۹ و ۱۳۷۹) را تعیین کنیم. کافی است یک بار تقسیم کنیم:

$$1379 = 29\times47+16$$



چون باقی‌مانده‌ی این تقسیم برابر صفر نشد، بنابراین ب. م. م برابر ۱ خواهد شد (زیرا $p=۲۹$ عدد اول است):

$$(۲۹ \text{ و } ۱۳۷۹) = ۱$$

نتیجه‌ی ۱۰: اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، در این صورت p و q نسبت به هم اولند.

قضیه‌ی ۵: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ یا } p|b$$

برهان: اگر $p|a$، حکم برقرار است. بنابراین، فرض می‌کنیم $p \nmid a$. با توجه به $(p,a)=۱$ و لم اقلیدس:

$$p|ab\ ,\ (b,a)=۱ \Rightarrow p|b$$

نتیجه‌ی ۱۱: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$p|a_۱a_۲a_۳\ldots a_k \Rightarrow p|a_۱ \text{ یا } p|a_۲ \text{ یا } \ldots \text{ یا } p|a_k$$

نتیجه‌ی ۱۲: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$p|a^n \Rightarrow p|a \quad \text{(حالت خاص نتیجه‌ی ۱۱)}$$

مسأله: اگر p عددی اول باشد و داشته باشیم $p|۴۹^n$، نشان دهید: $p=۷$.

حل:

$$p|۴۹^n;\ p|۷^{۲n} \Rightarrow p|۷$$
$$\Rightarrow p=۱ \text{ یا } p=۷$$
$$\overset{(p \text{ عدد اول})}{\Rightarrow} p=۷$$

مسأله: اگر p و $p_۱$، $p_۲$، ... و p_k، اعداد اول باشند و داشته باشیم: $p|p_۱p_۲\ldots p_k$، ثابت کنید به ازای n طبیعی، خواهیم داشت: $p=p_n$.

حل: با توجه به فرض، یعنی $p|p_۱p_۲\ldots p_k$ و نتیجه‌ی (۱)، p حداقل یکی از p_iها مثل p_n را می‌شمارد. بنابراین:

$$p|p_n \Rightarrow p=۱ \text{ یا } p=p_n \overset{(p \text{ اول است})}{\Rightarrow} p=p_n$$

قضیه‌ی بنیادی حساب

اکنون می‌خواهیم قضیه‌ای را بیان کنیم که یکی از اساسی‌ترین قضیه‌های تئوری اعداد است. این قضیه بیان می‌کند که هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نمایش داد و نمایش هر عدد به صورت حاصل‌ضرب این چند عدد اول، بدون در نظر گرفتن ترتیب عوامل ضرب، منحصر به فرد است.

با توجه به این قضیه، نقش بنیادی اعداد اول آشکار می‌شود. یعنی همه‌ی اعداد در واقع از اعداد اول به‌وجود آمده‌اند. در اصطلاح ریاضیدانان، اعداد اول «بلوک‌های ساختمانی» اعداد هستند. پیش از بیان قضیه‌ی بنیادی حساب، لازم است به این تعریف و یک قضیه اشاره شود:

تعریف: با فرض این‌که اعداد اولی مثل $p_۱$، $p_۲$، ... و p_k یافت شوند به‌طوری که $p|p_۱p_۲\ldots p_k$، در این صورت گویند: n به عوامل اول تجزیه شده است. برای مثال، اعداد ۱۸، ۲۴، ۳۶ و ۹۹ را به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$۱۸=۲\times۳\times۳=۲\times۳^۲ \text{ و } ۲۴=۲\times۲\times۲\times۳=۲^۳\times۳$$
$$۳۶=۲\times۲\times۳\times۳=۲^۲\times۳^۲ \text{ و } ۹۹=۳\times۳\times۱۱=۳^۲\times۱۱$$

تذکر ۱: هیچ‌یک از صورت‌های حاصل‌ضرب ۳×۸، ۴×۶، ۲×۱۲، و ۱×۲۴، یک تجزیه‌ی ۲۴ به عامل‌های اول محسوب نمی‌شود و تنها $۲\times۲\times۲\times۳$ و معادل آن $۲^۳\times۳$، تجزیه‌ی ۲۴ به عوامل اول است.

تذکر ۲: صورت حاصل‌ضرب ۷×۱، یک تجزیه‌ی ۷ به عوامل اول نیست و چون ۷ عدد اول است و تنها یک شمارنده به جز ۱ دارد، پس ۷ در واقع یک تجزیه‌ی ۷ به عوامل اول است. بنابراین، اگر p اول باشد، خود p تجزیه‌ی آن به عوامل اول محسوب می‌شود.

قضیه‌ی ۶: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد $(n>۱)$، حداقل دارای یک شمارنده‌ی اول است.

برهان: اگر مجموعه‌ی تمام شمارنده‌های بزرگ‌تر از واحد عدد طبیعی n را به D نشان دهیم:

$$D=\{k : k>۱,\ k|n\}$$

بدیهی است که D تهی نیست $(n \in D)$ و بنابر اصل خوش ترتیبی، دارای عضو ابتدایی مثل p است. کافی است ثابت کنیم، p اول است. می‌دانیم هر شمارنده‌ی p یک شمارنده‌ی

n نیز هست. پس اگر p اول نباشد، در این صورت D عضوی کوچک‌تر از p خواهد داشت که یک تناقض است. بنابراین p اول است.

قضیه‌ی بنیادی حساب: هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد $(n>1)$ را می‌توان به عوامل اول تجزیه کرد و این تجزیه بدون در نظر گرفتن ترتیب قرار گرفتن عوامل، منحصر به فرد است.

برهان: واضح است که اگر n عددی اول باشد، تجزیه‌ی منحصر به فرد آن به عوامل اول n است. و اگر n مرکب باشد، بر طبق قضیه، دارای حداقل یک شمارنده‌ی اول مثل p_1 خواهد بود:

$$n = p_1q_1 \; ; \; 1 < q_1 < n$$

حال اگر q_1 اول باشد؛ p_1q_1 تجزیه‌ی n به عامل‌های اول است. در غیر این صورت، چون q_1 مرکب است، دارای حداقل یک شمارنده‌ی اول مثل p_2 خواهد بود:

$$q_1 = p_2q_2 \; ; \; 1 < q_2 < q_1$$

اکنون اگر q_2 اول باشد، تجزیه‌ی منحصر به فرد n به عامل‌های اول به صورت زیر خواهد بود:

$$n = p_1p_2q_2$$

اگر به همین ترتیب برای q_2، q_3، ... و q_k، عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$n = p_1p_2p_3\cdots p_k\cdot q_k$$

با توجه به نابرابری‌های زیر:

$$n > q_1 > q_2 > q_3 > \ldots > q_k > 1$$

بدیهی است که این عمل نمی‌تواند بی‌نهایت بار تکرار شود، یعنی یکی از p_kها عدد اولی مثل p_k خواهد بود. بنابراین، تجزیه‌ی منحصر به فرد n به عوامل اول به این صورت خواهد بود:

$$n = p_1p_2p_3\cdots p_k$$

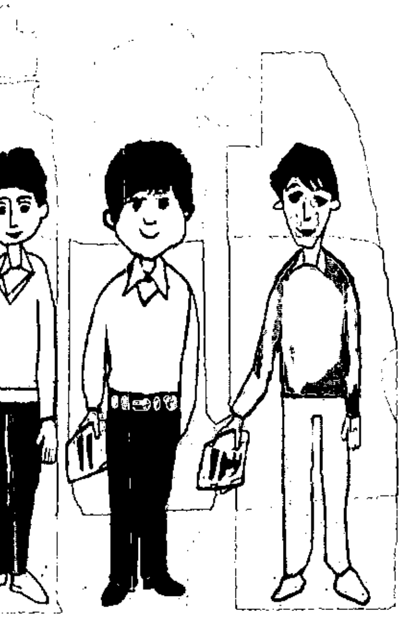
توجه: یکتایی این تجزیه را نیز می‌توان اثبات کرد.

تذکر: در صورتی که تعدادی از عامل‌های اول تجزیه با هم برابر باشند، می‌توان هر یک از عامل‌های تکراری را به صورت یک عدد توان‌دار نوشت که در این صورت، هر عدد طبیعی $n>1$ به صورت رابطه‌ی منحصر به فرد زیر تجزیه خواهد شد:

$$n = p_1^k\cdot p_2^s\cdots p_l^r \qquad (6)$$

در رابطه‌ی (۶)، اعداد k، s، ... و r طبیعی و p_iها اعداد اول متمایزی هستند، با شرط زیر:

$$p_1 < p_2 < \ldots p_l$$



توجه: طریقه‌ی نمایش عدد n را به صورت رابطه‌ی منحصر به فرد (۶)، «تجزیه‌ی استاندارد» یا کانونیک عدد n گویند. برای مثال، تجزیه‌ی استاندارد عدد n=۱۸۹۰۰ به صورت زیر است:

$$۱۸۹۰۰ = ۲^۲\times ۳^۳\times ۵^۲\times ۷$$

مسائل حل شده

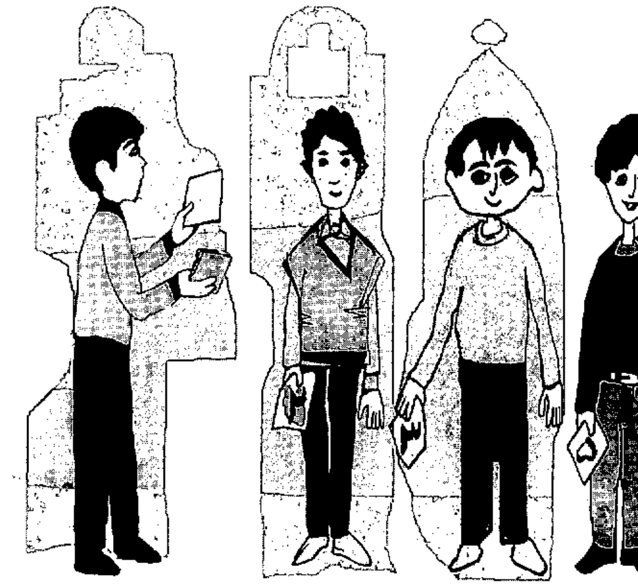
مسأله‌ی ۱: ثابت کنید، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو صورت $6t\pm1$ است.

اثبات: طبق الگوریتم تقسیم، هرعدد طبیعی دلخواه به یکی از شش صورت: $6n$، $6n+1$، $6n+2$، $6n+3$، $6n+4$ و $6n+5$ نوشته می‌شود. در صورتی که عدد مورد نظر اول و فرد باشد، به صورت $6n$، $6n+2$، $6n+3$ یا $6n+4$ نمی‌تواند باشد. بنابراین، فقط به یکی از دو صورت $6n+1$ و $6n+5$ می‌تواند ظاهر شود. بدیهی است که $6n+5$ را به صورت $6(n+1)-1$ می‌توان نوشت. پس، هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو صورت $6t\pm1$ است.

مسأله‌ی ۲: ثابت کنید، هر عدد اول و فرد به یکی از دو صورت $4t\pm1$ است.

اثبات: طبق الگوریتم تقسیم، هر عدد طبیعی دلخواه به یکی از چهار صورت: $4k$، $4k+1$، $4k+2$ و $4k+3$ نوشته می‌شود. در صورتی که عدد مورد نظر اول و فرد باشد، به صورت‌های $4k$ و $4k+2$ نمی‌تواند باشد. از طرف دیگر، چون $4k+3$ را به صورت $4(k+1)-1$ می‌توان نوشت، پس هر عدد اول و فرد تنها به یکی از دو صورت $4t\pm1$ ظاهر می‌شود.

مسأله‌ی ۳: ثابت کنید، هر عدد طبیعی به صورت $6t-1$ یا $4t-1$، عامل اولی به همان صورت دارد.



اثبات: با فرض این که a عددی طبیعی و به صورت $a=6t-1$ باشد، بدیهی است که تجزیه‌ای به صورت عامل‌های اول به شکل $a=p_1p_2\dots p_n$ خواهد داشت. چون a عددی فرد است، واضح است که همه‌ی p_iها باید فرد باشند (یکی از p_iها زوج باشد، حاصل ضربشان زوج خواهد شد). چون p_iها همگی فرد و اول هستند، پس به یکی از دو صورت $6k\pm1$ خواهند بود.

حال اگر همه‌ی عامل‌ها به صورت $6k+1$ باشند، حاصل ضرب آن‌ها، یعنی a، باید به صورت $6s+1$ باشد که با فرض، یعنی $a=6t-1$، متناقض است. پس حداقل یکی از p_iها باید به صورت $6k-1$ باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که هر عدد طبیعی به صورت $4t-1$، عامل اولی به شکل $4n-1$ دارد.

مسأله‌ی ۴: ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول به صورت $4t-1$ یا $6t-1$ وجود دارد.

اثبات: با فرض این که تنها n عدد اول p_1، p_2، ... و p_n به یکی از دو صورت فوق وجود دارد، به تناقض خواهیم رسید. زیرا اعداد $4(p_1p_2\dots p_n)-1$ یا $6(p_1p_2\dots p_n)-1$ اگر اول نباشند، مرکب هستند و هر یک عامل اولی به صورت خودشان دارند که جزو p_iها نیست؛ زیرا اگر این عامل اول که آن را به p نشان می‌دهیم، جزو p_iها باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} p|4(p_1p_2\dots p_n)\\ p|4(p_1p_2\dots p_n)-1\end{array}\right\} \overset{\text{(p تفاضل را می‌شمارد)}}{\Longrightarrow} p|1$$

نتیجه‌ی $p|1$، با فرض اول بودن p متناقض است. به همین ترتیب، برای عدد $6t-1$ نیز به همین نتیجه خواهیم رسید.

بنابراین p عدد اولی به جز p_iها خواهد بود. در این جا حکم ثابت است.

مسأله‌ی ۵: اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد؛ ثابت کنید: p^2-1 مضرب ۲۴ است.

اثبات: چون $3\times8=24$، پس کافی است نشان دهیم: p^2-1 بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است. p فرد است و می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $p^2=8k+1$ و یا $p^2-1=8k$ است. از طرف دیگر، p عدد اول و غیر ۳ است، پس p به یکی از صورت‌های $p=3t\pm1$ نوشته می‌شود. بنابراین در هر صورت خواهیم داشت:

$$p=3t\pm1\ ;\ p^2=9t^2\pm6t+1$$
$$;\ p^2-1=3(3t^2\pm2t)$$
$$;\ p^2-1=3s$$

در این جا ثابت شد که p^2-1 به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ مضربی از ۳ و ۸ و در نتیجه ۲۴ است.

مسأله‌ی ۶: اگر (2^p-1) اول باشد، ثابت کنید p عددی اول است.

اثبات: اگر 2^p-1 عددی اول و p مرکب باشد به تناقض خواهیم رسید. زیرا اگر p مرکب باشد، تجزیه‌ای نابدیهی به صورت $p=mn$ خواهد داشت که با فرض مسلم $2\le m<n<p$ خواهیم داشت:

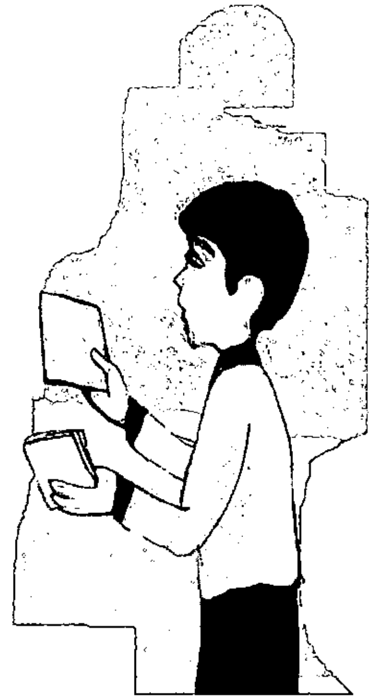
$$p=mn:2^p-1=2^{mn}-1=(2^m)^n-1$$
$$=(2^m-1)\left[(2^m)^{n-1}+(2^m)^{n-2}+\dots+1\right]\quad(7)$$

سمت راست برابری (۷)، حاصل ضرب دو عامل بزرگ‌تر از واحد و تجزیه‌ای نابدیهی برای 2^p-1 است که با اول بودن آن در تناقض است. پس p اول است.

مسأله‌ی ۷: اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، ثابت کنید: p^2+23 بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

اثبات: کافی است نشان دهیم، عدد p^2+23 بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است. از آن‌جا که p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ است، پس به صورت $p=3k\pm1$ می‌باشد. بنابراین:

$$p^2=9k^2\pm6k+1=9k^2\pm6k+24-23$$
$$=3(3k^2\pm2k+8)-23$$
$$=3s-23\quad;\quad p^2+23=3s$$



همچنین، چون p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ است، بنابر این فرد است و مربع آن به صورت زیر است:

$$p^۲ = ۸t + ۱ \; ; \; p^۲ + ۲۳ = ۸t + ۲۴ = ۸(t + ۳) = ۸r$$

در این جا ثابت شد که $p^۲+۲۳$ برای هر p اول بزرگ‌تر از ۳، مضربی از ۳ و ۸ و در نتیجه مضربی از ۲۴ است.

مسأله‌ی ۸: ثابت کنید که تنها عدد اول به صورت $k^۳-۱$، عدد ۷ است.

اثبات: کافی است ثابت کنیم، عدد $k^۳-۱$ به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مرکب است. به این منظور عدد $k^۳-۱$ را تجزیه می‌کنیم:

$$k^۳ - ۱ = (k - ۱)(k^۲ + k + ۱)$$

واضح است که عدد $k^۳-۱$ فقط در حالت $k-۱=۱$ دارای تجزیه‌ی بدیهی است و در حالت $k-۱>۱$، دارای تجزیه‌ی نابدیهی است. یعنی به ازای $k=۲$ $(۲^۳-۱=۷)$، عدد $k^۳-۱$ اول و به ازای هر $k>۲$ مرکب است.

مسأله‌ی ۹: ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

اثبات: ابتدا برای هر $n \geq ۱$، عدد طبیعی $k=n!+۱$ را در نظر می‌گیریم، چون $k>۱$، پس طبق قضیه، حداقل یک مقسوم‌علیه اول مثل p خواهد داشت. یعنی عدد اول p وجود دارد، به‌طوری که داشته باشیم:

$$p|k=n!+۱$$

از طرف دیگر باید: $p>n$. زیرا اگر $p \leq n$، در این صورت خواهیم داشت:

$$p \leq n: \begin{cases} p|n! \\ p|n!+۱ \end{cases} \overset{\text{(p تفاضل را می‌شمارد)}}{\Longrightarrow} p|n!+۱-n! \Rightarrow p|۱ \quad (۸)$$

رابطه‌ی (۸) با اول بودن p متناقض است، پس باید: $p>n$.

در این جا، به ازای عدد دلخواه $n \geq ۱$، به یک عدد اول بزرگ‌تر از n دست یافته‌ایم. پس باید بی‌نهایت عدد اول وجود داشته باشد.

واضح است که به ازای هر $n \geq ۱$، به یک عدد اول جدید خواهیم رسید.

تمرین

۱. تعیین کنید کدام یک از اعداد زیر اول است:

الف) ۱۱۸۹   ب) $۱۲!\pm۱$

ج) $۳\times۵\times۷\pm۲$ د) $۲^{۱۳۳}\pm۱$

۲. نشان دهید، عدد $(۲^{pq}-۱)$ به ازای هر عدد اول p و q همیشه مرکب است و حداقل دارای یک عامل نابدیهی است.

۳. تابع با ضابطه‌ی $f(n) = n^۲ - n + ۴۱$، به ازای $۱ \leq n \leq ۶۱$، چند عدد اول تولید می‌کند.

۴. ثابت کنید، اگر $(۲^m + ۱)$ اول باشد، m باید به صورت توانی از ۲ باشد $(m = ۲^n)$.

۵. اگر p عدد فرد و اول باشد و $p \neq ۵$، ثابت کنید: $(p^۲-۱)$ یا $(p^۲+۱)$، همیشه مضربی از ۱۰ است.

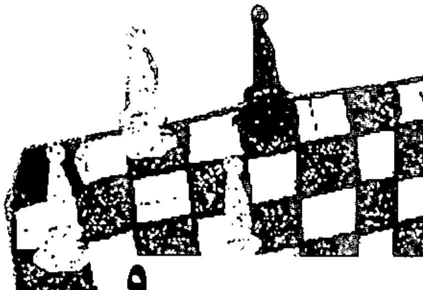
۶. ثابت کنید به ازای هر $n \geq ۲$، عدد $(n^۴ + ۴)$ مرکب است.

۷. حدس می‌زنند که بی‌نهایت عدد اول به صورت $n^۲ - ۲$ و $n^۲ + ۱$ وجود دارد. هفت نمونه از این عددها را بیابید.

۸. ثابت کنید، هر عدد به صورت $(۸^n + ۱)$ مرکب است.

۹. با فرض $(a,b)=p$، حاصل $[a,b]$ و (a^p,b^p)، (a^{p^k}, b^p) و $(a^{p!}, b^{p-۱})$ را در صورتی که p عددی اول باشد، بیابید.

* www.primenumbersformula.com



اتحاد و معادله

برای حل معادله های قابل حل

پرویز شهریاری

عادت کنیم، معادله‌ی درجه دوم را، نه با استفاده از دستور، بلکه به طور مستقل حل کنیم. معادله‌ی درجه دوم در حالت کلی، به این صورت است:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

مقدار a نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا در این صورت به معادله‌ای از درجه‌ی اول می‌رسیم که حل آن دشوار نیست. پس، با فرض $a \neq 0$، می‌توانیم دو سمت معادله را بر a تقسیم کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ را به عبارتی که مجذور کامل باشد، تبدیل می‌کنیم. در سمت چپ برابری، $\frac{b}{a}x$، دو برابر x در جمله‌ی دوم است. یعنی جمله‌ی دوم $\frac{b}{2a}$ می‌شود. اگر $\frac{b^2}{4a^2}$، یعنی مجذور $\frac{b}{2a}$، را به دو سمت برابری اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

اکنون، با جذر گرفتن از دو طرف، بعد بردن $\frac{b}{2a}$ به سمت راست برابری، مقدار x به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

این، همان دستور حل معادله‌ی درجه‌ی دوم است، ولی با این روش حل با همه‌ی مرحله‌ها آشنا می‌شوید و به حافظه برای به یاد سپردن دستور نیاز ندارید.

نمونه‌ی ۱. معادله‌ی $12x^2 - 17x + 6 = 0$ را حل کنید.

حل: در آغاز دو سمت برابری را بر ۱۳ تقسیم می‌کنیم و عدد ۶ را هم به سمت راست برابری می‌بریم:

$$x^2 - \frac{17}{12}x = -\frac{1}{2}$$

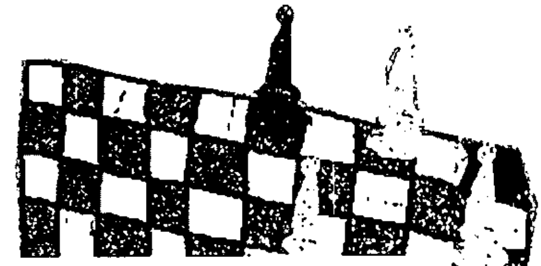
باید $x^2 - \frac{17}{12}x$ را به مجذور کامل تبدیل کنیم. $\frac{17}{12}x$ دو برابر حاصل‌ضرب x در عدد دوم است. پس عدد دوم برابر $\frac{17}{24}$ می‌شود که باید مجذور آن را به دوطرف برابری اضافه کنیم.

$$(x - \frac{17}{24})^2 = (\frac{17}{24})^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{576}$$

و اگر از دو سمت برابری جذر بگیریم:

$$x - \frac{17}{24} = \pm\frac{1}{24} \Rightarrow x = \frac{17}{24} \pm \frac{1}{24}$$

و از این جا دو جواب معادله به دست می‌آید: $x_1 = \frac{3}{4}$ و $x_2 = \frac{2}{3}$.



نمونه‌ی ۲ . معادله‌ی $2a^2x^2-3ax-2a^2+a+1=0$ را حل کنید $(a\neq 0)$:

حل: دو طرف برابری را بر $2a^2$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2-\frac{3}{2a}x=\frac{2a^2-a-1}{2a^2}$$

سپس، به دو طرف برابری، $\frac{9}{16a^2}$ را اضافه می‌کنیم تا سمت چپ به صورت مجذور کامل درآید:

$$(x-\frac{3}{4a})^2=\frac{16a^2-8a+1}{16a^2}=(\frac{4a-1}{4a})^2$$

از دو طرف برابری جذر می‌گیریم:

$$x-\frac{3}{4a}=\pm\frac{4a-1}{4a}$$

و از آن‌جا جواب‌های معادله به دست می‌آیند:

$$x_1=\frac{1}{a}-1 \text{ و } x_2=\frac{1}{2a}+1$$

تبدیل پارامتر به مجهول

برخی از معادله‌های پارامتری از درجه‌ی بالاتر از ۲ را می‌توان با تبدیل پارامتر به مجهول حل کرد. البته دو شرط دارد: ۱ . معادله نسبت به پارامتر از درجه‌ی دوم باشد؛ ۲ . معادله نسبت به پارامتر قابل حل باشد. به این مثال توجه کنید:

نمونه‌ی ۳ . $2x^4+x^3-(3a+2)x^2+2x+a^2-1=0$ ، معادله‌ای است نسبت به x از درجه‌ی چهارم. ولی همین معادله نسبت به a از درجه‌ی دوم است و اگر شرط دوم را داشته باشد، قابل حل است. معادله را نسبت به a منظم می‌کنیم.

$$a^2-3x^2.a+(2x^4+x^3-2x^2+2x-1)=0$$

که اگر آن را حل کنیم، به دو جواب می‌رسیم.

$$a=x^2+x-1 \text{ و } a=2x^2-x+1$$

اکنون هریک از این معادله‌ها را که از درجه‌ی دوم نسبت به x هستند، منظم می‌کنیم:

$$x^2+x-(a+1)=0 \text{ و } 2x^2-x+1-a=0$$

و از این دو معادله، جواب‌های x به دست می‌آیند:

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{4a+5}) \text{ و } x_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{4a-3})$$

درباره‌ی این جواب‌ها، باید بحثی داشته باشیم تا ببینیم، در چه حالت‌هایی به جواب حقیقی می‌رسند.

۱ . اگر $a>\frac{3}{4}$ ، آن‌گاه ۴ ریشه‌ی حقیقی داریم.

۲ . اگر $-\frac{5}{3}<a<\frac{3}{4}$ ، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی و دو ریشه‌ی موهومی دارد.

۳ . اگر $a<-\frac{5}{3}$ ، آن‌گاه چهار ریشه‌ی معادله موهومی است.

۴ . در حالت $a=\frac{3}{4}$ ، معادله دو ریشه برابر و دو ریشه‌ی ساده‌ی حقیقی دارد.

۵ . در حالت $a=-\frac{5}{4}$ ، معادله دارای دو ریشه‌ی برابر حقیقی و دو ریشه‌ی موهومی است.

مواظب باشید، بحث درباره‌ی تعداد جواب‌های حقیقی و موهومی را فراموش نکنید.

نمونه‌ی ۴ . $x^3-(3+\sqrt{3})x+3=0$

حل: این معادله را می‌توان با تجزیه‌ی عبارت سمت چپ برابری حل کرد، ولی بهتر است با در نظر گرفتن $a=\sqrt{3}$ ، آن را به یک معادله‌ی پارامتری تبدیل کنیم:

$$x^3-(a^2+a)x+a^2=0$$

اکنون معادله را نسبت به پارامتر a منظم می‌کنیم:

$$(1-x)a^2-x.a+a^2=0$$

که چون معادله‌ای است درجه دوم نسبت به مجهول a ، می‌توان آن را حل کرد:

$$a=x \text{ و } a=\frac{x^2}{1-x}$$

اگر به جای a مقدارش $\sqrt{3}$ را قرار دهیم:

$$x=\sqrt{3} \text{ و } x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$$

بنابراین، جواب‌های معادله‌ی درجه سوم به این صورت است:

$$x_1=\sqrt{3} \text{ و } x_{2,3}=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$$

نمونه‌ی ۵. $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

حل: این معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\left[(x+\frac{a+b}{2})+\frac{a-b}{2}\right]^4+\left[(x+\frac{a+b}{2})-\frac{a-b}{2}\right]^4=c$$

اگر فرض کنیم:

$$x+\frac{a+b}{2}=t \quad \text{و} \quad \frac{a-b}{2}=\alpha$$

به این معادله می‌رسیم:

$$(t+\alpha)^4+(t-\alpha)^4=c\Rightarrow$$
$$2t^4+12a^2t^2+(2\alpha^2-c)=0$$

که یک معادله‌ی دومجذوری است و با فرض $t^2=y$، به معادله‌ای درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود.

برای مثال، فرض کنید، می‌خواهیم این معادله را حل کنیم:

$$(x+2)^4+(x+5)^4=17$$

واسطه‌ی حسابی $x+2$ و $x+5$، یعنی $x+\frac{7}{2}$ را برابر t می‌گیریم:

$$(t-\frac{3}{2})^4+(t+\frac{3}{2})^4=17\Rightarrow$$
$$2t^4+27t^2-\frac{55}{8}=0$$

که از آن‌جا جواب‌های $t^2=\frac{1}{4}$ و $t^2=-55$ و یا $t^2=\pm\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند (دو جواب دیگر موهومی هستند).

درنتیجه، اگر به جای t، مقدارش را برحسب x قرار دهیم، برای x به دست می‌آید:

$$x=-4 \quad \text{و} \quad x=-3$$

نمونه‌ی ۶. اگر $a+b=c+d$ باشد، این معادله را حل کنید:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$$

حل: این معادله را روی یک مثال حل می‌کنیم. مطلوب است حل معادله‌ی:

$$(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)=-72$$

داریم: $5-4=3-2$ و معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\left[(x+2)(x-3)\right]\times\left[(x+4)(x-5)\right]=72$$

و: $(x^2-x-6)(x^2-x-20)=72$ که اگر فرض کنیم $x^2-x=y$، به یک معادله‌ی درجه دوم می‌رسیم:

$$y^2-36y+48=0\Rightarrow t=2,24$$

از آن‌جا، دو معادله‌ی درجه دوم برای تعیین مقدار x به دست می‌آید.

$$x^2-2x=2 \quad \text{و} \quad x^2-2x=24$$

که جواب‌های x را به ما می‌دهند:

$$x_1=-1 \quad \text{و} \quad x_2=2 \quad \text{و} \quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{97}}{9}$$

معادله‌های وارون

به معادله‌ای وارون می‌گوییم که با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ و یا x به $-\frac{1}{x}$، تغییر نکند. در حالت اول آن را معادله‌ی وارون مثبت و در حالت دوم آن را معادله‌ی وارون منفی می‌گویند.

نمونه‌ی ۷. این معادله‌ی وارون را حل کنید:

$$2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0$$

دو طرف این معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم ($x\neq 0$ است) و از ضریب برابر فاکتور می‌گیریم:

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-13(x+\frac{1}{x})+24=0$$

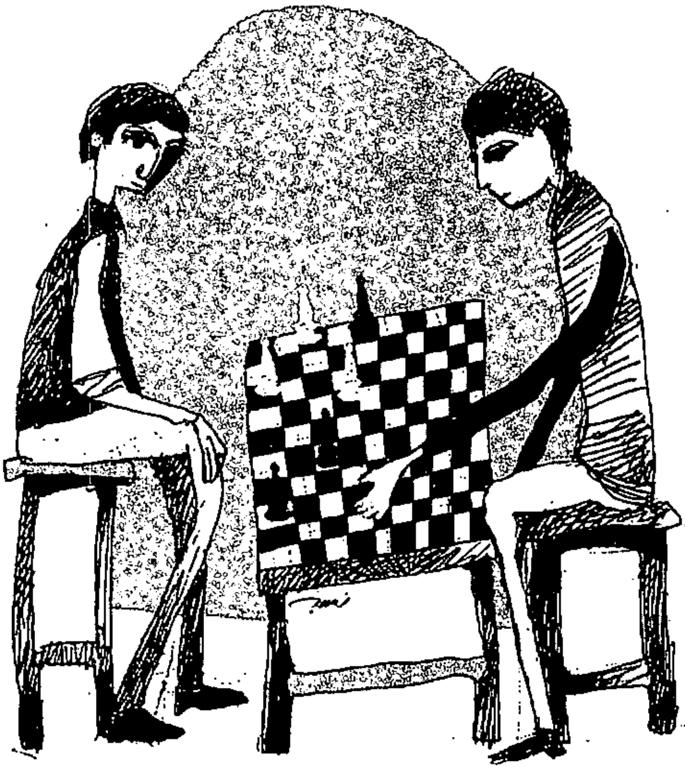
فرض می‌کنیم: $x+\frac{1}{x}=t$. با مجذور کردن دو طرف، به دست می‌آید:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=t^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

بنابراین، معادله‌ی مفروض چنین می‌شود:

$$2(t^2-2)-13t+24=0$$

یعنی معادله‌ای درجه دوم به صورت $3t^2-13t+20=0$ به دست می‌آید که جواب آن و درنتیجه جواب‌های x را می‌توان پیدا کرد.



پاسخ: $x_1=2+\sqrt{3}$ ، $x_2=2-\sqrt{3}$ ، $x_3=2$ ، $x_4=\frac{1}{2}$.

نمونه‌ی ۸. این معادله را حل کنید.

$$30x^8-73x^7+90x^6-292x^5+150x^4-$$
$$-292x^3+90x^2-73x+30=0$$

حل: دو طرف معادله را بر x^4 تقسیم می‌کنیم و از ضریب‌های برابر در معادله فاکتور می‌گیریم:

$$30\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-73\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+90\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-$$
$$-292\left(x+\frac{1}{x}\right)+150=0$$

اگر فرض کنیم: $x+\frac{1}{x}=t$ خواهیم داشت:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2;\quad x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t;$$
$$x^4+\frac{1}{x^4}=t^4-4t^2+2$$

و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$30t^4-73t^3-30t^2-73t+30=0$$

که خود یک معادله‌ی وارون درجه‌ی ۳ است. دو سمت معادله را بر t^2 تقسیم می‌کنیم: و سپس فرض می‌کنیم: $t+\frac{1}{t}=y$. سرانجام به این معادله‌ی درجه دوم می‌رسیم:

$$30y^2-73y-97=0$$

از این جا مقدار y و بعد به کمک آن مقدار t و سپس به یاری آن، مقدار x به دست می‌آید:

پاسخ: معادله‌ی مفروض، دو ریشه‌ی حقیقی $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ و شش ریشه‌ی موهومی دارد.

نمونه‌ی ۹. مطلوب است حل این معادله:

$$3ax^4-(2a^2+3a-2)x^3+(3a^2-4a-3)x^2+$$
$$+(2a^2+3a-2)x+2a=0$$

حل: این، یک معادله‌ی وارون منفی است و بنابراین، بعد از تقسیم دو سمت آن بر x^2 ، باید $x-\frac{1}{x}$ را مجهول تازه‌ای بگیریم. اگر فرض کنیم: $x-\frac{1}{x}=t$ ، سرانجام به این معادله می‌رسیم:

$$2at^2-(2a^2+3a-2)t+3(a^2-1)=0$$

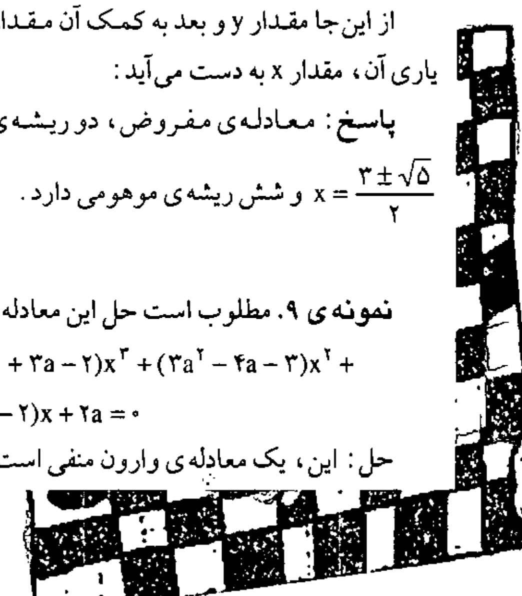
که برای t، دو جواب $\frac{3}{2}$ و $\frac{a^2-1}{a}$ را می‌دهد. درنتیجه با قراردادن این مقدارها در $x-\frac{1}{x}=t$ ، مقدارهای x به دست می‌آیند.

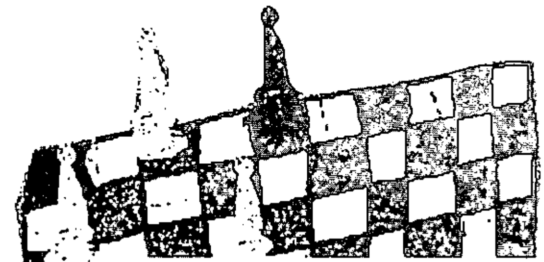
پاسخ: $x_1=2$ ، $x_2=-\frac{1}{2}$ ، $x_3=a$ ، $x_4=-\frac{1}{a}$.

حل چند معادله

نمونه‌ی ۱۰. معادله‌ی $x^5-5x^3+5x-1=0$ را حل کنید.

حل: سمت چپ معادله‌ی مفروض را، به ترتیب این طور





می‌نویسیم:

$$x^۵-۵x^۳+۵x-۱=(x^۵-۱)-۵x(x^۲-۱)$$
$$=(x-۱)(x^۴+x^۳-۴x^۲-۴x+۱)$$
$$=\frac{۱}{۴}(x-۱)\Big[(۴x^۴+۴x^۳+x^۲)-۶(۲x^۲+x)+۹$$
$$-۵(x^۲+۲x+۱)\Big]=\frac{۱}{۴}(x-۱)\Big[(۲x^۲+x-۳)^۲-۵(x+۱)^۲\Big]$$

پاسخ: $x_۱=۱$ و $x_{۲,۳}=\frac{۱}{۴}(-۱+\sqrt{۵}\pm\sqrt{۳۰+۶\sqrt{۵}})$

$$x_{۴,۵}=\frac{۱}{۴}(-۱-\sqrt{۵}\pm\sqrt{۳۰-۶\sqrt{۵}})$$

نمونه‌ی ۱۱. $\left[\frac{x^۳-۲}{۳}\right]=[x]$ ($[a]$، یعنی بزرگ‌ترین عدد درستی که از a تجاوز نکند.)

حل: روشن است، معادله برای مقدارهایی از x که در نابرابری‌های

$$\frac{x^۳-۲}{۳}\ge x+۱ \quad \text{و} \quad \frac{x^۳-۲}{۳}\le x-۱$$

صدق کند، جواب ندارد. بین جواب‌های نامعادله‌ی اول $x\ge ۳$ وجود دارد، زیرا داریم:

$$\frac{x^۳-۲}{۳}\ge x+۱\Rightarrow x^۳\ge ۳x+۵\Rightarrow$$
$$x^۲(x-۳)\ge -۳x^۲+۳x+۵$$

وقتی $x\ge ۳$ باشد، سمت چپ نابرابری غیرمنفی و سمت راست آن منفی است. بنابراین $x\ge ۳$ جزو جواب‌های معادله نیست. ولی $x\le -۲$ بین جواب‌های معادله‌ی دوم است، زیرا:

$$\frac{x^۳-۲}{۳}\le x-۱\Rightarrow x^۳\le ۳x-۱$$
$$\Rightarrow x^۲(x+۲)\le ۲x^۲+۲x-۱$$

وقتی $x\le -۲$ باشد، سمت راست نامعادله مثبت می‌شود، درحالی‌که سمت چپ آن مثبت نیست. بنابراین جواب‌های معادله‌ی مفروض را باید دربازه‌ی $-۲<x<۳$ جست‌وجو کرد. به این منظور باید این دستگاه‌ها را حل کرد:

$$۱)\begin{cases}-۲<\frac{x^۳-۲}{۳}<-۱\\ -۲<x<-۱\end{cases} \quad \text{و} \quad ۲)\begin{cases}-۱\le\frac{x^۳-۲}{۳}<۰\\ -۱\le x<۰\end{cases}$$

$$۳)\begin{cases}۰\le\frac{x^۳-۲}{۳}<۱\\ ۰\le x<۱\end{cases} \quad \text{و} \quad ۴)\begin{cases}۱\le\frac{x^۳-۲}{۳}<۲\\ ۱\le x<۲\end{cases}$$

$$۵)\begin{cases}۲\le\frac{x^۳-۲}{۳}<۳\\ ۲<x<۳\end{cases}$$

دستگاه (۳) دارای جواب نیست و بقیه‌ی دستگاه‌ها، این جواب‌ها را دارند:

$$-\sqrt[۳]{۴}<x<-۱ \quad \text{و} \quad -۱\le x<۰$$
$$\sqrt[۳]{۵}\le x<۲ \quad \text{و} \quad ۲\le x<\sqrt[۳]{۱۱}$$

پاسخ: $\sqrt[۳]{۵}<x<\sqrt[۳]{۱۱}$ و $-\sqrt[۳]{۴}\le x<۰$.

نمونه‌ی ۱۲: $\frac{۲x+۳y}{۲x}=\left[\frac{y^۲}{x^۲}\right]$

حل: $\frac{۳y}{۲x}$ باید عددی درست باشد. آن را k می‌نامیم و به این معادله می‌رسیم:

$$۱+k=\left[\frac{y^۲}{x^۲}\right]=\left[\frac{۴k^۲}{۹}\right]$$

و از آن‌جا:

$$۱+k\le\frac{۴k^۲}{۹}<۲+k$$

به دو نامعادله می‌رسیم:

$$\begin{cases}۴k^۲-۹k-۹\ge ۰\\ ۴k^۲-۹k-۱۸<۰\end{cases}$$

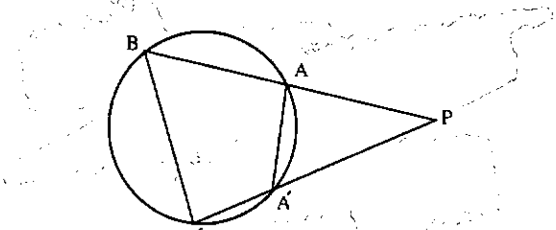
درنتیجه: $۳\le k<۳/۶$، چون k عددی درست است، پس: $k=۳$. سرانجام داریم:

$$y=۲x$$

با راهیان المپیادهای ریاضی ۳



غلامرضا یاسی‌پور



شکل ۱

قوت نقطه

نقطه‌ی P و دایره‌ای در یک صفحه را مشخص می‌کنیم. نقاط تقاطع خط دلخواه گذرنده از P را با این دایره، A و B می‌نامیم. حاصل ضرب PA·PB به قوت P نسبت به این دایره موسوم است. قوت مزبور مستقل از انتخاب خط AB است، زیرا اگر A′B′ خط گذرنده‌ی دیگری از P، با A′ و B′ بر دایره‌ی مورد بحث باشد، مثلث‌های PAA′ و PB′B متشابه‌اند (شکل ۱). درنتیجه:

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

مکان نقاط دارای قوت‌های برابر نسبت به دو دایره، عمود بر خط المرکزین آن دو دایره است. این خط به «**محور اصلی**»[۱] موسوم است. فرض می‌کنیم O_1 و O_2 مراکز و R_1 و R_2

شعاع‌های دو دایره باشند. به ازای نقطه‌ی P، با درنظر گرفتن خط PO_1، ملاحظه می‌کنیم که قوت P نسبت به دایره‌ی اول عبارت است از:

$$(PO_1 + R)(PO_1 - R)$$

به همین ترتیب، قوت P نسبت به دایره‌ی دوم برابر است با:

$$(PO_2 + R)(PO_2 - R)$$

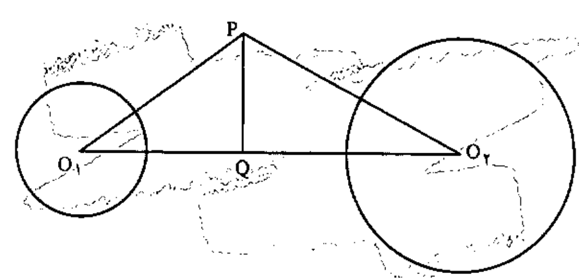
نتیجه می‌گیریم که:

$$PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

اگر Q را به عنوان تصویر P بر O_1O_2 اختیار کنیم (شکل ۲)، آن‌گاه کاربرد قضیه‌ی **فیثاغورس** در مورد مثلث‌های QPO_1 و PQO_2 مستلزم این است که:

$$QO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

درنتیجه، مکان هندسی موردنظر خط عمود بر O_1O_2 و گذرنده از نقطه‌ی Q واقع بر O_1O_2 است که فواصلش از مراکز دوایر در رابطه‌ی فوق صدق می‌کند. اگر دایره‌های مزبور متقاطع باشند، واضح است که محور اصلی شامل نقاط تقاطعشان خواهد بود.



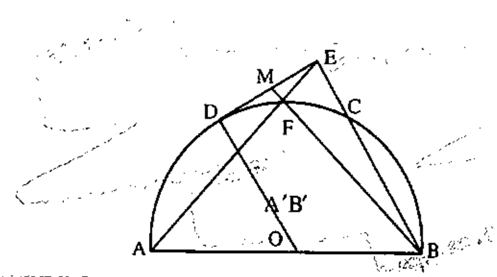
شکل ۲

در صورتی که سه دایره، با مراکز غیرواقع بر یک خط راست داشته باشیم، محور اصلی جفت اول با محور اصلی جفت دوم تقاطع می‌کند. در این صورت، نقطه تقاطعشان دارای قوت‌های برابر نسبت به سه دایره، و موسوم به «مرکز اصلی»[۲] است. درنتیجه، محورهای اصلی سه جفت دایره‌ی مورد بحث «همرس» یا «متقارب» هستند.

مفهوم قوت نقطه، چنان‌که مثال بعد نشان می‌دهد، می‌تواند در حل مسائل مفید باشد.

فرض می‌کنیم C نقطه‌ای بر نیم‌دایره‌ای به قطر AB، و D نقطه‌ی وسط کمان AC باشد. تصویر نقطه‌ی D بر خط BC را با E، و تقاطع خط AE با نیم‌دایره را با F نمایش می‌دهیم. ثابت کنید BF پاره‌خط DE را نصف می‌کند.

اثبات را با توجه به این مطلب آغاز می‌کنم که DE مماس بر دایره است (شکل ۳). برای ملاحظه‌ی درستی این موضوع، فرض می‌کنیم O مرکز دایره باشد. از آن‌جا که D وسط کمان AC است، $OD \perp AC$. زاویه‌ی BCA قائمه است، در نتیجه DE موازی AC است. این مستلزم آن است که $DE \perp OD$. بنابراین DE بر دایره مماس می‌شود.



شکل ۳

تقاطع BF و DE را با M نمایش می‌دهیم. نیاز است نشان دهیم:

$$EM=MD$$

با استفاده از قوت نقطه‌ی M نسبت به دایره، خواهیم داشت:

$$MD^2 = MF \cdot MB$$

از آن‌جا که AB قطر است، زاویه‌ی AFB قائمه است. بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی EMB، EF ارتفاع است. درنتیجه:

$$EM^2 = MF \cdot MB$$

بنابراین، $EM^2 = MD^2$ که نشان می‌دهد، M وسط DE است.

در ادامه مسائلی را آورده‌ایم که با استفاده از قوت نقطه و ویژگی‌های محور اصلی حل می‌شوند.

۱. فرض می‌کنیم P نقطه‌ای درون یک دایره و چنان باشد که سه وتر گذرنده از P به طول‌های برابر باشند. ثابت کنید P مرکز دایره است.

۲. در مورد نقطه‌ی P واقع در درون زاویه‌ی xOy، $A \in Ox$ و $B \in Oy$ را چنان بیابید که $P \in AB$ و $AP \cdot BP$ مینی‌مال باشد.

۳. صفحه‌ی π و دو نقطه‌ی A و B در دو طرف متقابل آن مفروضند. کره‌ای رسم کنید که شامل A و B باشد و با صفحه‌ی π در دایره‌ای با کم‌ترین شعاع ممکن تلاقی کند.

۴. فرض می‌کنیم در مثلث ABC، O، I و H، به ترتیب، مرکز دایره‌ی محیطی، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی، و محل برخورد ارتفاعات آن باشند. طول قطعات OI و OH را برحسب شعاع دایره‌ی محیطی، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی، و زاویه‌های مثلث ABC محاسبه کنید.

۵. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث، و A'، B' و C'، به ترتیب، نقاطی بر اضلاع BC، CA و AB باشند. نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABA' و $A'B'C'$ را با M، و نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABB' و $A'B'C'$ را با N نمایش می‌دهیم. به همین شیوه، نقاط P، Q، R و S را، به ترتیب، تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که:

الف) دست کم یکی از موارد زیر رخ می‌دهد:

۱. خط‌های سه‌گانه‌ی $(AB, A'M, B'N)$، $(BC, B'P, C'Q)$، $(CA, C'R, A'S)$، به ترتیب، در C''، A'' و B'' متقاربند.

۲. $A'M$ و $B'N$ موازی AB، یا $B'P$ و $C'Q$ موازی BC، یا $C'R$ و $A'S$ موازی CA هستند.

ب) وقتی که حالت (۱) رخ می‌دهد، نقاط A''، B'' و C'' بر یک استقامتند.

۶. در میان نقاط A، B، C و D هیچ سه نقطه‌ای بر یک استقامت نیستند. خطوط AB و CD در E، و BC و DA در F متقاطعند. ثابت کنید یا دوایر با اقطار AC، BD و EF از نقطه‌ای مشترک می‌گذرند، یا هیچ دو دایره‌ای از آن‌ها نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۷. فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دایره‌های هم‌مرکز باشند و C_2 درون C_1 قرار داشته باشد. از نقطه‌ی A بر C_1، مماس AB را بر C_2 رسم می‌کنیم $(B \in C_2)$. فرض می‌کنیم، C دومین نقطه‌ی تقاطع AB و C_1، و D وسط AB باشد. خط گذرنده از A دایره‌ی C_2 را در E و F چنان قطع می‌کند که عمودمنصف‌های DE و CF در نقطه‌ی M‌ی واقع بر AB متقاطع می‌شوند. نسبت $\frac{AM}{MC}$ را با دلیل به دست آورید.

۸. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی حادالزّوایا باشد. نقاط M و N را به ترتیب بر اضلاع AB و AC درنظر می‌گیریم. دایره‌های به قطرهای BN و CM در نقاط P و Q تقاطع می‌کنند. ثابت کنید P، Q، و H، محل تلاقی ارتفاعات مثلث، واقع بر یک استقامت هستند.

۹. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارضلعی محدب و محاط در نیم‌دایره‌ی s به قطر AB باشد. خطوط AC و BD در E، و خطوط AD و BC در F تقاطع می‌کنند. خط EF نیم‌دایره‌ی s را در G و خط AB را در H قطع می‌کند. ثابت کنید، E وسط پاره‌خط GH است، اگر و تنها اگر G وسط پاره‌خط FH باشد.

۱۰. فرض می‌کنیم، ABC یک مثلث و D و E، به ترتیب، بر اضلاع AB و AC چنان باشند که DE موازی BC باشد. و فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای درون مثلث ADE و F و





G، به ترتیب تقاطعات DE با خطوط BP و CP باشند. نیز فرض می‌کنیم، Q تقاطع دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های PDG و PFE باشد. ثابت کنید نقاط A، P، و Q بر یک خط مستقیم قرار دارند.

۱۱. فرض می‌کنیم A، B، C و D چهار نقطه‌ی متمایز واقع بر یک خط باشند. دایره‌های به قطرهای AC و BD در X و Y متقاطعند. خط XY با BC در Z تلاقی می‌کند. فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای بر خط XY، غیر از Z، باشد. خط CP دایره‌ی به قطر AC را در C و M، و خط BP دایره‌ی به قطر BD را در B و N قطع می‌کند. ثابت کنید، خطوط AM، DN، و XY متقاربند.

۱۲. نیم‌دایره‌ای به مرکز O و قطر AB را درنظر می‌گیریم. خطی AB را در M و نیم‌دایره را در C و D چنان قطع می‌کند که $MB<MA$ و $MD<MC$. دوایر محیطی مثلث‌های AOC و DOB بار دیگر در نقطهٔ K متقاطع می‌شوند. نشان دهید MK و KO متعامدند.

حل مسائل قوت نقطه

۱. فرض می‌کنیم AB، CD، و DE سه وتر گذرنده از نقطه‌ی P باشند. اگر قرار دهیم:

$AP = a$ و $BP = b$ و $CP = c$

$DP = d$ و $EP = e$ و $FP = f$

آن‌گاه با نوشتن توان نقطه‌ی موردنظر نسبت به دایره، به‌دست می‌آوریم:

$ab = cd = ef$

از آن‌جا که وترها به طول‌های برابرند، و نیز داریم که:

$a + b = c + d = e + f$

درنتیجه:

$\{a,b\} = \{c,d\} = \{e,f\}$

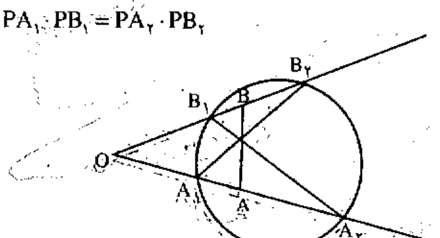
بدون از دست دادن عمومیت موضوع، می‌توان فرض کرد:

$a = c = e$

دایره‌ی اولیه و دایره‌ی به مرکز P و شعاع a، دارای نقاط مشترک A، C، و E هستند؛ درنتیجه باید منطبق شوند. در این صورت P مرکز آن دایره است.

۲. ادعا می‌کنیم، اگر A و B حاصل ضرب را مینی‌مم کنند، OAB مثلثی متساوی‌الساقین است. در واقع، اگر A_1 و B_1 دو نقطه‌ی دیگر بر Ox و Oy با $P \in A_1B_1$ باشند، $A_2 \in Ox$ و $B_2 \in Oy$ را چنان انتخاب می‌کنیم که: $P \in A_2B_2$ و $\angle B_2A_2O = \angle A_1B_1O$ (شکل۱). چهارضلعی $A_1A_2B_1B_2$ دوری است. درنتیجه با نوشتن قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی محیطی آن رابطه‌ی زیر را حاصل می‌کنیم

$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$



شکل ۴

از طرف دیگر، A و B بر وترهای $A_۱A_۲$ و $B_۱B_۲$ قرار دارند، درنتیجه داخل دایره‌اند. این مطلب مستلزم آن است که $PA \cdot PB < PA_۱ \cdot PB_۱$ که مینی‌مم بودن را به اثبات می‌رساند.
[Pimsner, M., Popa, S., Probleme de geometrie elementară (Problems in elementary geometry), Ed. Didactică si Pedagogică Bucharest, 1979.]

۳. فرض می‌کنیم، MN قطری از دایره‌ی تقاطع کره‌ی موردنظر با صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی P باشد که بر تقاطع AB با صفحه قرار دارد. قرار می‌دهیم:

$AP = a$ و $BP = b$ و $MP = x$ و $NP = y$

با نوشتن قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی عظیمه[3]ی مشخص شده با AB و MN، $xy = ab$ را به دست می‌آوریم. می‌خواهیم $x + y$ را هنگامی که حاصل ضرب xy مفروض است، مینی‌مم کنیم. با استفاده از نابرابری AM − GM نتیجه می‌گیریم که مینی‌مم $x + y$ برابر $۲\sqrt{ab}$ است که به ازای $x = y = \sqrt{ab}$ به دست می‌آید. به این ترتیب، کره‌ی موردنظر از A و B می‌گذرد و شامل دایره‌ای به مرکز P و شعاع $\sqrt{ab}$ است [با همکاری S. Savchev].

۴. فرض می‌کنیم، A' تقاطع دوم خط IA با دایره‌ی محیطی مثلث باشد. قوت نقطه‌ی I نسبت به این دایره عبارت است از:

$IA \cdot IA' = R^۲ - OI^۲$

که R شعاع دایره‌ی محیطی مورد بحث است. AI نیمساز، و فاصله‌ی I تا AB برابر r، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی است. بنابراین:

$AI = r / \sin(A / ۲)$

از طرف دیگر، در مثلث ATB داریم:

$\angle IA'B = \angle AA'B = \angle ACB$

$\angle IBA' = \angle ICA' = \angle BAC / ۲ + \angle ABC / ۲$

نتیجه می‌شود که ATB متساوی‌الساقین است، و از آن‌جا:

$IA' = BA'$.

قانون سینوس‌ها در مثلث ABA' رابطه‌ی زیر را می‌دهد:

$BA' = ۲R \sin(A / ۲)$

درنتیجه:

$$OI^۲ = R^۲ - IA \cdot BA' = R^۲ - (r / \sin(A / ۲)) \cdot ۲R \sin(A / ۲)$$
$$= R(R - ۲r)$$

اکنون نشان می‌دهیم که:

$OH^۲ = R^۲(۱ - ۸\cos A \cos B \cos C)$

اثبات را وقتی زاویه‌ی A حادّه است انجام می‌دهیم. حالات قائمه یا منفرجه بودن مشابه است. فرض می‌کنیم، A'' تقاطع دوم خط AH با دایره‌ی محیطی باشد. با نوشتن قوت نقطه‌ی H نسبت به این دایره به دست می‌آوریم:

$HA \cdot HA'' = R^۲ - OH^۲$

توجه داشته باشید، از آن‌جا که:

$\angle BHC = ۱۸۰^\circ - \angle BAC$

A'' قرینه‌ی A نسبت به ضلع BC است. بنابراین:

$HA'' = ۲HD$

که در آن D تقاطع AH با BC است.

اکنون طول‌های AH و HD را محاسبه می‌کنیم. اگر تقاطع BH و AC را با E نمایش دهیم، آن‌گاه در مثلث ABE:

$AE = AB \cos A = ۲R \sin C \cos A$

و در مثلث AHE:

$$AH = \frac{AE}{\sin C} = ۲R \cos A$$

و

$$HD = AD - AH = ۲R \sin B \sin C - ۲R \cos A = ۲R \sin B \sin C + ۲R \cos(B + C) = ۲R \cos B \cos C$$

در نتیجه:

$$OH^۲ = R^۲ - HA \cdot HA'' = R^۲ - ۲R \cos A \cdot ۴R \cos B \cos C$$
$$= R^۲(۱ - ۸ \cos A \cos B \cos C)$$

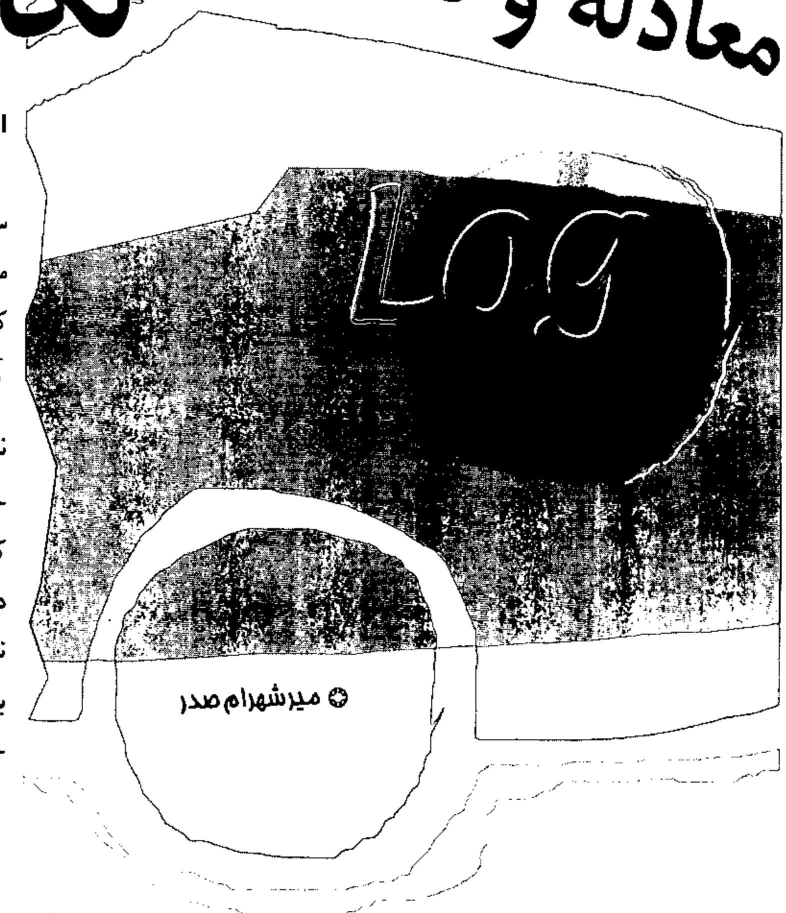
حل مسائل ۵ الی ۱۲ را در شماره بعد ملاحظه بفرمایید.



زیرنویس

1. radical aris
2. radical center
3. great circle
4. coaxial

معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی



✪ میرشهرام صدر

اشاره:

با تعریف تابع لگاریتمی در سال دوم آشنا شده‌اید. برای مثال، می‌دانید که برای پیدا کردن دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\log_{2}^{(x+1)}-3}$ باید نامعادله‌ی $\log_{2}^{(x+1)}-3\geq 0$ را حل کنید. اکنون هدف این مقاله کامل‌تر کردن اطلاعات شما درباره‌ی معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی است تا بتوانید این گونه مسائل را بهتر حل کنید.

الف. معادله‌های لگاریتمی

چنان‌که می‌دانید، عمل جمع، عمل معکوسِ تفریق و عمل ضرب، عمل معکوسِ تقسیم است. اکنون عمل لگاریتم را عمل معکوسِ توان درنظر می‌گیریم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف: فرض کنیم $0<a\neq 1$ یک عدد حقیقی مثبت و ثابت باشد. تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ را تابع معکوسِ تابع نمایی $y=a^x$ می‌نامیم.

معادله‌ای را که در آن، مجهول در عبارتی لگاریتمی آمده باشد، معادله‌ی لگاریتمی می‌نامیم. برای حل این گونه معادله‌ها، از روش‌های ذیل استفاده می‌کنیم:

۱. به کمک تعریف لگاریتم

این روش برای حل معادله‌ای به کار می‌رود که در یک طرف آن یک عبارت لگاریتمی و در طرف دیگر، یک عدد وجود داشته باشد:

$$\log_a p(x)=b \Leftrightarrow p(x)=a^b$$

در معادله‌ی بالا، $p(x)$ عبارتی جبری بر حسب متغیر x است.

تذکر مهم

قبل از حل معادله‌ی لگاریتمی، ابتدا دامنه‌ی تعریف آن را به‌دست می‌آوریم و بعد از حل معادله، جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی تعریف صدق کنند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log_{۲}(x+۱)=۳$ **ب)** $\log_{۲}(۳\log_{۳}^{(x-۱)})=۲$

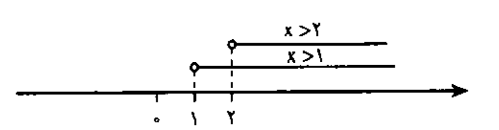
حل: الف) ابتدا دامنه را می‌یابیم، سپس معادله را حل می‌کنیم:

$x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱ \Rightarrow D=(-۱,+\infty)$

$\log_{۲}^{x+۱}=۳ \Rightarrow x+۱=۲^{۳} \Rightarrow x=۷\in D$ قابل قبول

ب) ابتدا دامنه‌ی تعریف را پیدا کرده، و سپس معادله را حل می‌کنیم. می‌دانیم که $\log_{۳}^{۱}=۰$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\log_{۳}^{(x-۱)}>۰ \Rightarrow \log_{۳}^{(x-۱)}>\log_{۳}^{۱} \Rightarrow x-۱>۱ \Rightarrow x>۲\\ x-۱>۰ \Rightarrow x>۱\end{cases}$$



$D=(۲\ ,\ +\infty)$

بنابر تعریف لگاریتم:

$$\log_{۲}(۳\log_{۳}^{(x-۱)})=۲ \Rightarrow ۳\log_{۳}(x-۱)=۳^{۲}$$
$$\Rightarrow \log_{۳}(x-۱)=۳$$
$$\Rightarrow x-۱=۳^{۳} \Rightarrow x=۲۸\in D$$ قابل قبول

۲. به کمک خواص لگاریتم

از این روش برای حل معادله‌هایی استفاده می‌کنیم که در آن‌ها چند عبارت لگاریتمی وجود دارد. ابتدا عبارت‌های لگاریتمی را ساده می‌کنیم و سپس به معادله‌هایی مانند $\log_a p(x)=\log_a q(x)$ (۱) یا $\log_a p(x)=b$ (۲) می‌رسیم که برای حل هر کدام، به صورت‌های زیر عمل می‌کنیم ($p(x)$ و $q(x)$ عبارت‌هایی جبری برحسب متغیر x هستند):

$\log_a p(x)=\log_a q(x) \Rightarrow p(x)=q(x)$ (۱)

$\log_a p(x)=b \Rightarrow p(x)=a^{b}$ (۲)

قبل از حل چند مثال، خواص لگاریتم را جهت یادآوری در ذیل می‌آوریم.

۱. $(a>۰,a\neq ۱)\log_{a}^{۱}=۰$

۲. $(a>۰)\log_{a}^{a}=۱$

۳. $(a>۰,a\neq ۱)a^{\log_{a}x}=x$

۴. $\log_{a}^{xy}=\log_{a}^{x}+\log_{a}^{y}$
$(x>۰,y>۰,a>۰,a\neq ۱)$

۵. $\log_{a}^{\frac{x}{y}}=\log_{a}^{x}-\log_{a}^{y}$
$(x>۰,y>۰,a>۰,a\neq ۱)$

۶. $\log_{a^{n}}^{x^{m}}=\frac{m}{n}\log_{a}^{x}$
$(x^{m}>۰,a^{n}>۰,a^{n}\neq ۱)$

۷. $\log_{b}^{a}=\frac{۱}{\log_{a}^{b}}$
$(a>۰,b>۰,a\neq ۱,b\neq ۱)$

۸. $\log_{b}^{a}=\frac{\log_{x}^{a}}{\log_{x}^{b}}$
$(a>۰,b>۰,b\neq ۱,x>۰,x\neq ۱)$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log(x+۲)+\log(x-۲)=\log x+\log ۳$

ب) $\log_{۲}(x+۱۴)+\log_{۲}(x+۲)=۶$

ج) $\log(x+۱)-\frac{۱}{۲}\log(x-۱)=\log ۳$

د) $\log_{۲}(۹-۲^{x})=۱۰^{\log(۳-x)}$

حل:الف)

$$\begin{cases}x+۲>۰ \Rightarrow x>-۲\\ x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \Rightarrow D=(۲,+\infty)\\ x>۰ \Rightarrow x>۰\end{cases}$$

$$\log(x+2)+\log(x-2)=\log x+\log 3$$

$$\Rightarrow \log(x+2)(x-2)=\log x\times 3$$

$$\Rightarrow x^2-4=3x \Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4\in D & \text{قابل قبول} \\ x=-1\notin D & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} x+14>0 \Rightarrow x>-14 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \end{cases} \Rightarrow x>-2 \Rightarrow D=(-2,\infty)$$

$$\log_2^{(x+14)}+\log_2^{(x+2)}=6 \Rightarrow \log_2(x+14)(x+2)=6$$

$$\Rightarrow (x+14)(x+2)=2^6$$ بنابه تعریف لگاریتم:

$$\Rightarrow x^2+16x-36=0 \Rightarrow (x+18)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-18\notin D & \text{قابل قبول} \\ x=2\in D & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

ج)

$$\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1 \Rightarrow D=(1,+\infty)$$

$$\log(x+1)-\frac{1}{2}\log(x-1)=\log 3$$

$$\Rightarrow \log(x+1)-\log(x-1)^{\frac{1}{2}}=\text{iog}\ 3$$

$$\Rightarrow \log\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=\log 3$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}=3$$

معادله‌ی به‌دست آمده، معادله‌ای گنگ است که برای حل آن ابتدا دامنه‌اش را پیدا می‌کنیم:

$$x-1>0 \Rightarrow x>1$$

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right)^2=3^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x-1}=9 \Rightarrow x^2+2x+1=9x-9$$

$$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-2)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2\in D & \text{قابل قبول} \\ x=5\in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

د)

$$\begin{cases} 9-2^x>0 \Rightarrow 2^x<9 \Rightarrow \log 2^x<\log 9 \Rightarrow x\log 2<\log 9 \\ \Rightarrow x<\dfrac{\log 9}{\log 2} \Rightarrow x<3/17 \\ 3-x>0 \Rightarrow x<3 \end{cases}$$

چون

$$\frac{\log 9}{\log 2}=\frac{\log 3^2}{\log 2}=\frac{2\log 3}{\log 2}\simeq\frac{2\times 0/4771}{0/3010}\simeq 3/7$$

بنابراین: $D=(-\infty,3)$

$$\log_2^{(9-2^x)}=10^{\log(3-x)} \Rightarrow \log_2^{(9-2^x)}=(3-x)$$

$$\Rightarrow 2^{(3-x)}=9-2^x \Rightarrow \frac{2^3}{2^x}=9-2^x$$

دو طرف معادله را در 2^x ضرب می‌کنیم:

$$2^x\left(\frac{2^3}{2^x}\right)=2^x(9-2^x) \Rightarrow 2^3=9\times 2^x-(2^x)^2$$

با فرض این‌که $t=2^x$، خواهیم داشت:

$$t^2-9t+8=0 \Rightarrow (t-1)(t-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0 & \text{قابل قبول} \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۳. تغییر متغیر

در معادله‌های لگاریتمی که برای مثال، $\log_a p(x)$ در آن‌ها به کار رفته باشد، و علاوه بر آن، عبارت $(\log_a p(x))^n$ نیز موجود باشد، با فرض $t=\log_a p(x)(1)$، معادله‌ی لگاریتمی را تغییر متغیر می‌دهیم تا به معادله‌ای غیرلگاریتمی برسیم. سپس با حل این معادله مقادیر t به دست می‌آیند که با

جایگزینی آن‌ها در رابطه‌ی (۱)، مقادیر مجهولات به‌دست می‌آیند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $(\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0$

ب) $3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^{8x} + 1 = 0$

حل:

الف) $x > 0 \Rightarrow D = (0, +\infty)$

$$(\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \Rightarrow (\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$$

با فرض t=logx خواهیم داشت:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 \in D & \text{قابل قبول} \\ t = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} \log_2^x > 0 \Rightarrow \log_2^x > \log_2^1 \Rightarrow x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D = (1, +\infty)$$

$$3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^{8x} + 1 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{\log_2^x} - (\log_2^8 + \log_2^x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\log_2^x} - \log_2^x - 2 = 0$$

با فرض این که $t = \log_2^x$، خواهیم داشت:

$$3\sqrt{t} - t - 2 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{t} = t + 2 \Rightarrow (3\sqrt{t})^2 = (t+2)^2$$

$$\Rightarrow 9t = t^2 + 4t + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (t-4)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log_2^x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \in D & \text{قابل قبول} \\ t = 4 \Rightarrow \log_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۴. لگاریتم گرفتن از دو طرف معادله

برای حل معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول به صورت عبارت لگاریتمی و در توان باشد، از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $x^{\log x} = 1000x^2$

ب) $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

حل:

الف) $x > 0 \Rightarrow D = (0, +\infty)$

$$x^{\log x} = 1000x^2 \Rightarrow \log(x^{\log x}) = \log(1000x^2)$$

$$\Rightarrow \log x . \log x = \log 1000 + \log x^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 3 + 2\log x$$

با فرض این که $t = \log x$، خواهیم داشت:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \notin D & \text{غیرقابل قبول} \\ t = 3 \Rightarrow \log x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1000 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

ب) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D = (-1, +\infty)$

$$(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$$

$$\Rightarrow \log\left[(x+1)^{\log(x+1)}\right] = \log[100(x+1)]$$

$$\Rightarrow \log(x+1) . \log(x+1) = \log 100 + \log(x+1)$$

$$\Rightarrow \left(\log(x+1)\right)^2 - \log(x+1) - 2 = 0$$

با فرض این که $t = \log(x+1)$، خواهیم داشت:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$t = -1 \Rightarrow \log(x+1) = -1 \Rightarrow x + 1 = 10^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{10} - 1 = \frac{-9}{10} \in D \quad \text{قابل قبول}$$

$$t = 2 \Rightarrow \log(x+1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 10^2 \Rightarrow x = 99 \in D \quad \text{قابل قبول}$$

۵. استفاده از مبنای جدید در لگاریتم

در معادله‌های لگاریتمی که مبناهای عبارت‌های لگاریتمی در آن‌ها با هم برابر نیستند، با استفاده از دستور $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ مبناها را یکسان و سپس معادله را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{\log_x^{5\sqrt{5}} + \log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}} = \sqrt{6}$

ب) $1 + \log_2(x-1) = \log_{(x-1)}^4$

حل:

الف)

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$\log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{\log_x^{5\sqrt{5}} + \log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}} = \sqrt{6} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{\frac{\log_{\sqrt{5}}^{5\sqrt{5}}}{\log_{\sqrt{5}}^x} + 3} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x \cdot \sqrt{3\log_{\sqrt{5}}^x + 3} = \sqrt{6}$$

با فرض این که $t = \log_{\sqrt{5}}^x$، خواهیم داشت:

$$t\sqrt{3t+3} = \sqrt{6} \Rightarrow t^2(3t+3) = 6 \Rightarrow 3t^2(t+1) = 6$$

$$\Rightarrow t^3 + t^2 - 2 = 0 \Rightarrow (t^3 - 1) + (t^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+1) + (t-1)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+1+t+1) = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2+2t+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-1 = 0 \Rightarrow t = 1 \\ t^2+2t+2 = 0 \ , \ \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \ \text{این معادله ریشه ندارد} \end{cases}$$

$t = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}^x = 1 \Rightarrow x = \sqrt{5}^1 \Rightarrow x = \sqrt{5} \in D$ قابل قبول

ب)

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x-1 \neq 1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D = (1,2) \cup (2,+\infty)$$

$$1 + \log_2^{(x-1)} = \log_{(x-1)}^4 \Rightarrow 1 + \log_2^{(x-1)} = \frac{\log_2^4}{\log_{(x-1)}^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2^{(x-1)} = 2\log_2^{(x-1)}$$

با فرض $t = \log_2^{(x-1)}$، خواهیم داشت:

$$1 + t = 2t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2^{(x-1)} = 1 \Rightarrow x - 1 = 2^1$$

$\Rightarrow x = 3 \in D$ قابل قبول

ب. نامعادله‌های لگاریتمی

نامعادله‌های لگاریتمی را به دو دسته‌ی کلی، تقسیم‌بندی و روش حل هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم:

دسته‌ی اول. برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) > \log_{f(x)} q(x)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$، عبارت‌های جبری بر حسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ p(x) < q(x) \\ p(x) > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ p(x) > q(x) \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) \geq \log_{f(x)} q(x)$$

کافی است، اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ p(x) \leq q(x) \\ p(x) > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ p(x) \geq q(x) \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

دسته‌ی دوم. برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) < \log_{f(x)} q(x)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$، عبارت‌های جبری بر حسب متغیر x هستند، کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ p(x) > q(x) \\ q(x) > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ p(x) < q(x) \\ p(x) > 0 \end{cases}$$

به طور مشابه، برای حل نامعادله‌ی زیر:

$$\log_{f(x)} p(x) \leq \log_{f(x)} q(x)$$

کافی است اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه زیر را

به دست آوریم:

$$\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ p(x)\geq q(x) \\ q(x)>0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x)>1 \\ p(x)\leq q(x) \\ p(x)>0 \end{cases}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\log(x^2-2x-3)\geq 0$

۲) $\log_7 \frac{x-2}{x-3}<0$

۳) $\log_2(2x-1)\geq -2$

۴) $\log_{\frac{1}{11}}(2x+21)<-2$

۵) $\log_x(x+1)\leq \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$

حل:

.۱

$$\log(x^2-2x-3)\geq 0 \Rightarrow \log_{10}(x^2-2x-3)\geq \log_{10}1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10>1 \\ x^2-2x-3\geq 1 \Rightarrow x^2-2x-4\geq 0 \\ 1>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D=\left(-\infty,1-\sqrt{5}\right]\cup\left[1+\sqrt{5},\infty\right)$$

.۲

$$\log_7\frac{x-2}{x-3}<0 \Rightarrow \log_7\frac{x-2}{x-3}<\log_7 1 \Rightarrow \begin{cases} 7>1 \\ \frac{x-2}{x-3}<1 \\ \frac{x-2}{x-3}>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3}<0 \Rightarrow x<3 \Rightarrow x\in(-\infty,3) \\ x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D=(-\infty,2)$$

.۳

$$\log_2(2x-1)\geq -2 \Rightarrow \log_2(2x-1)\geq \log_2 2^{-2} \Rightarrow \begin{cases} 2>1 \\ (2x-1)\geq 2^{-2} \\ 2^{-2}=\frac{1}{4}>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2x-1)\geq \frac{1}{4} \Rightarrow x\geq \frac{5}{8} \Rightarrow D=\left[\frac{5}{8},\infty\right)$$

.۴

$$\log_{\frac{1}{11}}(2x+21)<-2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{11}}(2x+21)<\log_{\frac{1}{11}}\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<\frac{1}{11}<1 \\ (2x+21)>\left(\frac{1}{11}\right)^{-2} \Rightarrow 2x+21>121 \Rightarrow x>50 \Rightarrow D=(50,\infty) \\ \left(\frac{1}{11}\right)^{-2}=121>0 \end{cases}$$

.۵

$$\log_x(x+1)\leq \log_{\frac{1}{x}}(2-x) \Rightarrow \log_x(x+1)\leq -\log_x(2-x)$$

$$\log_x(x+1)\leq \log_x(2-x)^{-1} \Rightarrow \log_x(x+1)\leq \log_x\frac{1}{2-x}$$

برای یافتن مجموعه جواب نامعادله ی بالا، باید اجتماع مجموعه جواب‌های دو دستگاه را به دست آوریم:

$$\begin{cases} x>1 \\ x+1\leq \frac{1}{2-x} \\ x+1>0 \end{cases} (1) \quad \text{و} \quad \begin{cases} 0<x<1 \\ x+1\geq \frac{1}{2-x} \\ \frac{1}{2-x}>0 \end{cases} (2)$$

ابتدا دستگاه (۱) را حل می‌کنیم:

$$(1)\begin{cases} x+1-\frac{1}{2-x}<0 \Rightarrow \\ x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} \text{ یا } \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \le x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_1 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$$

اکنون مجموعه جواب دستگاه (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+1-\dfrac{1}{2-x} \ge 0 \\ x < 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ یا } x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

(۲)

$$\Rightarrow D_2 = (0,1)$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow D = (0,1) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$$

تمرین:

نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \ge 0$

۲) $\log_2(x^2-4x-5) \le 4$

۳) $\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2-2}-x+1) < 0$

۴) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{x^2}{6}-x+\frac{35}{24}) \ge 0$

۵) $\sqrt{4-x^2}(\log_3 \frac{x+1}{x}+2) \le 0$

۶) $|\log_2(x^2+x-4)| < 1$

۷) $\log_{3x+5}(9x^2+8x+8) > 2$

۸) $\log_{0.1}(x^2+x+2) > \log_{0.1}(x+3)$

۹) $5\log_x(\frac{8-12x}{x-6}) \ge 25$

۱۰) $\log_{(x-\frac{9}{2})} \frac{x+4}{2x-6} \le \log_{(x-\frac{9}{2})}(x-5)$

معادله‌های زیر را حل کنید.

۱. $4^{(\log_2(x-3)+\log_2^5)} = 50$

۲. $\log \frac{x+5}{2} = \frac{1}{2}\log(2x-1)$

۳. $\log_x^{\sqrt{5}} + \log_x^{5x} = \frac{9}{4} + (\log_x^{\sqrt{5}})^2$

۴. $2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$

۵. $\log_2^{(x+4)} + \log_{\sqrt{2}}^{(x+4)} + \log_{\sqrt[4]{2}}^{(x+4)} = 7$



معماهای فکری و منطقی

چهار گاو سیاه و سه گاو قهوه‌ای در پنج روز به اندازه‌ی سه گاو سیاه و پنج گاو قهوه‌ای در چهار روز شیر می‌دهند.

کدام نوع گاو شیر بیش‌تری می‌دهد؛ سیاه یا قهوه‌ای؟

(مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا – سال ۲۰۰۰)



مسابقه های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا

هوشنگ شرقی

از این شماره، سلسله مطالبی درباره‌ی مسابقه های ریاضی کشورهای مختلف دنیا خواهیم داشت. مسابقه هایی موردنظر ماست که مسائل آن‌ها در حد متوسطی باشد، تا مورد استفاده‌ی اکثر دانش‌آموزان قرار گیرند. در عین حال، بین سؤالات آن‌ها، مسائل رقابتی و چالش‌برانگیز[1] هم باشد؛ به طوری که برای علاقه‌مندان رشته‌ی ریاضی هم جالب توجه باشند. نمونه های بسیاری از مسابقات ریاضی با این ویژگی‌ها وجود دارند که از این شماره به معرفی آن‌ها می پردازیم. پاسخ و حل تشریحی مسائل را نیز در همان شماره می‌آوریم. همچنین، سعی می کنیم شرایط مسابقه و اطلاعات جانبی آن را نیز به علاقه‌مندان ارائه دهیم. در این شماره، به مسابقه های آزاد ریاضی کانادا در سال ۲۰۰۰ میلادی می پردازیم.

سؤال‌ها در دو بخش الف و ب ارائه شده‌اند. در بخش الف، هشت سؤال وجود دارد و هر سؤال دارای ۵ امتیاز است. با ارائه‌ی جواب هر سؤال (بدون نیاز به محاسبه) می‌توانید امتیاز کامل را بگیرید. در بخش ب، چهار سؤال وجود دارد که هر سؤال آن دارای ۱۰ امتیاز است و باید راه‌حل کامل ارائه شود.

توجه به نکات زیر برای شرکت کنندگان الزامی است.

۱. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

۲. مدت امتحان $2\frac{1}{2}$ ساعت است.



قسمت الف

۱. عملگر «Δ» با رابطه‌ی $a\Delta b = 1-\frac{a}{b}, b \neq 0$ بیان شده است. مقدار $(3\Delta 4)\Delta(1\Delta 2)$ چیست؟

۲. دنباله‌ی عددی... و ۵۴ و ۴۵ و ۳۶ و ۲۷ و ۱۸ و ۹، شامل مضرب‌های متوالی ۹، داده شده است. از این دنباله، دنباله‌ی دیگری با ضرب جملات به صورت متوالی در ۱- به دست می‌آید: ... و ۵۴ و ۴۵- و ۳۶ و ۲۷- و ۱۸ و ۹- اگر مجموع نخستین n جمله‌ی این دنباله مساوی ۱۸۰ باشد، n را به دست آورید.

۳. نماد $n!$ برای معرفی حاصل ضرب زیر:

$$n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)$$

به کار می‌رود. برای **مثال:** $4!=(4)(3)(2)(1)$

n را طوری به دست آورید که داشته باشیم:

$$n!=(2^{15})(3^{6})(5^{3})(7^{2})(11)(13)$$

۴. نماد $\lfloor x \rfloor$ به معنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است. برای مثال، $\lfloor 5/7 \rfloor = 5, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor 4 \rfloor = 4$

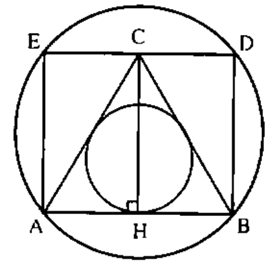
مقدار مجموع زیر را به دست آورید:

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\lfloor\sqrt{4}\rfloor+\cdots\lfloor\sqrt{48}\rfloor+\lfloor\sqrt{49}\rfloor+\lfloor\sqrt{50}\rfloor$$

۵. چند عدد طبیعی پنج رقمی می‌توان نوشت که حاصل ضرب ارقام آن‌ها مساوی ۲۰۰۰ باشد؟

۶. معادله‌ی $2^{6\sin x} = 4(16^{\sin^2 x})$ را برای $0 \le x \le 2\pi$ حل کنید.

۷. دنباله‌ی عددهای $..., a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}$ و ... با رابطه‌ی $a_n-(n+1)a_{2-n}=(n+3)^2$ تعریف شده است. مقدار a_0 را محاسبه کنید.



۸. در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و شعاع دایره‌ی محاطی آن مساوی ۱ است. دایره‌ی بزرگ‌تری نیز رسم شده است که از رئوس مستطیل ABDE می‌گذرد. طول قطر دایره‌ی بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

قسمت ب

۱. مثلث ABC با رئوس (۰ و ۰)A و (۰ و ۹)B و (۶ و ۰)C داده شده است. نقاط P و Q روی ضلع AB قرار دارند، به طوری که: AP=PQ=QB. به طریق مشابه، نقاط R و S روی AC واقعند، به قسمی که: AR=RS=SC. رأس C را به نقاط P و Q همچنین، رأس B را به نقاط R و S وصل می‌کنیم.

الف) معادله‌ی خط راستی را که از نقاط R و B می‌گذرد، بنویسید.

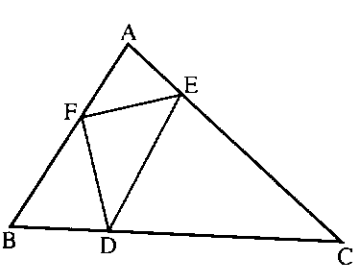
ب) معادله‌ی خط راستی که از نقاط P و C می‌گذرد را بنویسید.

ج) پاره‌خط‌های PC و RB در نقطه‌ی X و پاره‌خط‌های QC و SB در نقطه‌ی Y متقاطع هستند. ثابت کنید، نقاط A، X و Y روی یک خط راست واقعند.

۲. در مثلث ABC، نقاط E ،D و F به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB واقعند؛ به طوری که: $\angle AFE = \angle BFD$، $\angle BDF = \angle CDE$ و $\angle CED = \angle AEF$.

الف) ثابت کنید: $\angle BDF = \angle BAC$

ب) اگر AB=۵، BC=۸ و CA=۷، طول BD را بیابید.



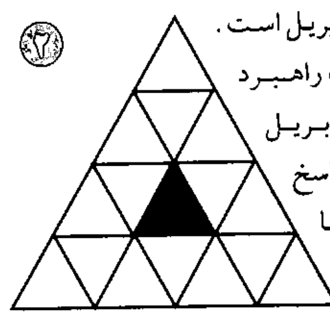
۳. الف) آلفونس و بریل بازی خود را از شکل هندسی مقابل شروع می‌کنند. آلفونس آغازگر بازی است و شکل اولیه را در امتداد یکی از خطوط راست برش می‌دهد. وی قطعه‌ای را که شامل مثلث سیاه‌رنگ است، به بریل می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌اندازد. سپس بریل همین کار را می‌کند و قطعه‌ی شامل مثلث سیاه‌رنگ را به آلفونس می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌اندازد. این عمل تا آن‌جا ادامه می‌یابد که مثلث سیاه به یک نفر برسد و او برنده‌ی مسابقه است.



۱

با استدلال، نشان دهید که همواره یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد. (بریل همواره می‌تواند برنده باشد. مترجم)

ب) آلفونس و بریل، اکنون بازی دیگری را با همان قاعده‌ی بازی الف و این بار با شکل ۲ انجام می‌دهند و آغازگر بازی بریل است.



۲

آیا باز هم یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد؟ (پاسخ خود را با استدلال دقیق ارائه دهید.)

۴. دنباله‌ی $t_۱, t_۲, t_۳, \ldots t_n$ با n جمله و با قانون‌های $t_۱=۱$ ، $t_۲=۴$ و $t_k = t_{k-۱} + t_{k-۲}$ و n و ... و۴و۳=k داده شده است. فرض کنید که T مجموعه‌ی جملات این دنباله باشد؛ یعنی $T = \{t_۱, t_۲, \ldots, t_n\}$

الف) چند عدد صحیح مثبت وجود دارد که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً دو جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟

ب) چند عدد صحیح مثبت وجود دارد که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً سه جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟

حل مسائل مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا (۲۰۰۰)

قسمت الف

۱.

$$a\Delta b = ۱ - \frac{a}{b} \Rightarrow ۱\Delta ۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}, ۳\Delta ۴ = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow$$

$$(۱\Delta ۲)\Delta(۳\Delta ۴) = (\frac{۱}{۲})\Delta(\frac{۱}{۴}) = ۱ - \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}} = ۱ - ۲ = -۱$$

۲. با کمی دقت درمی‌یابید که مجموع هر دو جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی جدید مساوی ۹ است:

$-۹+۱۸=۹$ و $-۲۷+۳۶=۹$ و $-۴۵+۵۹=۹$ و ...

وقتی مجموع n جمله مساوی ۱۸۰ است، در نتیجه باید ۲۰ جفت از این دو جمله‌ها با هم جمع شده باشند؛ یعنی $n=۴۰$

۳. روش اول:

$$(۲^{۱۵})(۳^{۶})(۵^{۳})(۷^{۲})(۱۱)(۱۳) = ۱\times ۲\times ۳\times ۲^{۲}\times ۵\times (۲\times ۳)\times (۷)(۲^{۳})(۳^{۲})\times$$
$$(۲\times ۵)\times (۱۱)\times (۲^{۲}\times ۳)\times (۱۳)\times (۲\times ۷)\times (۳\times ۵)\times (۲^{۴}) = ۱۶! \Rightarrow n=۱۶$$

روش دوم: چون توان ۷ در $n!$، ۲ است، پس: $۲۱ > n \geq ۱۴$. و چون عامل ۱۷ در $n!$ وجود ندارد، پس: $۱۶ \geq n \geq ۱۴$. و با توجه به توان ۵ که مساوی سه است، پس: $۱۶ \geq n \geq ۱۵$؛ یعنی ۱۶ یا ۱۵=n و با توجه به توان ۲ درمی‌یابیم که: $n=۱۶$.

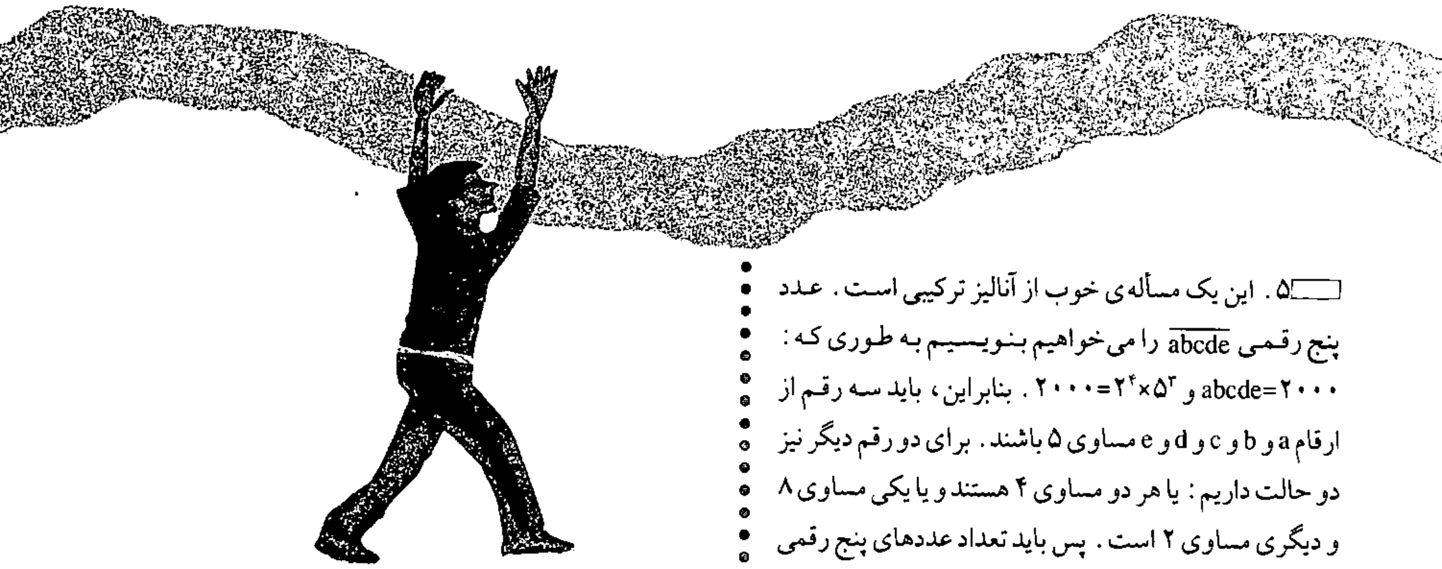
۴.

$$\lfloor\sqrt{۱}\rfloor + \lfloor\sqrt{۲}\rfloor + \lfloor\sqrt{۳}\rfloor + \lfloor\sqrt{۴}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{۴۸}\rfloor + \lfloor\sqrt{۴۹}\rfloor + \lfloor\sqrt{۵۰}\rfloor$$
$$= (۱+۱+۱) + (۲+۲+۲+۲+۲) + (۳+۳+۳+۳+۳+۳+۳) + \cdots$$

یعنی سه عدد ۱، پنج عدد ۲، هفت عدد ۳، نه عدد ۴، یازده عدد ۵ و سیزده عدد ۶، تا $\lfloor\sqrt{۴۸}\rfloor$ داریم. همچنین، $\lfloor\sqrt{۵۰}\rfloor = \lfloor\sqrt{۴۹}\rfloor = ۷$ بنابراین، مجموع فوق برابر است با:

$$۱\times ۳+۲\times ۵+۳\times ۷+۴\times ۹+۱۱\times ۵+۱۳\times ۶+۲\times ۷=$$

$$۳+۱۰+۲۱+۳۶+۵۵+۷۸+۱۴=۲۱۷$$



۵. این یک مسأله‌ی خوب از آنالیز ترکیبی است. عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ را می‌خواهیم بنویسیم به طوری که: abcde=۲۰۰۰ و ۲۰۰۰=$۲^۴×۵^۳$. بنابراین، باید سه رقم از ارقام a و b و c و d و e مساوی ۵ باشند. برای دو رقم دیگر نیز دو حالت داریم: یا هر دو مساوی ۴ هستند و یا یکی مساوی ۸ و دیگری مساوی ۲ است. پس باید تعداد عددهای پنج رقمی با سه رقم پنج و دو رقم چهار (مانند ۵۵۴۴۵)، و یا سه رقم ۵ و یک رقم ۸ و یک رقم ۲ (مانند ۵۸۵۲۵) را بشماریم.

می‌دانیم که تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز مساوی n! است، ولی اگر تعدادی از این اشیا تکراری باشند، تعداد جایگشت‌های آن‌ها از تقسیم n! بر فاکتوریل‌های تعداد اشیای تکراری به دست می‌آید. برای مثال، تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی «استدلال» برابر است با: $\frac{۷!}{۲!۲!}$ (زیرا دو حرف الف و دو حرف ل تکراری هستند). بنابراین، تعداد عددهای با سه رقم ۵ و دو رقم ۴ برابر است با: $۱۰=\frac{۵!}{۲!۳!}$ و تعداد عددهای پنج رقمی با سه رقم ۵، یک رقم ۲ و یک رقم ۸ برابر است با: $۲۰=\frac{۵!}{۳!}$. در نتیجه، تعداد کل عددهای پنج رقمی مساوی ۳۰=۲۰+۱۰ است.

۶.

$$۴(۱۶^{\sin^۲ x}) = ۲^{۶\sin x} \Rightarrow ۲^{۲+۴\sin^۲ x} = ۲^{۶\sin x} \Rightarrow$$

$$۴\sin^۲ x + ۲ = ۶\sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$\sin x = ۱ \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

$$۰ \le x \le ۲\pi \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\right\}$$

۷.

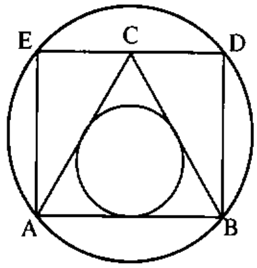
$$a_n - (n+۱)a_{۲-n} = (n+۳)^۲$$

$$\left.\begin{array}{l} n = ۰ \Rightarrow \quad a_۰ - a_۲ = ۹ \\ n = ۲ \Rightarrow \quad a_۲ - ۳a_۰ = ۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(a_۰ - a_۲) + (a_۲ - ۳a_۰) = ۹ + ۲۵ \Rightarrow -۲a_۰ = ۳۴ \Rightarrow a_۰ = -۱۷$$

سؤال: آیا می‌توانید مقدار $a_۲$ را به دست آورید؟

۸. می‌دانیم که شعاع دایره‌ی محاطی در هر مثلث از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید که در این دستور، S مساحت و p نصف محیط مثلث است.



از طرف دیگر، در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a،

$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ و $P = \frac{۳a}{۲}$ و در نتیجه: $r = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}a}{۶}$

و چون: r=۱، پس: $۱ = \frac{\sqrt{۳}a}{۶}$ و در نتیجه: $a = \frac{۶}{\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$؛ یعنی: $AB = AC = BC = ۲\sqrt{۳}$

همچنین، ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول ضلع آن است. (چرا؟)

بنابراین: $DB = CH = AE = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۳$ و طول قطر دایره‌ی بزرگ‌تر مساوی طول قطر مستطیل است. (چرا؟) در نتیجه: $R = \sqrt{AB^۲ + BD^۲} = \sqrt{۱۲+۹} = \sqrt{۲۱}$

حل مسائل قسمت ب را در شماره‌ی آینده ملاحظه بفرمایید.

1.Challenging Problems

مسائل برای حل

ریاضیات سال اول

○ حمیدرضا امیری

۱ . عبارت $x^3+2xy^2-3y^3$ را بر $x+2y$ تقسیم کرده و خارج قسمت و باقی‌مانده را به‌دست آورید؟

۲ . حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید؟

الف) $(2x^2-3z)(2x^2+4z)$ ب) 999×1001

ج) $(x-1)^3(x+1)^3$ د) $(x-3)(x-2)(x^2+5x-6)$

هـ) $(x+2)^2(x-1)^2$

۳ . اگر $\frac{x^2+1}{x}=2$ حاصل $(x^3+\frac{1}{x^3})$ را بیابید؟

۴ . هریک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید .

الف) $a^2x+b^2y-b^2x-a^2y$ ب) $x^2y-x^2-a^2y+a^2$

ج) x^4-5x^2+6 د) z^4-2z^2+49

۵ . هریک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید .

الف) $\frac{2x^4-12x^2-2x^3}{x^3+2x^2}+\frac{-x^3+27}{x^3+3x^2+9x}$

ب) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt[5]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^5}-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$

۶ . مخرج کسر زیر را گویا کنید .

$$A=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-5}$$

۷ . نمودار هریک از معادله‌های زیر را رسم کنید .

الف) $y^2-3y+xy=0$ ب) $y=-|x|+3$

۸ . نقاط $A\Big|_{-1}^{2}$ و $B\Big|_{2}^{1}$ و $C\Big|_{-2}^{3}$ داده شده‌اند .

الف) معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC را بنویسید؟

ب) معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع AB را بنویسید؟

۹ . نقطه‌ی $A\Big|_{1}^{2}$ یک رأس مربع و خط $2x+y=4$ معادله‌ی یکی از قطرهای این مربع است ، مساحت مربع را بیابید؟

۱۰ . به ازای چه مقادیری برای m ، معادله‌ی $2mx^2+(m-1)x-\frac{1}{4}=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

۱۱ . نامعادله‌ی زیر را حل کرده و مجموعه‌ی جواب آن را به‌دست آورید .

$x(x-4)>(x+3)^2-5$

۱۲ . اگر θ در ناحیه چهارم مثلثاتی بوده و $\cos\theta=\frac{3}{5}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید؟

۱۳ . درستی هریک از اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید .

الف) $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$

ب) $(1+tg^2\theta)(1-\sin^2\theta)=1$

ریاضیات سال دوم

○ سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ . نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=|x|\lfloor x\rfloor$ را در فاصله‌ی [۲ و ۲-) رسم کنید .

۲ . نامعادله‌ی $|2x+3|>|4x+1|$ را حل کنید .

۳ . حاصل عبارت $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$ را تعیین کنید .

۴ . ابتدا دامنه‌ی متغیر را در معادله‌ی $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-6}=1$ تعیین کنید و پس از حل معادله، مجموعه‌ی جواب را بنویسید .

۵ . مقدار عددی عبارت $N=\frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}-\frac{1}{\sin 10^\circ}$ را معین کنید .

۶ . در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، اگر $f(x)=2x^2+\pi$ و $g(x)=\sin x+\cos x$ ، آن‌گاه حاصل $g(f(0)),f(g(x))$ را بیابید .

۷ . جمله‌ی چهارم تصاعد حسابی زیر را پس از محاسبه‌ی n بیابید .

$$\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3},\dots$$

۸ . در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی نخست ۳/۵ برابر جمله‌ی دوم است . جمله‌ی سوم و چهارم این تصاعد را در صورتی که جمله‌ی اول آن ۳ باشد، بیابید .

۹ . زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}=m\vec{i}-n\vec{j}$ و $\vec{b}=n\vec{i}+m\vec{j}$ را حساب کنید .

۱۰ . حاصل عبارت $p(x)=\frac{\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\cdots}{\sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{\cdots}}}}}$ را بیابید .

۱۱ . اگر $A=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}m\\4\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix}$ ، سه رأس مثلث ABC باشند، m را چنان تعیین کنید که رأس $\hat{A}$ قائمه باشد .

۱۲ . با فرض a و $b>0$ ، ثابت کنید، اگر $4a^2+9b^2=4ab$ ، آن‌گاه:

$$\log\frac{2a+3b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}$$

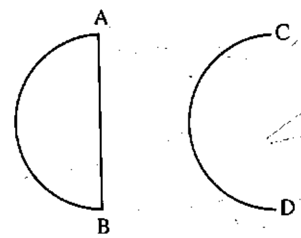
۱۳ . از بین ۵ دانش‌آموز کلاس سوم و ۴ دانش‌آموز کلاس دوم، می‌خواهیم انجمنی را با ۳ دانش‌آموز کلاس سوم و ۲ دانش‌آموز کلاس دوم تشکیل دهیم . این عمل به چند طریق ممکن است؟

۱۴ . در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن را بیابید که قدر مطلق تفاضل اعداد روی دو تاس برابر ۱ باشد .

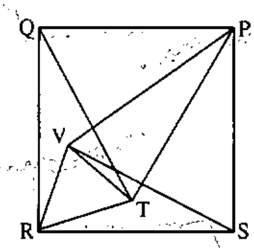
سؤال های هندسه ی ۱

○ محمد هاشم رستمی

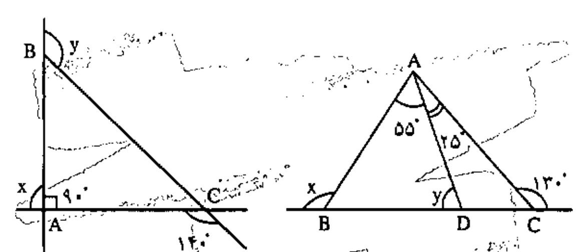
۱. در شکل روبه‌رو، کمان $\widehat{AB}$ بزرگ‌تر است یا کمان $\widehat{CD}$؟



۲. چهارضلعی PQRS مربع و مثلث‌های PQT و PSV متساوی‌الاضلاع هستند. نوع مثلث‌های PVT و RVT را تعیین کنید.



۳. اندازه‌ی x و y را در هریک از شکل‌های زیر تعیین کنید. علامت‌های یکسان، اجزای مساوی را نشان می‌دهند.



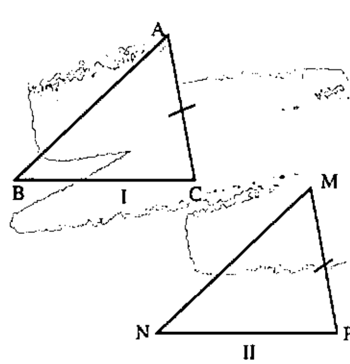
(الف) (ب)

۴. برای هم‌نهشت بودن دو مثلث I و II به حالت‌های تعیین شده، در هریک از موارد (الف)، (ب) و (پ)، تساوی چه جزءهایی لازم است؟

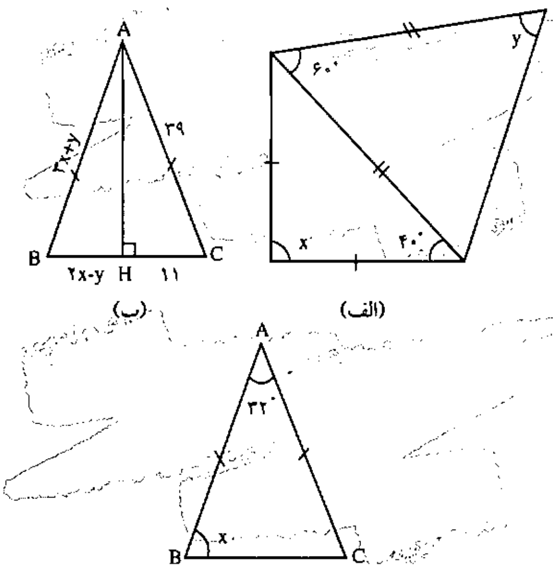
الف. (ض ض ض)

ب. (ض ز ض)

پ. (ز ض ز)



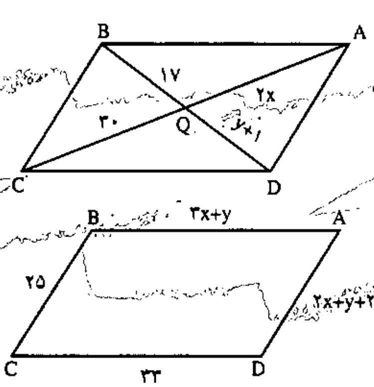
۵. در هر شکل، علامت‌های یکسان اجزای متناظر متساوی را نشان می‌دهند. اندازه‌ی x یا x و y را تعیین کنید.



(الف) (ب) (پ)

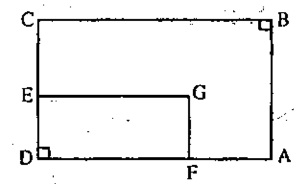
۶. چندضلعی را تعریف کنید.

۷. اندازه‌ی x و y را در هریک از متوازی‌الاضلاع‌های زیر تعیین کنید.



۸. مستطیل ABCD داده شده است. نقطه‌ی E را روی ضلع CD و نقطه‌ی F را روی ضلع AD چنان اختیار می‌کنیم که: $DE=\frac{2}{5}CD$ و $DF=\frac{11}{14}AD$، آن‌گاه مستطیل DEGF را می‌سازیم اندازه‌ی مساحت این مستطیل را برحسب

مساحت مستطیل ABCD تعیین کنید.

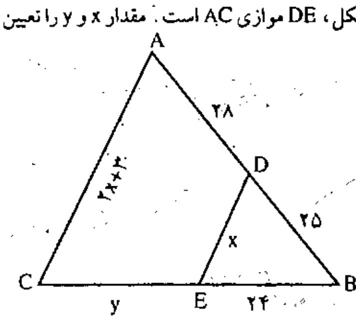


۹ . مساحت ذوزنقه‌ای ۴۸۰ سانتی‌متر مربع، ارتفاعش ۲۰ سانتی‌متر و قاعده‌ی بزرگش ۳ برابر قاعده‌ی کوچکش است. اندازه‌ی قاعده‌های این ذوزنقه را بیابید.

۱۰ . در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی ABCD $(\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ)$، $AB = 24$، $BC = 13$ و $CD = 19$ سانتی‌متر است. اندازه‌ی محیط و مساحت این ذوزنقه را تعیین کنید.

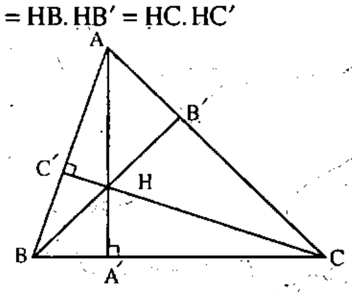
۱۱ . اندازه‌ی واسطه‌ی هندسی بین $2a$ و $8a$ را تعیین کنید.

۱۲ . در شکل، DE موازی AC است. مقدار x و y را تعیین کنید.

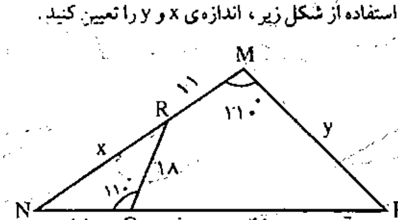


۱۳ . نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های AA' ، BB' و CC' از مثلث ABC است. ثابت کنید:

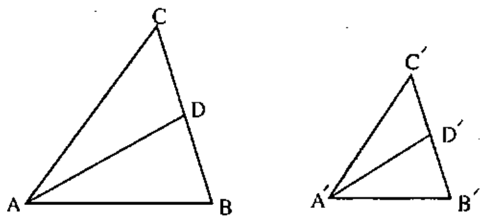
$$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$$



۱۴ . با استفاده از شکل زیر، اندازه‌ی x و y را تعیین کنید.



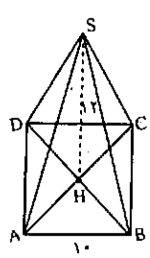
۱۵ . دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه و AD و $A'D'$ دو نیمساز نظیر از این دو مثلث هستند. اگر $5AD = 8A'D'$ و $AC = 40mm$ ، اندازه‌ی ضلع $A'C'$ را تعیین کنید.



۱۶ . دو مثلث ABC و MNP متشابه‌اند. اگر $AB = 7$ ، $AC = 8$ ، $BC = 9$ و محیط مثلث MNP مساوی ۱۲۰ باشد، نسبت مساحت‌های این دو مثلث را تعیین کنید.

۱۷ . قطر مکعبی به ضلع a، مساوی قطر مکعب مستطیلی به طول، عرض و ارتفاع ۹، ۵ و $\sqrt{41}$ است. حجم مکعب را تعیین کنید.

۱۸ . هرم مربع القاعده‌ی منتظمی به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر و ضلع قاعده‌ی ۱۰ سانتی‌متر داده شده است. مساحت کل این هرم را تعیین کنید.

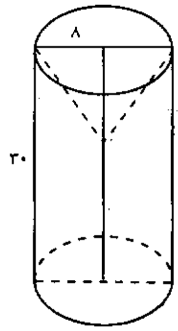


۱۹ . از یک استوانه‌ی قائم فلزی به شعاع قاعده‌ی ۸ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر، مخروط قائمی که قاعده‌اش منطبق بر یک قاعده‌ی استوانه و ارتفاعش ۹ سانتی‌متر است، و نیم‌کره‌ای که قاعده‌اش منطبق بر قاعده‌ی دیگر استوانه است، تراشیده‌ایم. حساب کنید:

الف) حجم مخروط تراشیده شده را؛

ب) حجم نیم‌کره‌ی تراشیده شده را؟

پ) حجم ایجاد شده بین استوانه، مخروط و نیم‌کره را.



حسابان

○ احمد قندهاری

۱ . مطلوب است محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{x^2+11}-3}$

۲ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^3-4x^2+2x}$ در ۰ پیوسته است. $f(0)$ را بیابید.

۳ . اگر $f(x)=\tan^4 4x+\cot^2 2x$ ، آن‌گاه $f'(\frac{\pi}{12})$ را بیابید.

۴ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^3+bx^2+c$ ، اولاً اگر نقطه‌ی $F(1,1)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد و نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای به عرض (۱−) قطع کند، a، b و c را بیابید.

ثانیاً، مطلوب است رسم جدول و منحنی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^3+3x^2-1$

۵ . تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ مفروض است. اولاً، معادله‌ی تابع را چنان مشخّص کنید که نقطه‌ی $o'(1,1)$ مرکز تقارن منحنی و نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2}$ قطع کند. ثانیاً، مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$.

۶ . از نقطه‌ی $p(0,1)$ ، دو مماس بر منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=-x^2+7x$ رسم کرده‌ایم. معادله‌های مماس‌ها را بیابید.

۷ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & ,x\ge 2\\ x^2-4x & ,x<2\end{cases}$ در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است. a و b را بیابید.

۸ . معادله‌ی $4\sin^2 x-2(\sqrt{2}+1)\sin x+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های آن را در بازه $[0,2\pi]$ بیابید.

۹ . مساحت مستطیلی ۲۲۵ مترمربع است. ابعاد آن را چنان بیابید که محیط مستطیل مینی مم باشد.

۱۰ . مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^4|2x-3|dx$.

جبر و احتمال

○ هوشنگ شرقی

۱ . به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، درستی روابط زیر را برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

الف) $\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dots+\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

ب) $n\ge 2:\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{13}{24}$

۲ . کدام یک از احکام کلی زیر درست و کدام نادرست هستند؟ احکام درست را اثبات کنید و برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید:

الف) حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی است گویا.

ب) حاصل ضرب هر عدد گویای غیر صفر در هر عدد گنگ، عددی است گنگ.

ج) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ عددی است گنگ.

۳ . S یک مجموعه از اعداد طبیعی است. حداقل تعداد اعضای S را به‌دست آورید تا مطمئن شویم، اگر اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، لااقل شش عضو دارای یک باقی مانده هستند.

۴ . اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R},\ x^3=4x\}$ و $B=\{x\in Z|x^2\le 3x\}$ ، تمام زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی $A\cap B$ را مشخص کنید.

۵ . به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $A\Delta(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\cup[B\cap(C-A)]$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$

۶ . اگر $A=[-2,1]$ و $B=[0,2]$ ، مجموعه‌ی A^2-B^2 را در یک دستگاه مختصات هاشور بزنید.

۷ . رابطه‌ی زیر روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow\frac{x^2-z^2}{2}=y^2-t^2$$

اولاً نشان دهید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، ثانیاً کلاس هم‌ارزی $(0,0)$ را مشخص، و نمایش هندسی آن را رسم کنید.

۸ . دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. الف) فضای نمونه را مشخص کنید. ب) اگر A پیشامد آن باشد که مجموع شماره‌های روی دو تاس کم‌تر از ۷ باشد و B پیشامد آن باشد که شماره‌های روی دو تاس عددهای متوالی باشند، A و B و $A'\cap B'$ را مشخص کنید.

۹ . می خواهیم یک انجمن دانش‌آموزی از بین ۵ دانش‌آموز سال اول و ۴ دانش‌آموز سال دوم، با سه عضو تشکیل دهیم. احتمال آن را به دست آورید که:

الف) هر سه عضو از کلاس اول باشند.

ب) اکثریت اعضا از کلاس دوم باشند.

۱۰ . دو معلم قرار است رأس ساعت ۱۰ وارد کلاسی شوند. اگر حداکثر زمان تأخیر هریک از آن‌ها ۳۰ دقیقه باشد، مطلوب است تعیین احتمال آن‌که هیچ یک بیش‌تر از دو برابر دیگری تأخیر نکند.

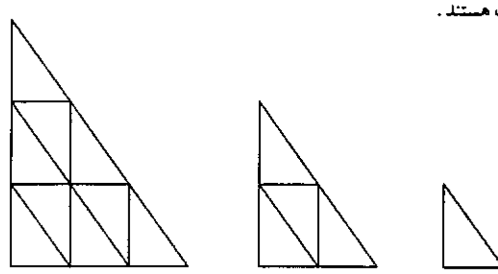
۱۱ . چهار تیم فوتبال A و B و C و D در دو زمین جداگانه دو به‌دو مسابقه‌ی هم‌زمان دارند. در مسابقه‌ی A با B، شانس برد A، دوبرابر شانس برد B و نصف شانس تساوی است. در مسابقه‌ی C با D نیز شانس برد C با شانس برد D مساوی و هر دو، دو برابر شانس تساوی است. احتمال آن‌که A بازنده شود و احتمال برد D را جداگانه به‌دست آورید.

۱۲ . یک عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ به تصادف انتخاب کرده‌ایم. مطلوب است احتمال آن‌که این عدد مضرب ۳ یا ۷ باشد ولی مضرب ۱۱ نباشد.

هندسه‌ی ۲

○ محمد هاشم رستمی

۱. مثلث‌های شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلث‌های کوچک همه هم‌نهشت هستند.



(۳) (۲) (۱)

الف) تعداد مثلث‌های کوچک هر شکل را تعیین و جدول زیر را کامل کنید.

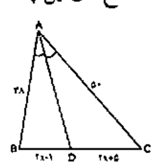
شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مثلث‌های کوچک			

ب) رسم مثلث‌های متشابه را تا پنجمین شکل ادامه دهید. در شکل پنجم چند مثلث کوچک، جا می‌گیرد؟ جدول را تا شکل پنجم کامل کنید.

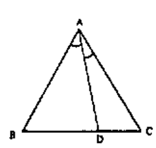
پ) اگر رسم شکل‌ها را به همین ترتیب ادامه دهید، در شکل nام چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟

ت) اگر مثلث شکل ۱ قائم‌الزاویه و دو ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه‌اش ۲ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر باشند، مساحت شکل nام چند سانتی‌متر مربع است؟

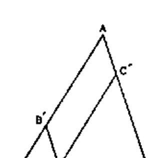
۲. از هر رأس یک چند ضلعی ۶ قطر می‌گذرد. تعداد ضلع‌های این چند ضلعی و تعداد قطرهای آن را تعیین کنید.



۳. در شکل روبه‌رو، AD نیمساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است، با توجه به مقدارهای داده شده در شکل، مقدار x را تعیین کنید.



۴. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر D نقطه‌ای واقع بر ضلع BC و $B\hat{A}D < D\hat{A}C$ باشد، ثابت کنید DB>DC است.

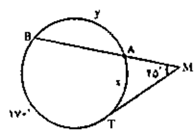


۵. در مثلث ABC، با فرض AB>AC، از نقطه‌ی D واقع بر ضلع BC خط‌هایی موازی دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AB و AC به‌ترتیب در نقطه‌های B' و C' قطع کنند. ثابت کنید:

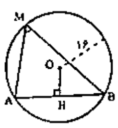
$$AC < DB' + DC' < AB$$

۶. مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع R' را به گونه‌ای تعیین کنید که درون دایره‌ی $C(O,R)$ قرار داشته و بر این دایره مماس باشند ($R' < R$ است).

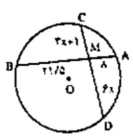
۷. از مثلث ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A} = \alpha$ و طول دو ارتفاع $BH=h_b$ و $CH' = h_c$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید.



۸. با استفاده از شکل روبه‌رو، اندازه‌ی x و y را تعیین کنید.



۹. پاره‌خط AB به طول $16\sqrt{3}$ سانتی‌متر داده شده است. کمان در خور زاویه‌ی حاده‌ی α رو به رو به این پاره‌خط را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌ای که این کمان در خور بخشی از آن است برابر ۱۶ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی α و فاصله‌ی مرکز دایره تا وتر AB را تعیین کنید.



۱۰. با استفاده از شکل روبه‌رو:

الف) اندازه‌ی x را تعیین کنید.

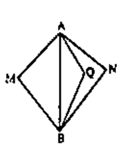
ب) طول کوچک‌ترین وتری را که از نقطه‌ی M در این دایره رسم می‌شود به دست آورید.

۱۱. مختصات نقطه‌ای را بیابید که تصویر آن تحت تبدیل $T(x,y) = (a - y + 1, 2x + y + 3)$، نقطه‌ی (۷ و ۶-) باشد.

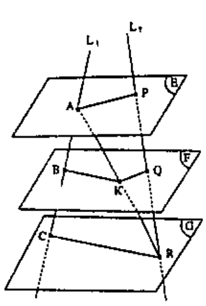
۱۲. تحت یک بازتاب محوری، تصویر خط $D=2x+y-13=0$، خط $D' = 2x + y - 5 = 0$ است. معادله‌ی محور این بازتاب را بیابید.

۱۳. معادله‌ی تصویر خط $\Delta: 3x - 4y - 12 = 0$، تحت تبدیل $T(x,y)=(2x,2y)$ را تعیین کند.

۱۴. سه نقطه‌ی A، B و C در صفحه‌ی P و نقطه‌ی S در خارج این صفحه داده شده‌اند. نقطه‌های M و N به‌ترتیب روی SA و SB چنان قرار دارند که $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ است. ثابت کنید که فصل مشترک صفحه‌ی P با صفحه‌ی CMN موازی AB است.



۱۵. در شکل روبه‌رو، همه‌ی نقطه‌ها در یک صفحه قرار ندارند. اگر AM=MB، AN=BN، AQ=BQ باشد، ثابت کنید که نقطه‌های M، N و Q هم‌صفحه‌اند.



۱۶. در شکل، دو خط متنافر L_1 و L_2 صفحه‌های موازی E، F و Q را قطع کرده‌اند و خط AR نیز صفحه‌ی F را در K قطع کرده است. اگر AB=BC باشد، ثابت کنید:

$$BQ < \frac{1}{2}(AP + CR)$$

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات سال اول

۱. خارج قسمت $x^۲ - ۲xy + ۶y^۲$ و باقی‌مانده $-۱۵y^۳$.

۲.

الف) $(۲x^۲ - ۳z)(۲x^۲ + ۴z) = (۲x^۲)^۲ + (۴z - ۳z)۲x^۲ + (-۳z)\times(۴z) = ۴x^۴ + ۲x^۲z - ۱۲z^۲$

ب) $۹۹۹\times۱۰۰۱ = (۱۰۰۰-۱)\times(۱۰۰۰+۱) = (۱۰۰۰)^۲ - ۱ = ۹۹۹۹۹۹$

ج) $(x-۱)^۳(x+۱)^۳ = [(x-۱)(x+۱)]^۳ = [(x^۲-۱)]^۳ = x^۶ - ۳x^۴ + ۳x^۲ - ۱$

د) $(x-۳)(x-۲)(x^۲+۵x-۶) = (x^۲-۵x+۶)(x^۲+۵x-۶)$
$= [x^۲+(-۵x+۶)][x^۲-(-۵x+۶)] = x^۴ - (-۵x+۶)^۲$
$= x^۴ - (۲۵x^۲ - ۶۰x + ۳۶) = x^۴ - ۲۵x^۲ + ۶۰x - ۳۶$

هـ) $(x+۲)^۲(x-۱)^۲ = [(x+۲)(x-۱)]^۲ = (x^۲+x-۲)^۲$
$x^۴ + x^۲ + ۴ + ۲x^۳ - ۴x^۲ - ۴x = x^۴ + ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۴x + ۴$

۳. طبق فرض داریم: $\frac{x^۲+۱}{x} = ۲$ پس $\frac{x^۲}{x} + \frac{۱}{x} = ۲$ و درنتیجه: $x + \frac{۱}{x} = ۲$.

$$(x+\frac{۱}{x})^۳ = ۲^۳ \Rightarrow x^۳ + ۳x^۲\times\frac{۱}{x} + ۳\times\frac{۱}{x^۲}\times x + \frac{۱}{x^۳} = ۸$$

$$\Rightarrow x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = ۸ - ۳x - ۳\times\frac{۱}{x} = ۸ - ۳\underbrace{(x+\frac{۱}{x})}_{۲} = ۸ - ۶ = ۲$$

۴.

الف) $a^۲x + b^۲y - b^۲x - a^۲y = x(a^۲-b^۲) - y(a^۲-b^۲) = (a^۲-b^۲)(x-y) = (a-b)(a+b)(x-y)$

ب) $x^۲y - x^۲ - a^۲y + a^۲ = x^۲(y-۱) - a^۲(y-۱) = (y-۱)(x^۲-a^۲) = (y-۱)(x-a)(x+a)$

ج) $x^۴ - ۵x^۲ + ۶ = (x^۲)^۲ - ۵x^۲ + ۶ = (x^۲-۲)(x^۲-۳)$

د) $z^۴ - ۲z^۲ + ۴۹ = (z^۲+۷)^۲ - ۱۴z^۲ - ۲z^۲ = (z^۲+۷)^۲ - ۱۶z^۲ = [(z^۲+۷) - ۴z][(z^۲+۷) + ۴z]$

۵.

الف) عبارت داده شده $\frac{۲x^۲(x^۲-x-۶)}{x^۲(x+۲)} + \frac{(۳-x)(۹+۳x+x^۲)}{x(x^۲+۳x+۹)}$
$= \frac{۲(x+۲)(x-۳)}{(x+۲)} + \frac{۳-x}{x} = ۲(x-۳)\times\frac{x}{(۳-x)} = \frac{۲x(x-۳)}{(۳-x)} = -۲x$

ب) عبارت داده شده $|۲-\sqrt{۵}| + (\sqrt{۳}-\sqrt{۵}) - [-(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})]$
$= (-۲+\sqrt{۵}) + \sqrt{۳} - \sqrt{۵} + \sqrt{۲} - \sqrt{۳} = -۲+\sqrt{۲}$

۶.

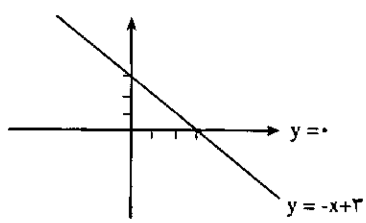
حل ۷:

$$\frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۵} = \frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۵}\times\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+۵}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+۵} = \frac{K}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲-۲۵}$$

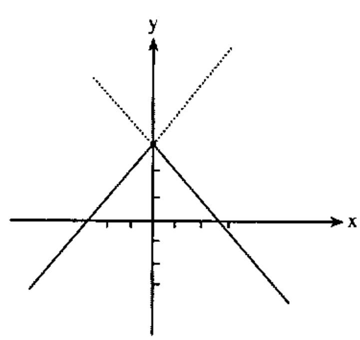
$$= \frac{K}{۳-۲\sqrt{۶}+۲-۲۵} = \frac{K}{-۲\sqrt{۶}-۲۰} = \frac{K}{-۲\sqrt{۶}-۲۰}\times\frac{-۲\sqrt{۶}+۲۰}{-۲\sqrt{۶}+۲۰} = \frac{K'}{۲۴-۴۰۰} = \frac{K'}{-۳۷۶}$$

۷.

$y^۲ - ۳y + xy = ۰ \Rightarrow y(y+x-۳) = ۰$
$\Rightarrow y = ۰$ یا $y + x - ۳ = ۰ \Rightarrow y = -x + ۳$



ب) $y = -|x| + ۳$
$x \geq ۰ \Rightarrow y = -x + ۳$
$x < ۰ \Rightarrow y = x + ۳$



۸. $A\Big|^{۳}_{-۱}$ $B\Big|^{۱}_{۲}$ $C\Big|^{۳}_{-۲}$

وسط BC $M\Big|^{\frac{۳+۱}{۲}}_{\frac{-۲+۲}{۰}} \Rightarrow M\Big|^{۲}_{۰} \Rightarrow m_{AM} = \frac{-۱-۰}{۳-۲} = -۱$

معادله‌ی میانه‌ی AM $\Rightarrow (y-۰) = -۱(x-۲) \Rightarrow y = -x + ۲$

$m_{AB} = \frac{-۱-۲}{۳-۱} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow m_{CH}\times m_{AB} = -۱$

$\Rightarrow m_{CH} = \frac{۲}{۳}$

معادله‌ی ارتفاع CH $\Rightarrow (y+۲) = \frac{۲}{۳}(x-۳)$ یا $y = \frac{۲}{۳}x - ۴$

۹. چون مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی قطر صدق نمی‌کند پس نقطه‌ی A روی قطر داده شده قرار ندارد و لذا فاصله‌ی آن تا قطر نصف طول قطر است و می‌دانیم اگر d طول قطر یک مربع باشد طول هر ضلع آن $a = \frac{d}{\sqrt{۲}}$ می‌باشد و

مساحت مربع $S=a^2=\frac{1}{2}d^2$ است.

$$D=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow D=\frac{|2\times 2+1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow d=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

۱۰. شرط داشتن ریشه‌ی مضاعف آن است که $\Delta=b^2-4ac=0$.

$$2mx^2+(m-1)x-\frac{1}{4}=0\Rightarrow\Delta=(m-1)^2-4\times 2m\times\left(-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$m^2-2m+1+2m=0\Rightarrow m^2+1=0$$

و معادله‌ی $m^2+1=0$ دارای ریشه‌ی حقیقی نبوده، لذا به ازای هیچ مقداری برای m معادله‌ی فوق ریشه‌ی مضاعف نمی‌تواند داشته باشد.

۱۱.

$$x(x-4)>(x+3)^2-5\Rightarrow x^2-4x>x^2+6x+9-5$$

$$10x+4<0\Rightarrow 10x<-4\Rightarrow x<\frac{-4}{10}$$

مجموعه‌ی جواب $=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<\frac{-4}{10}\right\}$

۱۲.

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow\sin\theta=-\frac{4}{5},\ tg\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3},$$

θ در ناحیه‌ی چهارم

$$\cot g\theta=\frac{1}{tg\theta}=-\frac{3}{4}$$

۱۳. الف)

$$(\sin^4x-\cos^4x)=(\sin^2x-\cos^2x)\underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{1}=\sin^2x-\cos^2x$$

ب)

$$(1+tg^2\theta)(1-\sin^2\theta)=\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\times\cos^2\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

حل مسأله‌ها (سال دوم)

۱. در فاصله $[-2, 2]$ می‌توان نوشت: $-2<x<-1: y=(-x)(-2)=2x$

$y=|x|\lfloor x\rfloor$

$A_1\begin{vmatrix}-2\\-4\end{vmatrix}, B_1\begin{vmatrix}-1\\-2\end{vmatrix}$

$-1\le x<0: y=(-x)(-1)=x$

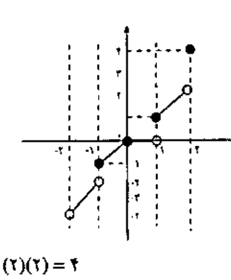
$A_2\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}, B_2\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$

$0\le x<1: y=(x)(0)=0$

$A_3\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}, B_3\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$

$1\le x<2: y=(x)(1)=x$, $x=2: y=(2)(2)=4$

$A_4\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}, B_4\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}$



۲.

$$|2x+3|^2>|4x+1|^2; 4x^2+9+12x>16x^2+8x+1;$$

$$12x^2-4x-8<0; 3x^2-x-2<0; (3x+2)(x-1)<0\Rightarrow$$

$$\boxed{-\frac{2}{3}<x<1}$$

۳. با توجه به بسط cos می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

از ضرب دو رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)&=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\beta\end{aligned}$$

۴. با توجه به دستگاه $\begin{cases}2x-1\ge 0\\2x-6\ge 0\end{cases}$ یا $\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\x\ge 3\end{cases}$، دامنه‌ی متغیر معادله $x\ge 3$ است.

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-6}=1$$

$$\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{2x-6}; 2x-1=(1+\sqrt{2x-6})^2;$$

$$2x-1=1+2x-6+2\sqrt{2x-6}; \sqrt{2x-6}=2$$

$$2x-6=4; \boxed{x=5}$$

۵. با توجه به برابری $\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$، خواهیم داشت:

$$N=\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}-\frac{1}{\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{\tan 60^\circ\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=\frac{\sin 60^\circ\sin 10^\circ-\cos 60^\circ\cos 10^\circ}{\frac{1}{2}\cos 60^\circ\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{-\cos(60^\circ+10^\circ)}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ}=\frac{-\cos 70^\circ}{\frac{1}{4}\cos 70^\circ}=-4$$

۶. با توجه به $f(0)=\pi$، می‌توان نوشت:

$$f(g(x))=2(\sin x+\cos x)^2+\pi=2(1+\sin 2x)+\pi.$$

$$g(f(0))=\sin(\pi)+\cos(\pi)=-1$$

۷. در این تصاعد حسابی می‌توان نوشت:

$$2\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}; 2\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)=\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$n(n-1)=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}; n-1=1+\frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

$$n^2-9n+14=0; (n-7)(n-2)=0; n=7, n=2$$

پاسخ n=2 مورد قبول نیست، زیرا n≥3. بنابراین:

7 , 21 , 35 , 49 ,...

۸ . برای این تصاعد هندسی می‌توان نوشت :

$$S_۴ = ۳/۵a_۲ ; a_۱ \frac{q^۴ - ۱}{q - ۱} = ۳/۵a_۱q ; q^۲ + q + ۱ = ۳/۵q$$

$$۲q^۲ + ۲q + ۲ = ۷q ; ۲q^۲ - ۵q + ۲ = ۰ ; (۲q - ۱)(q - ۲) = ۰ ;$$

$$q = ۲,\ \frac{۱}{۲}$$

$$a_۴ = a_۱q^۳ ; a_۴ = ۳(۲)^۳ = ۳ \times ۸ = ۲۴$$

یا $a_۴ = ۳(\frac{۱}{۲})^۳ = \frac{۳}{۸}$ (جمله‌ی چهارم)

$$a_۳ = a_۱q^۲ ; a_۳ = ۳(۲)^۲ = ۱۲$$

یا $a_۳ = ۳(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۴}$ (جمله‌ی سوم)

۹ . ضرب داخلی دو بردار صفر است. بنابراین، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند و زاویه‌ی بین آن‌ها ۹۰° است :

$$\vec{a}.\vec{b} = (m\vec{i} - n\vec{j}).(n\vec{i} + m\vec{j}) = mn - nm = ۰ ;$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{۲}$$

۱۰ . با فرض $u = \sin x + \sin^۲ x + \sin^۳ x + \ldots$ و $v = \sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{\cos x\sqrt{\ldots}}}}$ می‌توان نوشت :

$$u = \sin x + \sin x(\underbrace{\sin x + \sin^۲ x + \sin^۳ x + \ldots}_{u}) = \sin x + u\sin x$$

$$u - u\sin x = \sin x ; u(۱ - \sin x) = \sin x ; u = \frac{\sin x}{۱ - \sin x}$$

$$v = \sqrt{\cos x}\sqrt[۴]{\cos x}\sqrt[۸]{\cos x}\ldots\sqrt[۲^n]{\cos x}\ldots$$

$$= \cos x^{\frac{۱}{۲}}.\cos x^{\frac{۱}{۴}}.\cos x^{\frac{۱}{۸}}\ldots = \cos x^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\ldots} = \cos^k x$$

$$k = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}(\underbrace{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots}_{k});$$

$$k = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}k ; k - \frac{۱}{۲}k = \frac{۱}{۲} ; \frac{۱}{۲}k = \frac{۱}{۲} ; k = ۱ ; v = \cos x$$

$$p(x) = \frac{u}{v} = \frac{\frac{\sin x}{۱ - \sin x}}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x(۱ - \sin x)}$$

روش دوم :

می‌دانیم که مجموع جملات دنباله‌ی هندسی نامحدود :

$\sin x, \sin^۲ x, \sin^۳ x, \ldots$

با توجه به جمله‌ی اول آن $a_۱ = \sin x$ و قدر نسبت آن $q_۱ = \sin x$ چنین است :

$$S_۱ = \frac{a_۱}{۱ - q_۱} = \frac{\sin x}{۱ - \sin x}$$

همچنین، مجموع جملات دنباله‌ی هندسی نامحدود :

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \ldots$$

با توجه به جمله‌ی اول آن $a_۲ = \frac{۱}{۲}$ و قدر نسبت آن $q_۲ = \frac{۱}{۲}$ چنین است :

$$S_۲ = \frac{a_۲}{۱ - q_۲} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۱$$

۱۱ .

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} m+۱ \\ ۴-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+۱ \\ ۳ \end{bmatrix},\quad \vec{AC} = \begin{bmatrix} ۲+۱ \\ ۱۲-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$$

چون مثلث در رأس A قائمه است، بنابراین ضرب داخلی $\vec{AB}.\vec{AC}$ برابر صفر است :

$$\vec{AB}.\vec{AC} = \begin{bmatrix} m+۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۱ \end{bmatrix} = [m+۱\ \ ۳]\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$$

$$= ۳(m+۱) + ۳ \times ۱۱ = ۰ ; \boxed{m = -۱۲}$$

۱۲ . با فرض $b>۰$ و a و $۴a^۲ + ۹b^۲ = ۴ab$ می‌توان نوشت :

$$۴a^۲ + ۹b^۲ = (۲a + ۳b)^۲ - ۱۲ab = ۴ab ; (۲a + ۳b)^۲ = ۱۶ab ;$$

$$(\frac{۲a + ۳b}{۴})^۲ = ab ; \log(\frac{۲a + ۳b}{۴})^۲ = \log ab ;$$

$$۲\log\frac{۲a + ۳b}{۴} = \log a + \log b ; \log\frac{۲a + ۳b}{۴} = \frac{\log a + \log b}{۲}$$

۱۳ . دانش‌آموزان کلاس سوم را به $\binom{۵}{۳}$ طریق و دانش‌آموزان کلاس دوم را به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. با توجه به اصل ضرب، تعداد راه‌هایی که ممکن هستند، به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\binom{۵}{۳} \times \binom{۴}{۲} = \frac{۵!}{۳!۲!} \times \frac{۴!}{۲!۲!} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$$

۱۴ . فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و پیشامد تصادفی مطلوب مجموعه‌ی A است :

$$A = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۵),(۵,۶)\}$$

بنابراین :

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

هندسه‌ی ۱

۱ . به نظر می‌رسد که کمان $\widehat{CD}$، از کمان $\widehat{AB}$ بزرگ‌تر است، اما چنین نیست و این دو کمان با هم برابرند؛ یعنی : $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

۲ . مثلث PVT متساوی‌الساقین است، زیرا : $PV = PS = PQ = PT$. مثلث RTV متساوی‌الاضلاع است، زیرا اگر از T به S و از V به Q وصل کنیم، داریم :

$$P\hat{T}V = P\hat{V}T = P\hat{T}S = P\hat{V}Q = ۷۵°،\ T\hat{R}S = V\hat{R}Q = ۱۵°،$$

$$R\hat{T}S = R\hat{V}Q = ۱۵۰°،\ V\hat{P}T = ۳۰°$$

$\Rightarrow R\hat{T}V = R\hat{V}T = T\hat{R}V = 60° \Rightarrow RT = TV = VR$

۳. الف) $x = 120°$ و $y = 75°$

ب) $x = 90°$ و $y = 130°$

۴. الف) برای این که این دو مثلث به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت باشند، باید: $AB = MN$ و $BC = NP$.

ب) برای هم‌نهشت بودن این دو مثلث به حالت (ض ز ض) باید:

$\hat{A} = \hat{M}$ و $AB = MN$ یا $\hat{C} = \hat{P}$ و $BC = NP$

پ) برای هم‌نهشت بودن دو مثلث به حالت (ز ض ز) کافی است، دو زاویه‌ی متناظر این دو مثلث مساوی باشند؛ برای مثال، $\hat{C} = \hat{P}$ و $\hat{A} = \hat{M}$ باشد. بدیهی است که وقتی دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه‌ی نظیرشان از مثلث دیگری مساوی باشند، آن‌گاه زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز مساوی خواهند بود.

۵. الف)

$$x = 180° - 2 \times 40° = 100° \quad y = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$$

ب) $\begin{cases} 3x + y = 39 \\ 2x - y = 11 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \ , \ y = 9$

پ) $x = \frac{180° - 32°}{2} = 74°$

۶. به کتاب درسی مراجعه کنید.

۷. الف) $\begin{cases} 2x = 30 \\ y + 1 = 17 \end{cases} \Rightarrow x = 15 \ , \ y = 16$

ب) $\begin{cases} 3x + y = 33 \\ 2x + y + 2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \ , \ y = 3$

۸. با توجه به این که: $S_{ABCD} = AD \times DC$ و $S_{DEGF} = DE.DF$، داریم:

$$DE \times DF = \frac{2}{5} CD \times \frac{11}{14} AD \Rightarrow DE \times DF = \frac{11}{35} CD \times AD$$

$$\Rightarrow S_{DEGF} = \frac{11}{35} . S_{ABCD}$$

۹. مساحت ذوزنقه را S، ارتفاع آن را h و دو قاعده‌اش را a و 3a می‌گیریم. داریم:

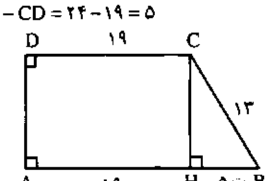
$S_{\text{ذوزنقه}} = 480 \ , \ h = 20 \ , \ S = \frac{1}{2}(a + b) \times h$

$$480 = \frac{1}{2}(a + 3a) \times 20 \Rightarrow 4a = 48 \Rightarrow a = 12cm$$

$$\Rightarrow 3a = 3 \times 12 = 36cm$$

۱۰. ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. AHCD مستطیل است، پس: $AH = CD = 19$. از آن جا داریم:

$BH = AB - AH = AB - CD = 24 - 19 = 5$



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCH داریم:

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12cm = AD$$

از آن جا: $24 + 13 + 19 + 12 = 68cm =$ محیط ذوزنقه

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2}(AB + CD)CH = \frac{1}{2}(24 + 19) \times 12 = 258cm^2$$

۱۱. اگر m واسطه‌ی هندسی بین b و c باشد، داریم: $m^2 = bc$. پس:

$$m^2 = 8a \times 2a \Rightarrow m^2 = 16a^2 \Rightarrow m = +4a \ , \ m = -4a$$

۱۲. بنابه قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

اما با توجه به شکل داریم:

$BA = BD + DA = 25 + 28 = 53 \ , \ BC = BE + EC = 24 + y \ ,$

$DE = x \ , \ AC = 2x + 3$

از آن جا خواهیم داشت:

$$\frac{25}{53} = \frac{24}{24 + y} = \frac{x}{2x + 3} \Rightarrow \frac{25}{53} = \frac{24}{24 + y}$$
$$\Rightarrow 600 + 25y = 1272$$

$$\Rightarrow 25y = 672 \Rightarrow y = 26/88 \ , \ \frac{25}{53} = \frac{x}{2x + 3}$$
$$\Rightarrow 53x = 50x + 75 \Rightarrow 3x = 75 \Rightarrow x = 25$$

۱۳. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی HAB' و HBA' متشابهند، زیرا: $\hat{A}' = \hat{B}' = 90°$ و $A\hat{H}B' = B\hat{H}A'$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'}} = \frac{AB'}{BA'} \Rightarrow HA.HA' = HB.HB' \quad (1)$$

همچنین، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی HCB' و HBC' متشابه هستند، زیرا: $\hat{B}' = \hat{C}' = 90°$ و $C\hat{H}B' = B\hat{H}C'$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\frac{HC}{HB} = \frac{HB'}{HC'}} = \frac{CB'}{BC'} \Rightarrow HB.HB' = HC.HC' \quad (2)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$

پس حکم مسأله ثابت شد.

۱۴. دو مثلث MNP و NQR متشابهند، زیرا زاویه‌ی N در هر دو مثلث مشترک است و: $\hat{M} = \hat{Q} = 110°$. بنابراین داریم:

$$\frac{NP}{NR} = \frac{MP}{QR} = \frac{MN}{NQ}$$

اما:

$NP = NQ + QP = 15 + 45 = 60$ و $NR = x$ و $MP = y$

$QR = 18$ و $MN = MR + RN = 11 + x$ و $NQ = 15$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{60}{x} = \frac{y}{18} = \frac{11 + x}{15} \Rightarrow \frac{60}{x} = \frac{11 + x}{15} \Rightarrow 11x + x^2 = 900$$

ج) $\Rightarrow x^2+11x-900=0\Rightarrow x=-36<0\ ,\ x=25$

$\Rightarrow \frac{60}{25}=\frac{y}{18}\Rightarrow \frac{12}{5}=\frac{y}{18}\Rightarrow y=\frac{12\times 18}{5}=\frac{216}{5}=43/2$

۱۵. در دو مثلث متشابه، نسبت پاره‌خط‌های متناظر، مساوی نسبت تشابه دو مثلث است، بنابراین داریم:

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}$$

اما بنابه فرض:

$5AD=8A'D'\Rightarrow \frac{AD}{A'D'}=\frac{8}{5}$ و $AC=40mm$

پس داریم:

$$\frac{40}{A'C'}=\frac{8}{5}\Rightarrow 8A'C'=200\Rightarrow A'C'=25mm$$

۱۶. می‌دانیم که نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه، مساوی نسبت تشابه آن دو مثلث است. بنابراین اگر نسبت تشابه این دو مثلث را k بگیریم، $K=\frac{\text{محیط مثلث ABC}}{\text{محیط مثلث MNP}}$ است.

اما:

محیط مثلث ABC $=AB+AC+BC=7+8+9=24$

محیط مثلث MNP $=120$

$$\Rightarrow K=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

از طرف دیگر، نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، مساوی مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است. بنابراین داریم:

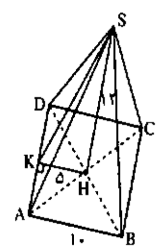
$$\frac{\text{مساحت مثلث ABC}}{\text{مساحت مثلث MNP}}=K^2=(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$$

۱۷. ضلع مکعب را a و قطر مکعب مستطیل را d می‌نامیم. داریم:

$d=\sqrt{9^2+5^2+(\sqrt{41})^2}=\sqrt{147}=7\sqrt{3}$ و قطر مکعب $=a\sqrt{3}$

اندازه‌ی ضلع مکعب $\Rightarrow a\sqrt{3}=7\sqrt{3}\Rightarrow a=7$

حجم مکعب $=a^3\Rightarrow$ حجم مکعب $=(7)^3=343$



۱۸. طول سهم هرم را به دست می‌آوریم. برای این کار از نقطه‌ی H، مرکز مربع ABCD، به نقطه‌ی K وسط یک ضلع مربع، مثلاً به وسط ضلع AD، وصل می‌کنیم. بدیهی است که HK عمود منصف AD و AK سهم هرم است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی SHK داریم:

$SH=12cm$ و $HK=\frac{AB}{2}=\frac{10}{2}=5cm$ و $SK^2=SH^2+HK^2$

$\Rightarrow SK^2=12^2+5^2=169\Rightarrow SK=13cm$ اندازه‌ی سهم هرم

از آن جا:

سطح جانبی هرم $=\frac{1}{2}\times$ محیط قاعده × سهم هرم $=\frac{1}{2}(4\times 10)\times 13=260cm^2$

سطح قاعده‌ی هرم $=AB^2=10^2=100cm^2$

سطح کل هرم = سطح جانبی هرم + مساحت قاعده $=260+100=360cm^2$

۱۹. شعاع قاعده‌ی استوانه $r=8cm$ و ارتفاع آن $h=30cm$ است.

الف) شعاع قاعده‌ی مخروط با شعاع قاعده‌ی استوانه برابر است؛ یعنی: $r=8cm$. ارتفاع مخروط نیز $h'=9cm$ است. پس داریم:

حجم مخروط $=\frac{1}{3}\pi r^2h'=\frac{1}{3}\pi(8)^2\times 9=192\pi cm^3$

ب) شعاع قاعده‌ی نیم‌کره مساوی شعاع قاعده‌ی استوانه است؛ یعنی: $r=8cm$. پس داریم:

حجم نیم‌کره $=\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi(8)^3=\frac{1024\pi}{3}cm^3$

پ) داریم:

(حجم نیم‌کره + حجم مخروط) − حجم استوانه = حجم موردنظر

اما، حجم استوانه $=\pi r^2h=\pi(8)^2\times 30=1920\pi cm$

پس:

حجم موردنظر $=1920\pi-(192\pi+\frac{1024\pi}{3})=1920\pi-\frac{1600\pi}{3}$

$\Rightarrow$ حجم موردنظر $=\frac{4160\pi}{3}cm^3$

حل مسائل حسابان

حل ۱.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{x^2+11}-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt[3]{x^2+11}-3}\times\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}\times\frac{\sqrt[3]{(x^2+11)^2}+3\sqrt[3]{x^2+11}+9}{\sqrt[3]{(x^2+11)^2}+3\sqrt[3]{x^2+11}+9}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt[3]{(x^2+11)^2}+3\sqrt[3]{x^2+11}+9)}{(x^2+11-27)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\frac{2(x-4)(27)}{(x-4)(x+4)(6)}=\frac{9}{8}$$

حل ۲. چون تابع در صفر پیوسته است، پس حد تابع برابر $f(0)$ است:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^3-4x^2+2x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x^3-4x^2+2x}\times\frac{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4}{\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+8-8}{x(x^2-4x+2)(\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{(x^3+8)}+4)}$$

$$=\frac{1}{2(4+4+4)}=\frac{1}{24}$$

حل ۳.

$$f'(x)=16(1+\tan^2 4x)\tan^3 4x-4(1+\cot^2 2x).\cot 2x$$

$$f'(\frac{\pi}{12})=16(1+\tan^2\frac{\pi}{3})\tan^3\frac{\pi}{3}-4(1+\cot^2\frac{\pi}{6}).\cot\frac{\pi}{6}$$

$$f'(\frac{\pi}{12})=16(1+3)(3\sqrt{3})-4(1+3)\sqrt{3}=176\sqrt{3}$$

حل ۴.

$f(x)=ax^3+bx^2+c \Rightarrow$

$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$

اولاً $6a+2b=0$

$(1,1)\in f \Rightarrow a+b+c=1$

$(0,-1)\in f \Rightarrow 0+0+c=-1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

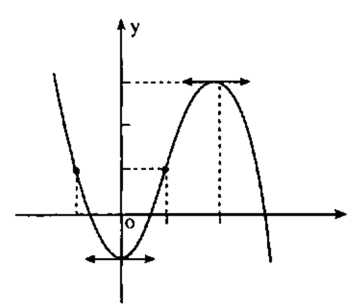
$a+b-1=1 \Rightarrow a+b=2$, $-1\begin{cases}3a+b=0\\a+b=2\end{cases}$

$2a=-2 \Rightarrow \boxed{a=-1}$; $-1+b=2 \Rightarrow \boxed{b=3}$

ثانیاً $f(x)=-x^3+3x^2-1 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+6x=0$

طول‌های اکسترمم نسبی $-3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,2$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	-1	↗	1	↗		↘	-1	↘	$-\infty$



حل ۵.

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $O'\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ مجانب قائم / مجانب افقی $A\begin{vmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{vmatrix}$

اولاً: مجانب قائم $cx+d=0$ $c+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-c}$

مجانب افقی $y=\frac{a}{c} \Rightarrow 1=\frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{d=c}$

$(0,\frac{1}{2})\in y \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{b}{d} \Rightarrow d=2b \Rightarrow -c=2b \Rightarrow \boxed{b=-\frac{c}{2}}$

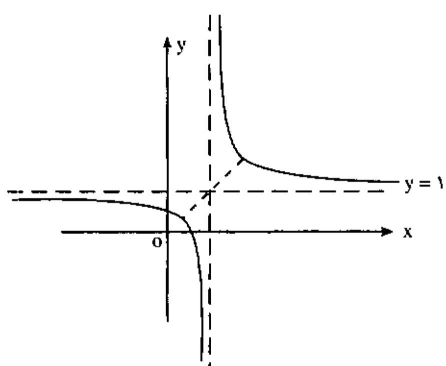
$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y=\frac{cx-\frac{c}{2}}{cx-c}=\frac{2cx-c}{2cx-2c}=\frac{c(2x-1)}{c(2x-2)} , \ c\neq 0$$

ثانیاً:

$y=\frac{2x-1}{2x-2}$ $\begin{cases}x=1 : \text{مجانب قائم}\\ y=1 : \text{مجانب افقی}\end{cases}$

$y'=\frac{-2}{(2)(-2)^2}<0$, $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$, $y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	||	$-$	
y	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	5	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1



حل ۶.

$y=-x^2+7x \Rightarrow y'_x=-2x+7$ $A\begin{vmatrix}\alpha\\-\alpha^2+7\alpha\end{vmatrix}$ $m=-2\alpha+7$

$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y+\alpha^2-7\alpha=(-2\alpha+7)(x-\alpha)$

$p(0,1)$; $1+\alpha^2-7\alpha=(-2\alpha+7)(-\alpha)$

$\Rightarrow 1+\alpha^2-7\alpha=2\alpha^2-7\alpha$

$\Rightarrow 1+\alpha^2=2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm 1$ طول‌های نقاط تماس

$\left.\begin{array}{l}\alpha=1 ;\ y-6=5(x-1) \Rightarrow y=5x+1\\ \alpha=-1 ;\ y+8=9(x+1) \Rightarrow y=9x+1\end{array}\right\}$ معادله‌های مماس‌ها

حل ۷.

$$f(x)=\begin{cases}ax^3+bx , & x\geq 2\\ x^2-4x , & x<2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3ax^2+b , & x\geq 2\\ 2x-4 , & x<2\end{cases}$$

$f'_+(2)=f'_-(2) \Rightarrow 12a+b=4-4 \Rightarrow 12a+b=0$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow 8a+2b=4-8 \Rightarrow 8a+2b=-4$

$\begin{cases}12a+b=0\\ -4a-b=2\end{cases} \Rightarrow 8a=2 \Rightarrow$

$\boxed{a=\frac{1}{4}}$, $3+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-3}$

حل ۸ .

$$۴\sin^۲ x - ۲(\sqrt{۲}+۱)\sin x + \sqrt{۲} = ۰$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = (\sqrt{۲}+۱)^۲ - ۴\sqrt{۲} = (\sqrt{۲}-۱)^۲$$

$$\sin x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{۲}+۱ \pm \sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}}{۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}+۱ \pm (\sqrt{۲}-۱)}{۴}$$

الف) $\sin x = \frac{\sqrt{۲}+۱+\sqrt{۲}-۱}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}}$$

ب) $\sin x = \frac{\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}+۱}{۴} = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}}$$

حل۹ . فرض می‌کنیم x و y ابعاد مستطیل باشند و S مساحت و P محیط آن باشد .

$$S = x.y = ۲۲۵ \Rightarrow y = \frac{۲۲۵}{x} \quad , \quad x, y > ۰$$

محیط مستطیل $P = ۲(x+y) \Rightarrow P = ۲(x + \frac{۲۲۵}{x})$

$$P(x) = ۲(\frac{x^۲ + ۲۲۵}{x}) \Rightarrow P'(x) = ۲ \times \frac{x^۲ - ۲۲۵}{x^۲} = ۰$$

$$x^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow x = ۱۵ \quad x > ۰$$

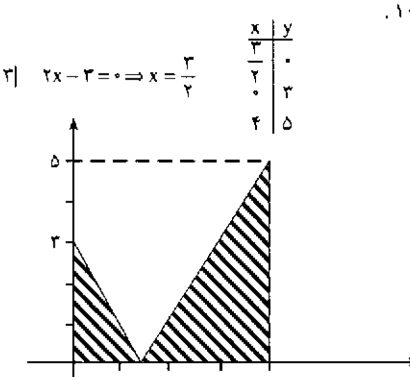
به کمک جدول یا $P''(x)$ مشخص می‌شود که $x = ۱۵$ طول می‌نیمم نسبی تابع p است .

متر $MinP = ۲(\frac{۲۲۵+۲۲۵}{۱۵}) = ۲(\frac{۴۵۰}{۱۵}) = ۲(۳۰) = ۶۰$

حل ۱۰ .

$y = |۲x - ۳| \quad ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

x	y
$\frac{۳}{۲}$	۰
۲	۱
۰	۳
۴	۵



$$\int_۰^۴ |۲x-۳|dx = \int_۰^{\frac{۳}{۲}} |۲x-۳|dx + \int_{\frac{۳}{۲}}^۴ |۲x-۳|dx$$

واحد مربع $= \frac{۳ \times \frac{۳}{۲}}{۲} + \frac{\frac{۵}{۲} \times ۵}{۲} = \frac{۹}{۴} + \frac{۲۵}{۴} = \frac{۳۴}{۴} = \frac{۱۷}{۲}$

حل سؤالات جبر و احتمال

۱ . الف)

$$x=1:\ \frac{1}{2^1}=\frac{2^2-1-2}{2^1}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

فرض استقرا : $n=k:\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}$

حکم استقرا : $n=k+1:\underbrace{\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{k}{2^k}}_{\text{طبق فرض}:\ \frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$

$$=\frac{2^{k+1}-k-2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+2}-2k-4+k+1}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{2^{k+2}-(k+1)-2}{2^{k+1}}$$

ب)

$$n=2:\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}>\frac{13}{24}\Rightarrow\frac{7}{12}>\frac{13}{24}\Rightarrow\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$

فرض استقرا : $n=k:\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$

حکم استقرا : $n=k+1:\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k+1+k-1}+\frac{1}{k+1+k}+\frac{1}{k+1+k+1}>\frac{13}{24}$

به عبارت سمت چپ حکم، $\frac{1}{k+1}$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>\frac{13}{24}$$

اکنون با توجه به فرض، مجموع همه‌ی جملات رشته‌ی بالا به‌جز سه جمله‌ی آخر، از $\frac{13}{24}$ بزرگ‌تر است. سپس کافی است نشان دهیم، مجموع این سه جمله عددی مثبت است؛ یعنی نشان دهیم:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$$

و این موضوع را با استدلال برگشتی نشان می‌دهیم:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{1}{k+1}\Leftrightarrow\frac{2k+2+2k+1}{2(k+1)(2k+1)}>\frac{1}{k+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{4k+3}{2(2k+1)}>1\Leftrightarrow 4k+3>k+2\Leftrightarrow 1>0$$

همه‌ی مراحل بالا برگشت‌پذیرند و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$$

با افزودن این نابرابری به نابرابری فرض، حکم نتیجه می‌شود.

۲ . الف) صحیح است. با استدلال استنتاجی اثبات می‌کنیم:

$$a=\frac{p}{q},p,q\in z,\ q\neq 0\quad b=\frac{p'}{q'},p',q'\in z,q'\neq 0\Rightarrow$$

$$ab=\frac{pp'}{qq'}=\frac{p''}{q''},p'',q''\in z,q''=qq'\neq 0\Rightarrow ab\in Q$$

ب) صحیح است و با برهان خلف آن را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم:

$a\in Q$ و $a\neq ۰$ و $b\notin Q$. و نیز فرض کنیم: $ab\in Q$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$a=\frac{p}{q}, p,q\in Z,\ \ p,q\neq ۰,\ \ ab=\frac{p'}{q'}, p',q'\in Z, q'\neq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{p'}{q'}=\frac{p}{q}.b\Rightarrow b=\frac{\frac{p'}{q'}}{\frac{p}{q}}=\frac{p'q}{q'p}=\frac{p''}{q''}, p'',q''\in Z,$$

$q''\neq ۰\Rightarrow\ b\in Q$ (تناقض، زیرا: $b\notin Q$)

ج) نادرست است. مثال نقض:

$$\sqrt{۲}\notin Q,\ \ \sqrt{۸}\notin Q,\ \ \sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۶}=۴\in Q$$

۳. باقی‌مانده‌های عددهای طبیعی بر ۲۰، عبارتند از: ۱۹ و ... و ۲ و ۱ و ۰ یعنی ۲۰ نوع باقی‌مانده داریم. سپس برای آن‌که لااقل ۶ عضو دارای یک باقی‌مانده باشند، باید لااقل ۱+۲۰×۵، یعنی ۱۰۱ عضو داشته باشیم تا طبق اصل لانه‌ی کبوتری به حکم برسیم.

۴. $x=\pm ۲$ یا $x=۰$ $\Leftarrow$ $x^۳=۴x\Rightarrow x^۳-۴x=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow$

$$\Rightarrow A=\{۰,۲,-۲\},\ \ x^۲\le ۳x\Rightarrow x^۲-۳x\le ۰\Rightarrow$$

$$x(x-۳)\le ۰\Rightarrow ۰\le x\le ۳\Rightarrow B=\{۰,۱,۲,۳\}$$

زیرمجموعه‌های خالص $A\cap B$: $\quad A\cap B=\{۰,۲\}\Rightarrow\{۰\},\{۲\},\varnothing$

۵. الف) $A\Delta(B\cap C)=[(A-(B\cap C)]\cup[(B\cap C)-A)]$

$=[A\cap(B\cap C)']\cup[(B\cap C)\cap A']$

$=[A\cap(B'\cup C')]\cup[B\cap(C\cap A')]$

$=[(A\cap B')\cup(A\cap C')]\cup[B\cap(C\cap A')]$

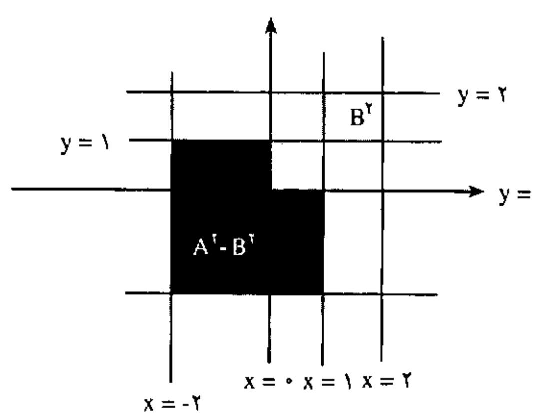
$=(A-B)\cup(A-C)\cup(B\cap(C-A))$

ب) $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow(A\cap B)'=A'\Rightarrow$

$A'\cup B'=A'\Rightarrow B'\subseteq A'$

$$A^۲=\{(x,y)|x\in A, y\in A\}=\{(x,y)|-۲\le x\le ۱,-۲\le y\le ۱\}$$

$$B^۲=\{(x,y)|x\in B, y\in B\}=\{(x,y)|۰\le x\le ۲,۰\le y\le ۲\}$$



۷. اولاً:

خاصیت انعکاسی: $(x,y)R(x,y): \frac{x^۲-x^۲}{۲}=y^۲-y^۲\Rightarrow ۰=۰$

خاصیت تقارنی: $(x,y)R(z,t)\Rightarrow\frac{x^۲-z^۲}{۲}=y^۲-t^۲\Rightarrow\frac{z^۲-x^۲}{۲}=t^۲-y^۲$

$\Rightarrow(z,t)R(x,y)$

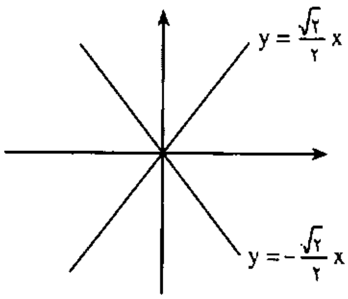
خاصیت ترایایی (تعدی): $(x,y)R(z,t),(z,t)R(r,s)\Rightarrow$

$$\begin{cases}\frac{x^۲-z^۲}{۲}=y^۲-t^۲\\ \frac{z^۲-r^۲}{۲}=t^۲-s^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{x^۲-z^۲}{۲}+\frac{z^۲-r^۲}{۲}=y^۲-t^۲+t^۲-s^۲$$

$$\Rightarrow\frac{x^۲-r^۲}{۲}=y^۲-s^۲\Rightarrow(x,y)R(r,s)$$

ثانیاً: $(۰,۰)R(x,y)\Rightarrow\frac{۰-x^۲}{۲}=۰-y^۲\Rightarrow y^۲=\frac{x^۲}{۲}$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}x$$



کلیه‌ی نقاط روی خطوط $y=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}x$ با $(۰,۰)$ در رابطه هستند.

۸. الف) $S=\{(x,y)|x,y\in \mathbb{N},\ x,y\le ۶\}$

ب)

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳)\\(۲,۴),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۵,۱)\}$$

$$B=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵)\\(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

$$A'\cap B'=(A\cup B)'=\{(۱,۶),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۴),\\(۴,۶),(۵,۳),(۵,۲),(۵,۵),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۶)\}$$

۹. الف) $P(A)=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{\frac{۵!}{۳!۲!}}{\frac{۹!}{۳!۶!}}=\frac{۵\times۲}{۳\times۴\times۷}=\frac{۵}{۴۲}$

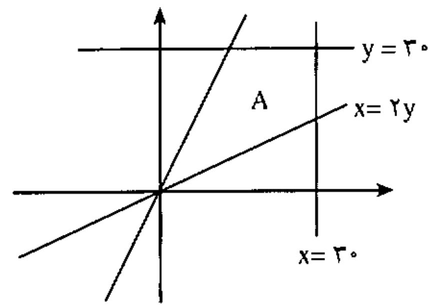
ب) $\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴+۶\times۵}{۳\times۴\times۷}=\frac{۱۷}{۴۲}$

۱۰.

$$S=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ ۰\le x,y\le ۳۰\},$$

$$A=\{(x,y)|(x,y)\in S, x\le ۲y, y\le ۲x\}$$

$$P(A)=\frac{S_A}{S_S}=\frac{۹۰۰-۲\times۲۲۵}{۹۰۰}=\frac{۴۵۰}{۹۰۰}=\frac{۱}{۲}$$



۱۱.

$$\begin{cases} P(A)=2P(B)=\frac{1}{2}P(M_1)\Rightarrow \\ P(A)+P(B)+P(M_1)=P(A)+\frac{P(A)}{2}+2P(A)=1 \\ P(C)=P(D)=2P(M_2)\Rightarrow \\ P(C)+P(D)+P(M_2)=P(D)+P(D)+\frac{P(D)}{2}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{2}{7},\ \ P(A')=\frac{5}{7},\ \ P(D)=\frac{2}{5}$$

۱۲. پیشامد مضرب ۳ بودن را با A، پیشامد مضرب ۷ بودن را با B و پیشامد مضرب ۱۱ بودن را با C نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$P[(A\cup B)\cap C']=P[(A\cap C')\cup(B\cap C')]$$
$$=P[(A-C)\cup(B-C)]$$
$$=P(A-C)+P(B-C)-P(A\cap C'\cap B\cap C')$$
$$=P(A-C)+P(B-C)-P((A\cap B)-C)$$
$$=P(A)-P(A\cap C)+P(B)_P(B\cap C)-$$
$$P(A\cap B)+P(A\cap B\cap C)=$$

$$\frac{\left[\frac{100}{3}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{33}\right]}{100}+\frac{\left[\frac{100}{7}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{77}\right]}{100}-\frac{\left[\frac{100}{21}\right]}{100}$$
$$+\frac{\left[\frac{100}{3\times7\times11}\right]}{100}=0/39$$

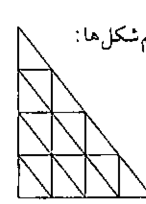
هندسه‌ی ۲

۱. داریم:

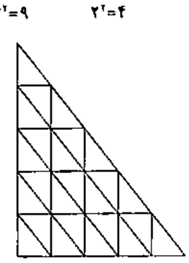
الف)

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مثلث‌های کوچک	$1^2=1$	$2^2=4$	$3^2=9$

ب) رسم شکل‌ها:



(۴)



(۵)

شماره شکل	۳	۴	۵
تعداد مثلث‌های کوچک	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$

پ) در شکل nام، تعداد مثلث‌های کوچک مساوی n^2 است.

ت) مساحت مثلث شکل ۱ $=\frac{1}{2}(2\times4)=4cm^2$

مساحت شکل nام $=n^2\times4=4n^2cm^2$ $\Rightarrow$

۲. می‌دانیم که از هر رأس یک n ضلعی، n-3 قطر می‌گذرد. پس داریم:

تعداد ضلع‌های چند ضلعی داده شده $n=9 \Leftarrow n-3=6$

تعداد قطرهای n ضلعی $=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{9(9-3)}{2}=27$

۳. بنا به ویژگی نیمساز زاویه‌های مثلث داریم:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

اما DB=2x-1 و AB=38, DC=2x+5 پس داریم:

$$\frac{2x-1}{2x+5}=\frac{38}{50}\Rightarrow 100x-50=76x+190\Rightarrow$$
$$100x-76x=190+50\Rightarrow 24x=240\Rightarrow x=10$$

۴. در دو مثلث ABC و ACD داریم:

$$\begin{cases} AB=AC \\ AD=AD \\ B\hat{A}D>C\hat{A}D \end{cases}$$

پس بنا به قضیه‌ی لولا نتیجه می‌شود: BD>DC.

۵. چهارضلعی AB'DC' متوازی‌الاضلاع است، زیرا ضلع‌های آن دو به دو با هم موازی‌اند. بنابراین: $DB'=AC'$ و $DC'=AB'$. از طرف دیگر، بنا به فرض AB>AC، پس: $\hat{C}>\hat{B}$. در مثلث DBB'، $B\hat{D}B'=\hat{C}>\hat{B}$، پس: $BB'>DB'$ (۱).

از طرف دیگر، $AB'=DC'$(۲). از جمع کردن طرف‌های نظیر رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$BB'+AB'>DB'+DC'\Rightarrow AB>DB'+DC'$$

یا

$$DB'+DC'<AB(I)$$

همچنین، در مثلث DCC'، $C\hat{D}C'=\hat{B}<\hat{C}$، پس: $DC'>CC'$(۳).

از طرف دیگر، $DB'=AC'$ (۴). از جمع کردن طرف‌های نظیر رابطه‌ی (۳) و (۴) داریم:

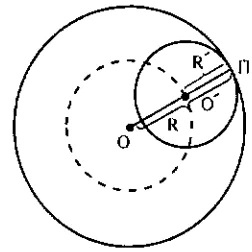
$$DC'+DB'>AC'+CC'\Rightarrow DC'+DB'>AC\ (II)$$

از رابطه‌های (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$AC<DB'+DC'<AB$$

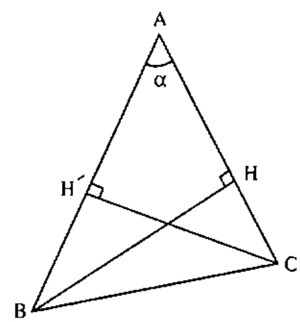
۶. فرض می‌کنیم، دایره‌ی $C'(O',R')$ یکی از دایره‌های موردنظر، یعنی دایره‌ای باشد به شعاع R' که بر دایره‌ی C(O و R) مماس درون است. از O به O' وصل می‌کنیم. می‌دانیم که:

مقدار ثابت $OO' = R - R'$



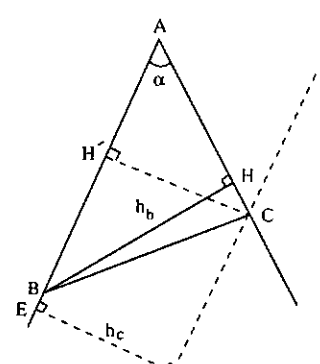
یعنی نقطه‌ی O' از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی ثابتی قرار دارد، پس مکان هندسی نقطه‌ی O'، دایره‌ای به مرکز O به شعاع $R - R'$ است.

۷. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد.

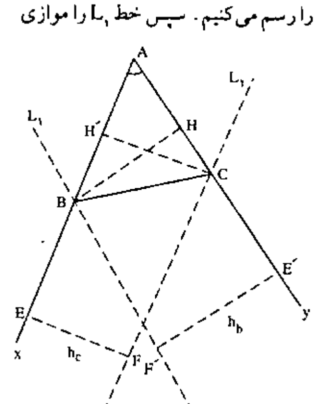


ارتفاع‌های BH و CH' را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\hat{A} = \alpha$، $BH=h_b$ و $CH' = h_c$ مقدارهای معلومی هستند، بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH' به دلیل معلوم بودن یک زاویه‌ی حاده ($\hat{A} = \alpha$) و ضلع‌های روبه‌روی آن (BH و CH') قابل رسم هستند. همچنین می‌توان گفت که رأس B از ضلع AC به فاصله‌ی ثابت h_b و نقطه‌ی C از ضلع AB به فاصله‌ی ثابت $CH=h_c$ قرار دارد. پس برای رسم مثلث ABC به یکی از راه‌های زیر می‌توان عمل کرد:

راه اول: مثلث قائم‌الزاویه ABH ($\hat{H} = 90^\circ$) را با معلوم بودن $\hat{A} = \alpha$ و ضلع $BH=h_b$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه خطی موازی ضلع AB و به فاصله‌ی h_c از آن می‌کشیم. برای این کار از نقطه‌ی دلخواهی مانند E واقع بر خط AB، عمود EF را به طول $EF=h_c$ اخراج می‌کنیم و از F خطی موازی ضلع AB می‌کشیم. نقطه‌ی برخورد این خط با خط AH، نقطه‌ی C، رأس سوم مثلث است. از C به B وصل می‌کنیم تا مثلث ABC جواب مسأله به دست آید.



راه دوم: زاویه‌ی $x\hat{A}y = \alpha$ را رسم می‌کنیم. سپس خط L_1 را موازی Ay و به فاصله‌ی h_b از آن، و خط L_2 را موازی Ax و به فاصله‌ی h_c از آن می‌کشیم تا به ترتیب Ax و Ay را در نقطه‌های B و C قطع کنند. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



سؤال: آیا روش دیگری برای رسم مثلث ABC وجود دارد؟ اگر راه‌حل دیگری دارد، بنویسید و به نشانی مجله‌ی برهان دبیرستان بفرستید.

۸. نقطه‌ی M رأس زاویه‌ای برونی نسبت به دایره است، زیرا رأس زاویه‌ای است که از برخورد قاطع BA و مماس TM به وجود آمده است. پس داریم:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BT}-\widehat{AT}}{2} \Rightarrow 45^\circ = \frac{170^\circ - x}{2} \Rightarrow 90^\circ = 170^\circ - x$$
$$\Rightarrow x = 170^\circ - 90^\circ = 80^\circ \Rightarrow x = \widehat{AT} = 80^\circ$$

از طرف دیگر داریم:

$$\widehat{AB}+\widehat{BT}+\widehat{TA} = 360^\circ \Rightarrow y + 170^\circ + 80^\circ = 360^\circ \Rightarrow$$
$$y = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ \Rightarrow y = 110^\circ$$

۹. شعاع دایره را R می‌نامیم. داریم:

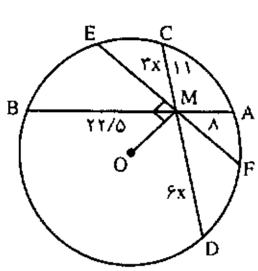
$$AB = 16\sqrt{3}cm, R = 16cm, \alpha < 90^\circ, \sin\alpha = \frac{AB}{2R}$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{16\sqrt{3}}{2\times 16} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$
$$OH = R\,cin\alpha = 16\times\cos 60^\circ = 16\times\frac{1}{2} = 8 \Rightarrow OH = 8cm$$

۱۰. الف) بنابر رابطه‌ی طولی در دایره داریم:

$$MA.MB = MC.MD \Rightarrow 8\times 22.5 = (3x+1)(6x) \Rightarrow$$
$$18x^2 + 6x - 180 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{6}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm 19}{3} \Rightarrow x = \frac{-20}{3} < 0,\ \ x = 6$$

ب) کوچک‌ترین وتری که از نقطه‌ی M در دایره رسم می‌شود، وتری است که در نقطه‌ی M بر OM عمود است. این وتر را رسم می‌کنیم و EF می‌نامیم. می‌دانیم که ME=MF و داریم:

$$ME.MF = MA.MB \Rightarrow ME^2 = 8\times 22.5 \Rightarrow ME^2 = 180$$
$$\Rightarrow ME = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \Rightarrow EF = 2ME = 12\sqrt{5}$$



۱۱. باید داشته باشیم:

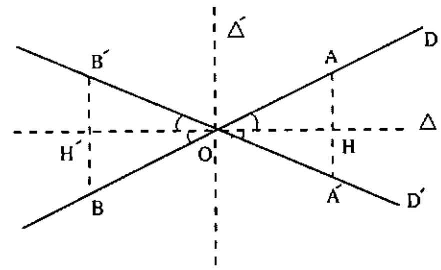
$$\begin{cases} x - y + 1 = -6 \\ 2x + y + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -7 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$

پس نقطه‌ی خواسته شده (۶ و ۱−) است.

۱۲. اگر خط $D: ax + by + c = 0$ تصویر خط $D: ax' + b'y + c' = 0$ تحت یک بازتاب محوری باشد، معادله‌ی محورهای بازتاب که در واقع همان

نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D′ هستند، به صورت زیر است:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$



در این مسأله داریم:

$$\frac{2x+y-13}{\sqrt{4+1}=\sqrt{5}}=\pm\frac{2x+y-5}{\sqrt{4+1}=\sqrt{5}}\Rightarrow 2x+y-13=\pm(2x+y-5)$$

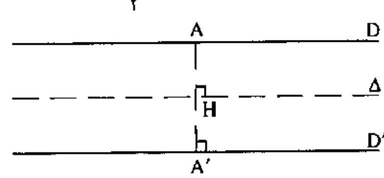
$$\Rightarrow 2x+y-13=2x+y-5\Rightarrow -13\neq -5$$

$$2x+y-13=-2x-y+5\Rightarrow 4x+2y-18=0$$

معادله‌ی محور بازتاب $\Rightarrow 2x+y-9=0$

نکته: اگر دو خط D و D′ موازی باشند و معادله‌ آن‌ها به صورت $D:ax+by+c=0, D':ax+by+c'=0$ باشد، محور بازتاب آن‌ها نیز با آن‌ها موازی است و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$\Delta: ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$



در این مسأله داریم:

$$2x+y+\frac{-13-5}{2}=0\Rightarrow 2x+y-9=0$$

۱۳. روش کلی: دو نقطه‌ی دلخواه A و B از خط Δ را انتخاب می‌کنیم، تصویرهای آن‌ها تحت تبدیل داده شده را، A′ و B′ می‌نامیم و آن‌گاه معادله‌ی خطی را که از دو نقطه‌ی A′ و B′ می‌گذرد، می‌نویسیم. داریم:

$$\Delta: 3x-4y-12=0\quad x=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی }\Delta}0-4y-12=0$$

$$\Rightarrow y=-3\Rightarrow A=(0,-3)\in\Delta$$

$$y=0\xrightarrow{\text{در معادله‌ی }\Delta}3x-12=0$$

$$\Rightarrow x=4\Rightarrow B=(4,0)\in\Delta$$

$$T(x,y)=(2x,2y)$$

$$\Rightarrow A'=(0,-6)\ ,\ B'=(8,0)\Rightarrow A'B': y+6=\frac{0+6}{8-0}(x-0)$$

$$\Rightarrow A'B': y+6=\frac{3}{4}x\qquad A'B': 3x-4y-24=0$$

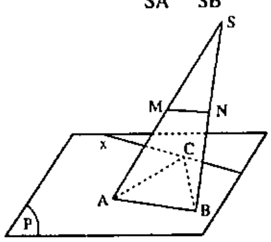
روش خاص: تبدیل داده شده تجانس است و مجانس خط راست، خط راستی موازی آن است. پس کافی است، تصویر یک نقطه از خط Δ را به دست آوریم و آن‌گاه معادله‌ی خطی را که از این نقطه موازی Δ رسم می‌شود، بنویسیم. داریم:

$$A=(0,-3)\in\Delta\Rightarrow A'=(0,-6), m_{\Delta}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow\Delta': y+6=\frac{3}{4}(x-0)\Rightarrow 4y+24=3x$$

معادله‌ی تصویر خط داده شده $\Delta': 3x-4y-24=0$

۱۴. در صفحه‌ی SAB، از رابطه‌ی $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$ نتیجه می‌شود که MN موازی AB است و چون AB در صفحه‌ی P قرار دارد، پس MN با صفحه‌ی P موازی است. در نتیجه، بنا به قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۱۳۸ کتاب هندسه‌ی ۲، هر صفحه‌ای که بر MN بگذرد،



صفحه‌ی P را در خطی موازی MN قطع می‌کند. پس صفحه‌ی MNC که بر خط MN گذشته است، صفحه‌ی P را در خطی موازی MN قطع می‌کند. این خط از نقطه‌ی C که به هر دو صفحه‌ی P و CMN تعلق دارد، می‌گذرد.

۱۵. از رابطه‌های AM=BM، AN=BN و AQ=BQ نتیجه می‌شود که نقطه‌های M، N و Q روی صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند؛ پس در یک صفحه‌اند.

۱۶. بنا به قضیه‌ی تالس در فضا داریم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{KR}=\frac{PQ}{QR}$$

اما بنا به فرض AB=BC، پس $\frac{AB}{BC}=1$ و در نتیجه $\frac{AK}{KR}=\frac{PQ}{QR}=1$؛ یعنی: AK=KR و PQ=QR. به عبارت دیگر، K وسط AR و Q وسط PR است. بنابراین، در مثلث ACR داریم:

$BK=\frac{1}{2}CR$ (۱) (پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است). همچنین، در مثلث APR داریم:

$KQ=\frac{1}{2}AP$ (۲).

از جمع کردن طرف‌های نظیر رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$BK+KQ=\frac{1}{2}(CR+AP)$ (۳)

از طرف دیگر، در مثلث BKR داریم:

$BQ<BK+KQ$ (۴)

از رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$BQ<\frac{1}{2}(CR+AP)$ یا $BQ<\frac{1}{2}(AP+CR)$

و حکم مسأله ثابت شد.

حساب هندی در قدیم با تخت و تراب (خاک) انجام می‌یافته است. به این معنی که برای انجام دادن اعمال حساب مقداری خاک یا شن نرم روی تخته یا لوح مسطحی می‌گستردند و ارقام را به وسیله‌ی نوک میله‌ای روی آن می‌نوشتند. و اعمال فرعی را در ذهن انجام داده هر وقت لازم می‌شد رقمی را محو و رقم دیگری را به جای آن اثبات می‌کردند. یعنی به جای رقم محو شده از نو رقم دیگری می‌نوشتند. به کار بردن این روش به جهات واضحی مورد پسند نبوده است.

ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی کوشیدند که به جای محاسبه با تخت و تراب محاسبه به وسیله‌ی کاغذ و قلم را به کار برند. از جمله‌ی این ریاضیدانان یکی از همین ابوالحسن اقلیدسی است که در مقدمه‌ی کتاب خود نوشته است: «در فصل چهارم اعمال حساب هندی را که با تخت انجام می‌شود با روشی شرح داده‌ام ک در آن احتیاج به تخت و تراب یا محو کردن و اثبات کردن ارقام نباشد و همه‌ی این اعمال روی صفحه‌ی کاغذ انجام گیرد.»

اقلیدسی برای اینک در انجام دادن عملیات حساب احتیاج به محو و اثبات ارقام نباشد و بتوان آن اعمال را با کاغذ و قلم انجام داد تغییراتی در قاعده‌های اعمال داده است و می‌توان گفت که این تغییرات نخستین قدم‌هایی است که در این راه برداشته شده است.

اقلیدسی در باب سی و دوم از فصل چهارم که آخرین باب کتاب است به محاسبه‌ی

$$\sum^{۶۳} ۲^i = ۱+۲+\cdots+۲^{۶۳}$$

پرداخته. عنوان این باب در کتاب وی چنین است: «فی اضعاف الواحد رابعاً و ستین مره».

اهمیت کتاب حساب اقلیدسی

کتاب الفصول فی الحساب الهندی تألیف اقلیدسی از چند جهت دارای اهمیت است:

اول اینکه این کتاب قدیمی‌ترین کتاب حساب دوره‌ی اسلامی است که متن اصلی آن به دست ما رسیده است. البته در حدود صد سال پیش از اقلیدسی کتابی در حساب توسط خوارزمی (ابوعبدالله محمدبن موسی) نوشته شده بود که اگر چه ترجمه‌ی لاتینی آن باقی مانده اما متن عربی آن از بین رفته است. بعد از اقلیدسی هم چندین کتاب درباره‌ی حساب هندی توسط ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی تألیف شد که از آن جمله است کتاب عیون الاصول فی الحساب الهندی به عربی تألیف کوشیاربن لبان جیلی متوفی به سال ۳۹۱ و کتاب المقنع فی الحساب الهندی به عربی توسط علی بن احمد نسوی متوفی به سال ۴۷۳ و کتاب جوامع الحساب بالتخت و التراب به عربی توسط نصیرالدین طوسی متوفی به سال ۶۷۲ و کتاب شمارنامه به فارسی تألیف محمدبن ایوب طبریدر نیمه‌ی دوم سده‌ی پنجم و جز اینها. اما کتاب اقلیدسی از همه‌ی اینها مفصل‌تر و جامع‌تر و حاوی مطالبی است که در کتاب‌های دیگر دیده نمی‌شود.

اهمیت دوم حساب اقلیدسی این است که ظاهراً وی چنان که خود ادعا کرده است نخستین ریاضیدانی است که استخراج کعب از اعداد منطق و اصم را به طور واضح ذکر و روش آن را بیان کرده است. تا بیش از اینکه کتاب حساب اقلیدسی در دسترس مورخان ریاضی قرار گیرد آنان گمان می‌کردند که نخستین کسی که در دوره‌ی اسلامی روش استخراج کعب را بیان کرده و شرح داده کوشیاربن لبان جیلی بوده است که در حدود نیم قرن بعد از اقلیدسی می‌زیسته است.

اقلیدسی و کسرهای اعشاری

مهم‌ترین امتیاز و اهمیت کتاب حساب اقلیدسی در این است که وی در حدود پانصد سال پیش از غیاث‌الدین جمشید کاشانی کسرهای اعشاری را به کار برده است.

ابوالحسن اقلیدسی اگر چه درباره‌ی اختراع کسرهای اعشاری ادعایی نکرده اما در چند مورد، به شرح زیر، کسرهای اعشاری را به کار بسته و برای متمایز ساختن قسمت صحیح عدد از قسمت اعشاری آن یک خط کوچک (به جای ممیز) در بالای رقم یکان قسمت صحیح عدد قرار داده است:

اولاً در مورد تقسیمات متوالی عدد ۱۳ بر عدد ۲ نتایج زیرا را متوالیاً به دست آورده است: ۶/۵ و ۳/۲۵ و ۱/۶۲۵ و ۰/۸۱۲۵ سپس برای از نو به دست آوردن عدد ۱۳ نتایج فوق را متوالیاً در ۲ ضرب کرده است.

ثانیاً در جای دیگری از کتاب خود برای آنک به عدد ۱۲۵ متوالیاً یک دهم آن را بیفزاید چنین عمل کرده است:

۱۶۳/۳۵	۱۴۸/۵	۱۳۵
۱۶/۳۳۵	۱۴/۸۵	۱۳/۵
۱۷۹/۶۸۵	۱۶۳/۳۵	۱۴۸/۵

ثالثاً در محل دیگری برای استخراج جذر یا کعب تقریبی از عدد a قاعده‌های زیر را به کار بسته است:

$$\sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{a \times ۱۰^{۳}}}{۱۰} \quad , \quad \sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt{a \times ۱۰^{۲}}}{۱۰}$$

البته ریاضیدانان دیگری نیز این قاعده را به کار برده‌اند و آن را استخراج جذر یا کعب به اصفار نامیده‌اند. اما همه‌ی آنها کسر اعشاری حاصل را به دستگاه شمار شصتگانی تبدیل کرده‌اند. تنها اقلیدسی است که در چند مورد حاصل را در دستگاه شمار اعشاری ثبت کرده است.

خلاصه. از آنچه گذشت می‌توان نتیجه گرفت که البته اقلیدسی در حدود پنج قرن پیش از کاشانی کسرهای اعشاری را در کتاب خود به کار برده و اعمال اصلی را درباره‌ی آنها انجام داده است. با این حال مثل اینکه این کسرها را از پیشینیان خود اخذ کرده باشد به آنها توجهی خاص نداشته و به اهمیت آنها پی نبرده بلکه آنها را در ردیف کسرهای متعارفی و شصتگانی به کار بسته است و پس وی در حدود پنج قرن کسی از کار او اطلاع پیدا نکرده و بنابراین کتاب او در استعمال این کسرها توسط دیگران تأثیری نداشته است. اما کاشانی به قول خود کسرهای اعشاری را به قیاس با کسرهای شصتگان اختراع کرده و نام کسر اعشاری را او بر این کسرها نهاده و آگاهانه و به طور اصولی قاعده‌های عمل با آنها را شرح داده است و آنها را به وجهی پیگیر در محاسبات به کار برده و استعمال آنها را به دیگران توصیه کرده و کتاب مفتاح الحساب او در بسط این کسرها بعد از خود او مؤثر بوده است.

منابع

* برگرفته از کتاب زندگی‌نامه ریاضیدان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی با تلخیص

دفتر انتشارات
کمک آموزشی
برگزار می‌کند

سومین دوره‌ی جشنواره‌ی

عکس رشد

به یاری آفریننده‌ی نقش‌ها

مجلات رشد، وابسته به دفتر انتشارات کمک آموزشی،
سومین دوره‌ی «جشنواره‌ی عکس رشد» را برگزار می‌کنند.

عکاسان بزرگسال و دانش‌آموز هر کدام می‌توانند در دو گرایش:
۱. آموزش و پرورش از نگاه دوربین. ۲. آزاد.
در این جشنواره شرکت کنند.

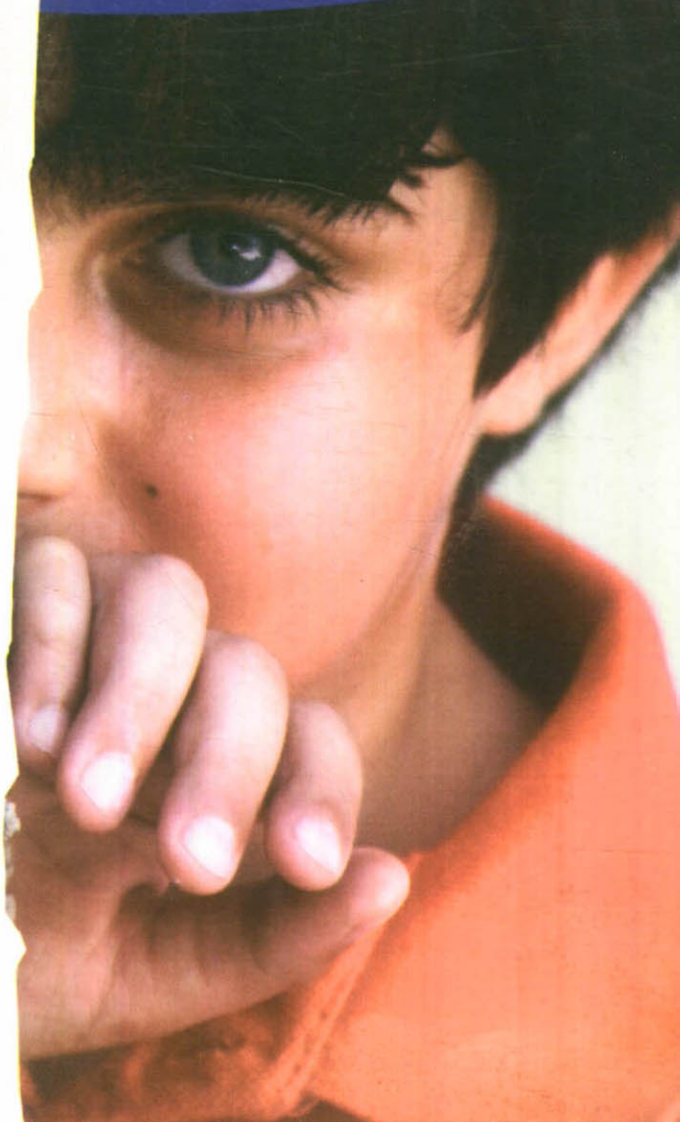
جوایز

۱. جایزه نفر اول هر گرایش، علاوه بر دیپلم افتخار، تندیس و چهار سکه‌ی بهار آزادی است.
۲. به کسانی که رتبه‌ی دوم و سوم هر گرایش را به‌دست آورند، علاوه بر اهدای لوح تقدیر وتندیس، به ترتیب به هر کدام سه و دو سکه‌ی بهار آزادی اهدا خواهد شد.
۳. در هر گرایش بنا به نظر گروه داوری، حداکثر از یک نفر تقدیر می‌شود که هریک از آنان، علاوه بر لوح تقدیر، یک سکه‌ی بهار آزادی دریافت خواهند کرد.
۴. به همه‌ی کسانی که عکسشان به نمایشگاه راه پیدا کند، لوح یادبود، پنج حلقه فیلم عکاسی و برخی از تولیدات دفتر انتشارات کمک آموزشی اهدا می‌شود.
۵. نمایشگاه آثار برگزیده و مراسم اهدای جوایز نفرات برتر، شهریورماه ۱۳۸۵ در تهران برگزار خواهد شد که مکان و زمان دقیق برگزاری مراسم، به موقع به اطلاع شرکت کنندگان و علاقه‌مندان خواهد رسید.

مقررات

۱. مهلت ارسال آثار تا ۱۵ اردیبهشت ۱۳۸۵ است.
۲. هر نفر می‌تواند، حداکثر با پنج قطعه عکس در هر گرایش شرکت کند. (شرکت یک عکاس در هر دو گرایش آزاد است).
۳. ابعاد عکس‌ها باید حداقل ۱۸ × ۱۳ و حداکثر ۳۰ × ۲۰ سانتی‌متر باشد.
۴. عکاسانی که سن آن‌ها کم‌تر از ۱۸ سال است، می‌توانند در گروه دانش‌آموزی، و عکاسانی که سنشان بیش‌تر از ۱۸ سال است، در گروه بزرگسال شرکت کنند.
۵. عکس‌های ارسالی نباید قبلاً در نشریه و یا کتابی به چاپ رسیده باشند.
۶. مسؤولیت درستی اطلاعات مربوط به هر عکس وعکاس آن، بر عهده‌ی شرکت‌کننده خواهد بود.
۷. شرکت‌کنندگان باید برگه‌ای شامل گرایش، شماره، تاریخ و مکان عکاسی و نام عکاس را پشت هریک از عکس‌ها بچسبانند.
۸. در برگه‌ای جداگانه، مشخصات کامل خود را با شماره تلفن تماس و نشانی کامل پستی یادداشت کنید و همراه عکس‌ها به نشانی دبیرخانه‌ی جشنواره بفرستید.
۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی اجازه دارد، عکس‌های دریافتی را به صورت مجموعه عکس و یا به صورت‌های دیگر، از قبیل چاپ در نشریات یا کتاب‌ها و... لزوماً با ذکر نام عکاس، منتشر کند.

عکس‌هایی که به نمایشگاه راه پیدا می‌کنند، بازگردانده نخواهند شد و بقیه‌ی عکس‌ها حداکثر تا پایان آبان ۱۳۸۵ به نشانی فرستندگان، ارسال می‌شوند.
نشانی دبیرخانه‌ی جشنواره‌ی عکس رشد: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن: ۸۸۳۰۵۲۷۹



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مجله ریاضی

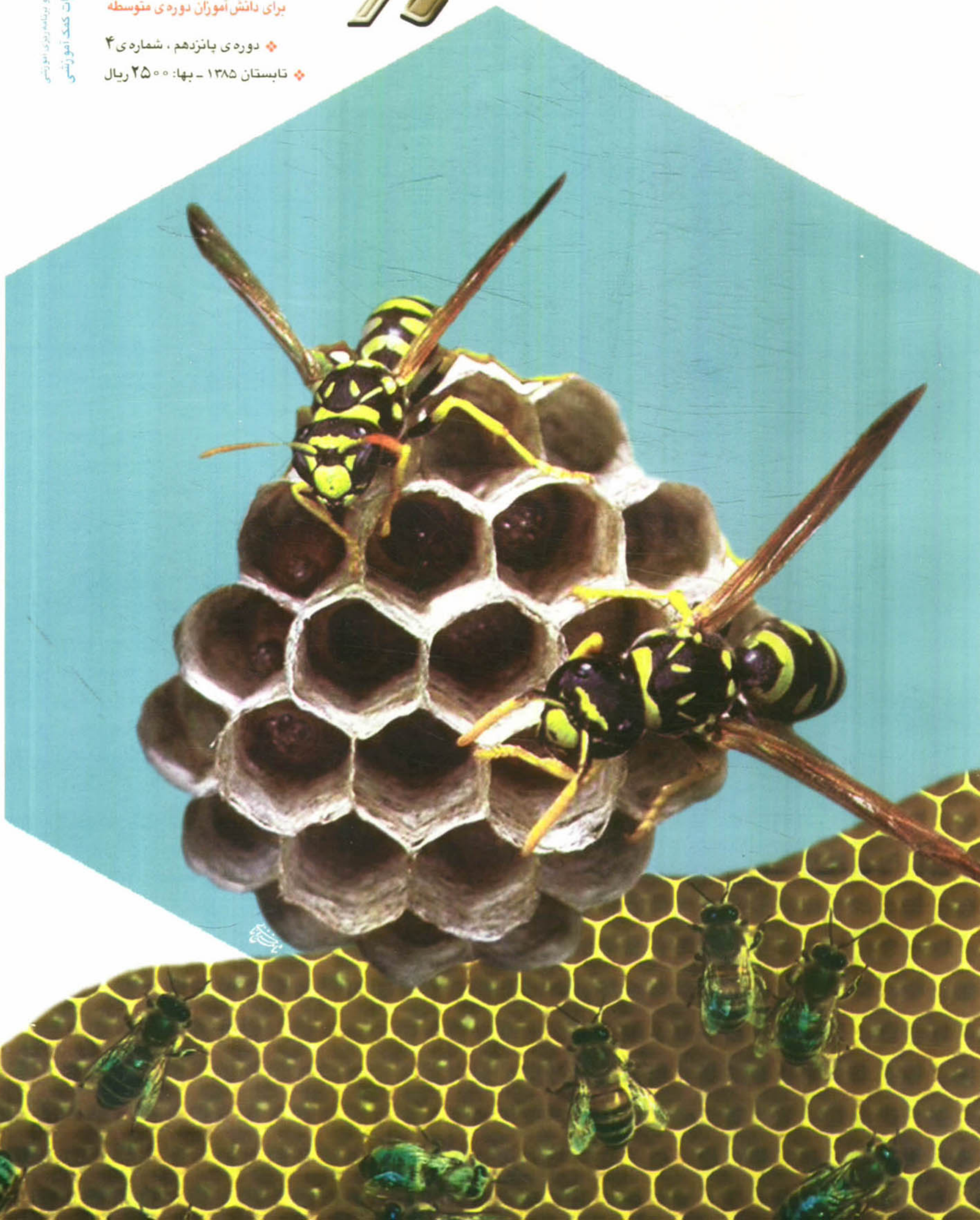
رشد برهان ۵۰

www.roshdmag.org

آموزشی، تحلیلی، اطلاع‌رسانی

برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه

دوره‌ی پانزدهم، شماره‌ی ۴
تابستان ۱۳۸۵ ـ بها: ۲۵۰۰ ریال



ریاضیدان و منجم ایرانی

(نیمهٔ دوم سدهٔ سوم و اوایل سدهٔ چهارم)

نیریزی
ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی



از اهل نیریز فارس و یکی از افاضل ریاضی دانان و منجمان دوره ی اسلامی و به قول ابن ندیم در علم نجوم و به ویژه در علم هیأت انگشت نما بود. مترجمان لاتینی او را اناریتیوس[1] می نامیدند. وی در نیمه ی دوم سده ی سوم و احیاناً در اوایل سده ی چهارم فعالیت علمی داشت و معاصر باالمعتضد خلیفه ی عباسی بود و برخی از تألیفات خود را به نام وی و یا وزرای وی نوشته است. برای مثال رساله ی «فی احداث الجو» را به نام المعتضد و کتاب فی معرفة آلات یعرف بها ابعاد الاشیاء را به نام یکی از وزرای او تألیف کرده است.

متأسفانه از زندگی نیریزی اطلاعی در دست نیست جز آن چه جسته و گریخته در آثار ریاضی دانان دیگر درباره ی تألیفات وی دیده می شود. امّا مسلّم است که آثارش همواره مورد مراجعه و اعتماد ریاضی دانان و منجمان بزرگ بوده است. محققان اروپایی وفات نیریزی را در حدود سال ۳۱۰ دانسته اند.

بیرونی در چندین موضع از قانون مسعودی و آثار الباقیه و افرادالمقال فی امر الظلال از نیریزی نام برده و مسائل و مطالبی از وی نقل کرده و به آرای او استناد نموده است. **عمرخیام** نیز در چند موضع از رساله ی «مصادرات» خود از نیریزی یاد کرده است و **نصیرالدین طوسی** در کتاب شکل القطاع استدلالی از قول نیریزی نقل نموده است. **کمال الدین فارسی** در کتاب تنقیح المناظر نوشته است که در زمان بعضی از خلفا(ظاهراً: المعتضد) قوس قُزَحی دیده شد که طبقه ی سیاهی در آن نمودار بود و این امر خلیفه و اطرافیان او را به وحشت انداخت. پس به ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی شارح مجسطی رجوع کردند و او علّت این امر را بیان کرد.

سارتن نوشته است که نیریزی اصطلاح «ظل معکوس»[2] را که معادل با اصطلاح تانژانت است به عنوان یک خط مثلثاتی مستقل به کار برده است(امّا پیش از وی حبش حاسب نیز این اصطلاح را به کار برده بود) و نیز سارتن رساله ی «اسطرلاب کروی» تألیف نیریزی را اثری استادانه و بهترین کتابی معرفی کرده است که مسلمانان درباره ی اسطرلاب نوشته اند.

ادامه در صفحه ی ۳ جلد

بسم الله الرحمن الرحیم

مجله ریاضی

رشد برهان متوسطه ۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org
آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

● دوره‌ی پانزدهم ● شماره‌ی ۴ ● تابستان ۱۳۸۵ ● شمارگان: ۱۰۰۰۰ نسخه ● مجله ریاضی، برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده ❖ سردبیر: حمیدرضا امیری ❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر ❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی

❖ ویراستار ادبی: کبری محمودی ❖ اعضای هیات تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی استاد پرویز شهریاری ◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)

ISSN 1735 - 4951

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

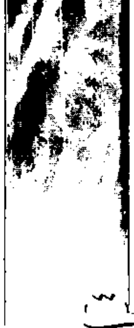
- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

این شماره:

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.

- مجلّه در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰



یادداشت سردبیر

از خلاقیت چه می‌دانید؟ آیا شما آدم خلاقی هستید؟ به نظر شما انسان های خلاق چگونه اند؟ چه شخصیتی دارند؟ شما چه تفاوتی بین هوش و خلاقیت احساس می‌کنید؟ نظرتان راجع به پیشرفت تحصیلی و ارتباط آن با خلاقیت چیست؟ تمامی این سؤال‌ها و جواب هایی که به آنها می‌توان داد به برداشت و تعریف من و شما از هوش، خلاقیت و... بستگی دارد. در اینجا سعی می‌کنیم، اگرچه به طور اجمال، راجع به این مفاهیم اطلاعاتی در اختیار شما قرار دهیم، چه بسا پس از مطالعه ی این نوشته شما به این نتیجه برسید که شما انسان خلاقی هستید و یا می‌توانید باشید!

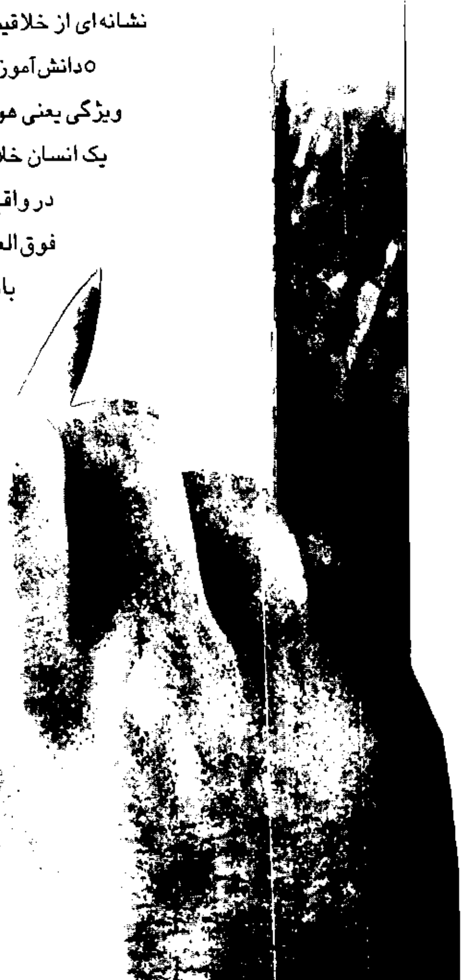
۱. فرد خلاق معمولاً کارهایی را انجام می‌دهد که تا پیش از آن هرگز انجام نداده است؛ و یا از دریچه‌ای نگاه می‌کند که تاکنون از آن دریچه نگاه نشده است. لذا جنبه هایی از خلاقیت مهم است که به اکتساب نظریه یا دانش جدید، ابداعی در فناوری، به دست آوردن یک فرمول ریاضی جدید و کاربردی یا تحلیل یک موقعیت (مثلاً در فلسفه یا تاریخ) را به گونه ای نوین دربرمی گیرد.

۲. بین صفات و ویژگی هایی همچون هوش، خلاقیت و پیشرفت تحصیلی باید تفاوت قائل شد به این صورت که: هوش، عبارت است از توانایی یادگیری و توانایی تفکر. خلاقیت، توانایی تولید دانش جدید و اشیاء و پدیده های جدید است. پیشرفت تحصیلی، فرآیندی است که فرد پس از سال ها تحصیل در کلاس های مختلف و امتحانات گوناگون و گذراندن پیش نیازها در یک رشته به آن دست پیدا می‌کند. حال اگر این صفات را بخواهیم با هم مقایسه کنید به نتایج زیر می‌رسیم:

- اکثر کسانی که پدیده‌های مهم را خلق می‌کنند، باهوش‌اند؛
- افراد زیادی، حتی با درجه ی دکتری، هستند که هیچ ایده ی خلاقی در ذهن خود ندارند. آنها باهوش هستند و مهارت نیز دارند اما فرد دیگری باید برای آنها مسأله را فرمول‌بندی کند تا آنها بتوانند به راه حل برسند. پس هوش و پیشرفت تحصیلی، به تنهایی، نشانه‌ای از خلاقیت نیست.
- دانش‌آموزانی که هم باهوش‌اند و هم خلاق، اغلب نمرات متوسط می‌گیرند. به طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که این سه ویژگی یعنی هوش، خلاقیت و پیشرفت تحصیلی در عین حال که متفاوتند ولی می‌توانند روی یکدیگر تأثیرگذار باشند. مثلاً اگر یک انسان خلاق، باهوش هم باشد مسلماً هوش او در خلاقیت او تأثیر مثبت و بسزایی خواهد داشت.

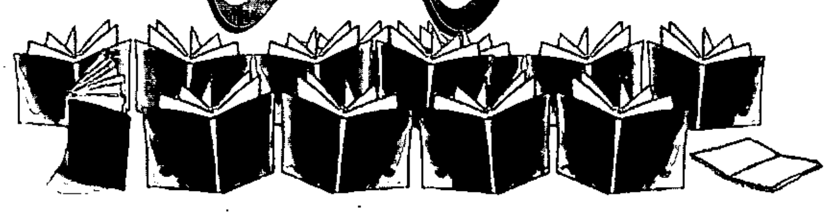
در واقع می‌توان گفت که خلاقیت آمیزه و ترکیبی از چند نوع هوش و صفات شخصیتی است، و البته موضوعی فوق العاده پیچیده است؛ اما مسلم است که پیش از این‌که فردی بتواند کار خلاقی در علم و مهندسی انجام دهد، باید دانش نظری از امور، قواعد و روش‌های داشته باشد و نیز باید انگیزه و تعهد نسبت به آن علم در او موج بزند حال، اگر بخواهیم در یک جمع بندی کوتاه از مطالب ذکر شده خلاقیت را به تصویر بکشیم باید بگوییم:

خلاقیت نتیجه و اشتراک سه فرایند مهم است، اول دانش و علم لازم برای حرکت، دوم انگیزه و تعهد به کار، و سوم مهارت های خلاقیت. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هریک از سه فرآیند ذکر شده قابلِ دسترسی و قابل رشد است، یعنی در واقع خلاقیت نعمتی است که همه ی افراد از آن برخوردارند فقط می‌بایست این عواملی را که روی بروز و شکوفایی آن اثر دارد تقویت کرده و رشد بدهیم، یعنی همواره می‌توان خلاقیت را پرورش داد. حالا به نظر شما، آیا شما می‌توانید خلاق باشید؟ چه ویژگی های شخصیتی در وجود خود می‌بینید که شما را از دیگران متمایز می‌کند؟ در این باره در آینده بیشتر خواهیم نوشت. شما هم نظرات خود را برای ما ارسال کنید.



یادهای آموزشی ۳

پرویز شهریاری



افلاطون که او را به یونانی **پلاتون**[1] می‌گویند، فیلسوف و شاگرد سقراط بود و در فاصله‌ی سال‌های ۴۲۷ تا ۳۴۷ پیش از میلاد می‌زیست. وی اعتقاد دارد: «بیش‌تر بیماری‌های اجتماعی و سیاسی که از آن‌ها رنج می‌بری، در اختیار خود توست. تنها اراده و نیرویی برای تغییر آن‌ها لازم است. می‌توانی با شیوه‌ای دیگر و با روش خردمندانه‌تری زندگی کنی، به شرطی که در این‌باره بیندیشی و اندیشه‌ی خود را به کارگیری».

جرج سارتون (۱۸۸۴ـ۱۹۵۶)، اهل بلژیک که یورش آلمانی‌ها موجب آوارگی او شد و سرانجام در آمریکا به پژوهش‌های خود در زمینه‌ی تاریخ دانش ادامه داد، در کتاب «سر گذشت دانش» می‌نویسد: «همه‌ی کسانی که در راه راستی تا سرحد فداکاری گام برداشته‌اند، همیشه و در راه خود به کسانی برخورده‌اند که برای آن‌ها زحمت ایجاد کرده‌اند. اعترافی می‌کنیم که اگر برای ما موجب سرافکندگی است، دست‌کم خاطر ما را آرامش می‌بخشد و آن این است که: هر رادمردی که در راه راستی و درستی مبارزه کرد و با شجاعت با اندیشه‌های نادرست که بر سر راه او بود جنگید، سرانجام در برابر مانعی که نمی‌توانست بر آن غلبه کند و یکی از عقیده‌هایی که جرأت و جسارت مبارزه با آن دست نداد از پای درآمد...».

۴.

گفت: از نیروی تخیل خودت راضی هستی؟

گفتم: نه چندان.

گفت: از قدرت تشخیص و استدلالت برای جدا کردن سره از ناسره و صالح از ناصالح چه‌طور؟

گفتم: بسیار بد است.

گفت: می‌دانستم. مثل همه‌ی آدم‌های عامی سرت را پائین انداخته‌ای و همه را خوب و همه چیز را رو به راه می‌بینی... ریاضیات خوانده‌ای، ولی از استدلال و به‌ویژه نتیجه‌گیری، بهره‌ای نبرده‌ای. دلم برایت می‌سوزد. لابد در زندگی روزانه هم درمانده‌ای.

گفتم: بله درست است درمانده‌ام، ولی...

حرفم را برید و گفت: ولی ندارد... با آن‌که امیدی ندارم، می‌خواهم یک بار دیگر تو را آزمایش کنم. حاضری؟!

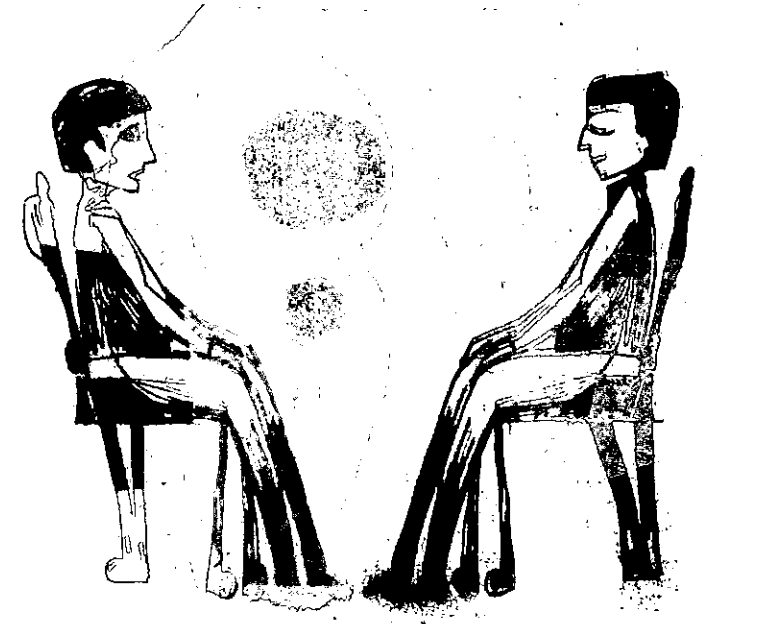
گفتم: همیشه و در تمامیِ طول زندگی خود، مورد آزمایش بوده‌ام. حتی گاهی همچون یک وسیله‌ی آزمایشگاهی!... اکنون هم حاضرم. ژستی عالمانه به خود گرفت، به چشمانم خیره شد و گفت: چشمانت را ببند!

گفتم: چرا؟ مگر برنامه‌ای برای هیپنوتیزم داری؟

گفت: نه. می‌خواهم به تو یاری کنم تا نیروی تخیلت را بیدار کنم... چشمانت را ببند و برای چند لحظه فرض کن، همه‌ی اندیشمندان، دانش پژوهان، شاعران، نویسندگان و فیلسوفان، سخن کوتاه، همه‌ی بزرگان فرهنگ گذشته‌ی این سرزمین، از خاک برخاسته‌اند و زنده و سرحال در سالن بزرگی جمع شده‌اند و می‌خواهند اتحادیه‌ای تشکیل دهند؛ البته برای دفاع از حقوق صنفی خود. برای ورود به این اتحادیه، تنها یک شرط وجود دارد: کسی می‌تواند به عضویت اتحادیه درآید که «صالح» باشد و هیچ ریب و ریایی به او نچسبد. خوب، به نظر تو چه کسانی خواهند توانست کارت عضویت اتحادیه را به دست آورند؟

گفتم: این که خیلی ساده است. گذشته‌ی فرهنگی کشور ما بسیار غنی و پرافتخار است و اگر در طول تاریخ، به‌ندرت حکام دلسوز و لایقی داشته‌ایم، در عوض غنای فرهنگی سرزمین ما، زبانزد خاص و عام است... برای نمونه، در سده‌های میانه که مردم مغرب زمین به بحث‌های بی‌سرانجام خود مشغول بودند و هیچ دانش و دانشمندی را به جهان عرضه نکردند، در سرزمین ایران اندیشمندانی می‌زیسته‌اند که...

برای بار دوم حرفم را برید و گفت: مثل همیشه کلی‌بافی می‌کنی... من که تو را برای سخن‌رانی نیاورده‌ام! نام ببر. از بین این همه



اندیشمندانی که سراغ داری، چه کسانی صلاحیت عضویت در اتحادیه را دارند؟

چند نفر را که فوری به ذهنم رسید نام بردم: **محمدفرزند موسی خوارزمی، زکریای رازی، پورسینا، خیام، ناصرخسرو، خواجه نصیرتوسی، سهروردی مشهور به «شیخ اشراق»، حلاج، ملاصدرای شیرازی مشهور به «صدرالمتالهین» عین‌القضات همدانی...**

توی حرفم دوید و گفت: کافی است... قرار بود کسانی را که نام می‌بری صالح باشند؛ یعنی نه در زمان زندگیشان و نه بعد از مرگشان، کسی آن‌ها را به ناصالح بودن متهم نکرده باشد.

گفتم: خوب، مگر این‌ها که نام بردم...

گفت: عجله نکن. به یک یک پرونده‌ها می‌رسیم. از محمد خوارزمی که چیزی نمی‌دانیم، جز این‌که عنوان مجوسی داشته است. زکریای رازی که به دهری بودن شهرت داشته است. پورسینا را هم کسانی متهم به کفر کرده بودند؛ مگر شعر معروف او را به یاد نداری: «درد هر چو من یکی و آن هم کافر ـ پس در همه دهر یک مسلمان نبود». درباره‌ی خیام که نباید بحث کرد؛ با رباعی‌های آن چنانی‌اش. ناصرخسرو که همیشه فراری و دربه‌در بود؛ سفرنامه‌اش را بخوان تا بدانی از دست روزگار چه‌ها که نکشیده است. اما **خواجه نصیرتوسی**، به دانش و اندیشه‌اش نگاه نکن، او وزیر دربار مغولان بود و به آن‌ها خدمت می‌کرد. مگر خونریزتر از قوم مغول، طایفه‌ای سراغ داری؟ سهروردی و حلاج و عین‌القضات هم که تکلیفشان معلوم است؛ لابد دلیلی داشته که اعدامشان کرده‌اند. درباره‌ی ملاصدرا تنها تو را راهنمایی می‌کنم، جزوه‌ی کوچکی را که به زبان فارسی درباره‌ی مخالفان خود نوشته است، بخوانی.

گیج شده بودم، با وجود این گفتم: پس تکلیف آدم‌هایی مثل **انوری، عنصری و منوچهری** روشن است... آیا درباره‌ی کسانی چون **عبیدزاکانی، شیخ بهایی، جمشید کاشانی و محمد غزالی** هم حرفی داری؟

گفت: نه تنها درباره‌ی این‌ها... اگر بخواهی، حاضرم به پرونده‌ی **رودکی، سعدی، حافظ و فردوسی** هم برسم.

گفتم: پس به این ترتیب، این اتحادیه یک «مجموعه‌ی تهی» از آب درمی‌آید.

گفت: اگر دلیلی برای رد کردن حرف‌های من داری، بگو.

وقتی به کلی کلافه شده بودم، چشمانم را باز کردم. دیدم داستان من شبیه داستان آن طلبکار است که وقتی به بدهکار خود برای گرفتن پولش مراجعه کرد، بدهکار به او گفت: «بیا حساب کنیم.» طلبکار گفت: «چه حسابی؟! من آمده‌ام پولم را بگیرم.» و بدهکار گفت: «مگر با حساب کردن مخالفی؟ گوش کن تو پولی از من می‌خواهی، درست است؟ خب، در عوض من هم همان مبلغ را به تو بدهکارم. این به آن در.» طلبکار ساده‌دل رفت، ولی پیش خود اندیشید: «حساب درست بود، ولی پول من چه شد؟...» برگشت و به بدهکار خود گفت: «من حساب نمی‌خواهم، پولم را بده.»

به دوستم گفتم: استدلال تو به ظاهر درست، ولی من استدلال نمی‌خواهم، تنها فرهنگ و دانش والای کشورم را به من بازگردان.

۲-

پیروان راستی، اگر نادار هم باشند گرامی‌اند، ولی هواخواهان دروغ، اگر دارا و پرتوان هم باشند، تبهکارند.

گاتاها، یسنای ۴۷، بند ۴

با خشم رو به من کرد و گفت: آمدند و هر چه ناسزا بود، بار تو و دیگران کردند و تو همچنان به کار خودت مشغولی؟

با لحنی آشتی‌جویانه سفارش سعدی را یادآور شدم که:

دو چیز طیره عقل است: دم فرو بستن به وقت گفتن و گفتن به وقت خاموشی.

او پرسید: زمان گفتن و خاموشی را چگونه انتخاب می‌کنی؟

گفتم: سفارش پورسینا را پذیرفته‌ام که: حقیقت را با کسانی که به خاطر باور بی‌اندازه به خود، حتی روشنی روز را منکر می‌شوند، در میان نگذار.

گفت: یعنی گمان می‌کنی همه‌ی حقیقت نزد توست؟

گفتم: اگر کسی گمان کند از همه چیز آگاه است و به تمامی حقیقت دست یافته است، او را رها کن؛ چرا که همین باور نشانه‌ی نادانی اوست. جمله‌ی زیبایی از بزرگمهر نقل

کرده‌اند: «همه چیز را همگان دانند و همگان هنوز از مادر نزاده‌اند.» و از این زیباتر، سخن عین‌القضات همدانی است که می‌گوید: ... چندین هزار جنازه به گورستان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود، و چندین هزار را درد طلب بگیرد و یکی به راه راست نیفتد...»

و سنایی، شاعر حقیقت طلب سده‌ی ششم هجری، چه درد و رنجی را تحمل می‌کرد که به ما می‌گوید:

هر خسی از رنگِ گفتاری به این ره کی رسد؟
درد باید پرده‌سوز و مرد باید گام‌زن
روزها باید که تا یک مشت پشم از پشت میش
زاهدی را خرقه گردد یا حماری را رسن
ماه‌ها باید که تا یک پنبه‌دانه زآفتاب
زاهدی را حلّه گردد یا شهیدی را کفن
سال‌ها باید که تا یک سنگ اصلی ز آفتاب
لعل گردد در بدخشان یا عقیق اندریمن
عمرها باید که تا یک کودکی از روی طبع
عالمی گردد نکو یا شاعری شیرین سخن
قرن‌ها باید که تا از پشت آدم نطفه‌ای
زاهدی در کعبه گردد یا اویسی در قَرن

تازه این درد امروز و دیروز نیست. ببینید خیام، ریاضیدان و اخترشناس بزرگ، نزدیک به هزار سال با چه اندوهی می‌گوید:

نا‌آمدگان اگر بدانند که ما
از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر

و در پیش‌گفتار کتاب مشهور و پر مضمون «جبر» خود، چگونه از روزگار خود گله می‌کند: «... دچار زمانه‌ای شده‌ایم که اهل دانش از کار افتاده و جز اندکی، کسی نمانده است تا از فرصت برای بحث و پژوهش علمی استفاده کند. بر عکس حکیم‌نمایان دوره‌ی ما، همه دست‌اندکارند تا حق را با باطل بیامیزند، جز ریا و تزویر کاری ندارند، اگر دانش و معرفتی هم دارند، صرف غرض‌های پست جسمی می‌کنند و اگر با کسی روبه‌رو شوند که در جست‌وجوی حقیقت راستین است و روی از باطل و زور می‌گرداند، او را استهزا و تحقیر می‌کنند...»

سخن مرا برید و گفت: پر حرفی کردی! می‌خواهی بگویی نه حقیقتی وجود دارد که بتوان به آن رسید و نه راهی برای دست یافتن به زندگی انسانی...

گفتم: من چنین باوری ندارم. هم می‌توان به حقیقت نزدیک شد و هم می‌توان در راهی تلاش کرد که جامعه‌ی انسانی را گام به گام به زندگی آزادتر، عادلانه‌تر و انسانی‌تر نزدیک کند.

پرسید: چه طور و از چه راهی؟

گفتم: این را باید از اندیشمندان و خردمندان پرسید. به قول **زرتشت**: «به بهترین سخنان گوش فرادهید و آن را با اندیشه‌ی روشن بسنجید. آن‌گاه هر کس می‌تواند راه خود را آزادانه برگزیند [گاتاها، یسنای ۳۰، بند ۲].

شاید این سفارش **ابونصر فارابی** که بیش‌تر از هزار سال پیش گفته است، بتواند اندکی روشنگر باشد. بحث فارابی به پژوهش‌های علمی مربوط می‌شود، ولی مگر جامعه‌شناسی یا تلاش برای نزدیک‌تر شدن به حقیقت، علم نیست؟

«... برای این‌که اندیشمند خوبی برای تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون این‌که ربطی با دانش ویژه‌ای داشته باشد، باید سه شرط را داشته باشیم: «۱. همه‌ی قانون‌ها را به خوبی بشناسیم؛ ۲. توانایی به نتیجه‌گیری‌های لازم را از این قانون‌ها و از داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛ ۳. توانایی پاسخگویی به نظرهای نادرست را داشته باشیم و بتوانیم اندیشه‌ها و دیدگاه‌های دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا کنیم و اشتباه را برطرف سازیم...»

دو تکه، یکی از بودا (به سانسکریت یعنی روشن و آگاه) که به تقریب از ۵۶۳ تا ۴۸۳ پیش از میلاد زندگی می‌کرد، دیگری از رنه‌دکارت (۱۵۹۶ ـ ۱۶۵۰ میلادی) می‌آورم. بودا، روحانی و حکیمی از شرق، و دکارت فیلسوف و ریاضیدانی از غرب است. فاصله‌ی زمانی بین آن‌ها هم کوتاه نیست. بودا در سده‌ی ششم پیش از میلاد می‌زیست و دکارت در سده‌ی هفدهم بعد از میلاد؛ یعنی زمانی نزدیک به ۲۳۰۰ سال، آن‌ها را از هم جدا می‌کند. با وجود این، سفارش‌های آن‌ها، چنان به هم شباهت دارد که به نظر می‌رسد، دو مترجم جداگانه، متن واحدی را ترجمه کرده‌اند. در آغاز سخن بودا را بیاوریم:

«ما نباید گفته‌ای را تنها به این دلیل که دیگران گفته‌اند، باور کنیم. ما نباید خبرهای دیگران را، تنها به این خاطر که از قدیم به ما رسیده‌اند، بپذیریم. نباید بدون اندیشه به گفته و نوشته‌ی دانشمندان و خردمندان، تنها به این دلیل که گفته و نوشته‌ی دانشمندان و خردمندان است، تسلیم شویم. نباید به استدلال‌های خودمان اطمینان داشته باشیم. نباید تنها به ملاحظه‌ی شباهت و قیاس چیزی را بپذیریم. نباید کلام استاد را، چون کلامی از استاد است، قبول کنیم. ما باید تنها آنچه را که با خرد و فهم و درک خودمان، به درستی آن اعتقاد پیدا کرده‌ایم، قبول کنیم؛ خواه کلام باشد یا نوشته یا چیز دیگری.»

و سخن رنه دکارت:

«... وقتی موضوعی را بررسی می‌کنیم، نباید چیزی را جست‌وجو کنیم که دیگران فکر می‌کنند یا خودمان تصور می‌کنیم. بلکه باید در جست‌وجوی چیزی باشیم که یا آشکارا و به روشنی دیده می‌شود و شروط یا استدلال قیاسی قابل اثبات است؛ زیرا دانش به صورت دیگری به دست نمی‌آید...» خودم را آماده کرده بودم تا درباره‌ی جامعه‌ی عادلانه و انسانی صحبت کنم که متوجه شدم، دوست من بی خداحافظی رفته است.

زیرنویس ....

1. Plato

ضرب ماتریس‌ها و خواص عمل ضرب ماتریسی

عمل ضرب ماتریس‌ها جزو اعمال بسیار مهم بین ماتریس‌هاست که در کتاب ریاضی سال دوم شروع و در کتاب «هندسه تحلیلی و جبر خطی پیش دانشگاهی» همراه با بعضی از ویژگی‌های عمل ضرب، کامل شده است. در این مقاله بیش‌تر کوشیده‌ایم، خواص عمل ضرب بررسی شود.

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

اگر A یک ماتریس سطری با p ستون و B یک ماتریس ستونی با p سطر باشد، در این صورت حاصل ضرب $A\times B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\times B=\begin{bmatrix}a_{۱۱}a_{۱۲}\cdots a_{۱p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\b_{۲۱}\\\vdots\\b_{۱p}\end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱p}b_{۱p}$$

$$\Rightarrow A_{۱\times p}\times B_{p\times ۱}=\sum_{k=۱}^{p}a_{۱k}b_{k۱}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۳ & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰\\-۲\\۱\\۴\end{bmatrix}$، در این صورت، حاصل $A\times B$ را به‌دست آورید.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\-۲\\۱\\۴\end{bmatrix}=۲\times۰+۱\times(-۲)+۳\times۱+(-۲)\times۴=-۷$$

حال اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد، در این صورت، حاصل ضرب ماتریس A در B، یعنی $A\times B$، ماتریسی است از مرتبه‌ی $m\times n$ (مرتبه‌ی ماتریس حاصل، از حذف ستون و سطر مشترک به دست می‌آید) که در حالت کلی درایه‌ی روی سطر i ام و ستون j ام در این ماتریس از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید. به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}$ و $C=\begin{bmatrix}c_{ij}\end{bmatrix}_{mn}$، در این صورت:

$$c_{ij}=\begin{bmatrix}a_{i۱}a_{i۲}\cdots a_{ip}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱j}\\b_{۲j}\\\vdots\\b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i۱}b_{۱i}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$$

$$\Rightarrow A\times B=C=\begin{bmatrix}c_{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=۱}^{p}a_{ik}b_{kj}\end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳ & -۱\\۲ & ۰ & -۳ & ۱\\۴ & ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۵ & -۲\\۱ & ۴ & ۲\\۲ & ۰ & ۱\\-۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$. در این صورت، اگر $A\times B=C=\begin{bmatrix}c_{ij}\end{bmatrix}$ و $B\times A=D=\begin{bmatrix}d_{ij}\end{bmatrix}$، آن گاه: اولاً درایه‌های

حمیدرضا امیری



c_{23} و d_{34} را به دست آورید. ثانیاً دو ماتریس C و D را بیابید.

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -4+0-3+0=7$$

(سطر دوم A در ستون سوم B ضرب شده است.)

$$d_{34} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2+0-1=-3$$

(سطر سوم A در ستون چهارم B ضرب شده است.)

$$A_{3\times4} \times B_{4\times3} = C_{3\times3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۲ & ۱۲ & ۵\\ -۱ & ۱۱ & -۷\\ ۱۷ & ۱۹ & -۶\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}۳ & ۵ & -۲\\ ۱ & ۴ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۱\\ -۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳ & -۱\\ ۲ & ۰ & -۳ & ۱\\ ۴ & ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۶ & -۱۰ & ۵\\ ۱۷ & ۲ & -۵ & ۱\\ ۶ & ۴ & ۸ & -۳\\ ۱ & -۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

آزمون: اگر $A=[۱\ ۲\ -۳]$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\ -۱\\ ۳\end{bmatrix}$ ، در این صورت مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۸- د) صفر

حل: گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$B\times A=\begin{bmatrix}-۲\\ -۱\\ ۳\end{bmatrix}[۱\ ۲\ -۳]=\begin{bmatrix}-۲ & -۴ & ۶\\ -۱ & -۲ & ۳\\ ۳ & ۶ & -۹\end{bmatrix}$$

(سطر اول B، یعنی [۲-] در ستون اول A، یعنی [۱] و همچنین در ستون دوم A، یعنی [۲] و... ضرب می‌شود.)

مجموع درایه‌ها $= -۲-۴+۶-۱-۲+۳+۳+۶-۹=۰$

تعریف توان برای ماتریس: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، در این صورت، $A^۰=I$ و $A^۲=A\times A$ و $A^۳=A\times A^۲$ و... و $A^n=A\times A^{n-۱}$.

ویژگی‌های عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی ۱. اگر r و s دو عدد حقیقی و A و B دو ماتریس باشند به طوری که $A\times B$ قابل تعریف باشد، در این صورت داریم:

$(rA)\times(sB)=(rs)A\times B$

الف) $(rA)\times B=A\times(rB)=r(A\times B)$

ب) $(-A)\times(-B)=A\times B$

ج) $A\times(-B)=-(A\times B)$

د) $(-A)\times B=-(A\times B)$

اثبات ویژگی ۱. فرض کنیم A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد و فرض کنیم $A\times B=C=[c_{ij}]$. در این صورت:

درایه‌ی سطر iام و ستون jام ماتریس $(rA)\times(sB)$ =

(ستون jام ماتریس sB) × (سطر iام ماتریس rA) =

$$=\sum_{k=۱}^{p}(ra_{ik})(sb_{kj})=(rs)\sum_{k=۱}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

درایه‌ی سطر iام ستون jام $=(rs)\times C$

ویژگی ۲. ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت توزیع‌پذیری نسبت به جمع است؛ یعنی:

$A_{ml}\times(B_{lp}+C_{pn})=A\times B+A\times C$

ویژگی ۳. ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است؛ یعنی:

$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

(اثبات دو ویژگی اخیر در کتاب درسی وجود دارد.)

ویژگی ۴. اگر A ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n و I_n ماتریس واحد (همانی) هم‌مرتبه با A باشد، در این صورت داریم:

$A\times I_n=I_n\times A=A$

(I_n عضو خنثی نسبت به عمل ضرب است.)

ویژگی ۵. اگر A و B دو ماتریس باشند و $A\times B$ تعریف شود و سطر iام ماتریس A صفر باشد، آن‌گاه سطر iام ماتریس $A\times B$ صفر است.

ویژگی ۶. اگر A و B دو ماتریس باشند و $A\times B$ تعریف شود و ستون jام ماتریس B صفر باشد، در این صورت، ستون

لازم ماتریس $A \times B$ صفر است.

ویژگی ۷. اگر A ماتریسی قطری و B مربعی و هم‌مرتبه با A باشد، در این صورت:

الف) برای محاسبه‌ی $(A \times B)$ کافی است هر درایه‌ی روی قطر اصلیA را در سطر نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

(در سطر اول B، عدد ۲ و در سطر دوم عدد (۱-) و در سطر سوم عدد ۳ را ضرب کرده‌ایم.)

ب) برای محاسبه‌ی $B \times A$، کافی است هر درایه‌ی روی قطر اصلی A را در ستون نظیرش در ماتریس B ضرب کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۹ \\ -۲ & ۰ & ۶ \\ ۰ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

تذکر مهم: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی، خاصیت جابه‌جایی ندارد (حتی در حالتی که A و B هر دو مربعی و هم‌مرتبه باشند، ممکن است: $AB \neq BA$)

ویژگی ۸. اگر A و B دو ماتریس قطری و هم‌مرتبه باشند، در این صورت همواره داریم:

$A \times B = B \times A$

(مجموعه‌ی ماتریس‌های قطری و هم‌مرتبه نسبت به عمل ضرب خاصیت جابه‌جایی دارد.)

ویژگی ۹. اگر A ماتریسی اسکالر و B ماتریسی هم‌مرتبه با A و دلخواه باشد، همواره داریم:

$A \times B = B \times A$

تذکر: اثبات هریک از ویژگی‌های ۸ و ۹، با توجه به ویژگی ۷، به‌راحتی امکانپذیر است.

ویژگی ۱۰. (در ماتریس‌های ۲×۲) اگر فرض کنیم

$M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,b \in IR\right\}$ و $H = \left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,b \in IR\right\}$،

در این صورت، هر دو مجموعه‌ی M و H نسبت به عمل ضرب ماتریسی خاصیت جابه‌جایی دارند. به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$، $(A,B \in M)$ و $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$، $(C,D \in H)$، در این صورت همواره داریم:

$A \times B = B \times A$ یا $C \times D = D \times C$

تذکر: هر عضو M (یا H) فقط با ماتریسی به فرم خودش، یعنی ماتریسی از M (یا از H) تعویض‌پذیر است. به عبارت دیگر، اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و AB=BA، در این صورت باید داشته باشیم: x=t و y=z.

ویژگی ۱۱. اگر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B تعویض‌پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$، در این صورت تمام اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است. برای مثال:

$AB = BA \Leftrightarrow (A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$

$AB = BA \Leftrightarrow (A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$

نتیجه: چون ماتریس همانی یا وحد (I) با هر ماتریس هم‌مرتبه‌ی خود تعویض‌پذیر است، تمام اتحادهای جبری برای I و هر ماتریس هم‌مرتبه با آن برقرار است. برای مثال:

$(A^۳ - I^۳) = (A - I)(A^۲ + AI + I^۲)$

ویژگی ۱۲. اگر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B تعویض‌پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$، در این صورت برای هر $m,n \in IN$ داریم:

$$A^m \times B^n = B^n \times A^m$$

اثبات: ابتدا برای هر $n \in \mathbb{N}$ با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم: $A \times B^n = B^n \times A$.

$$n = 1: (A \times B) = (B \times A)$$

فرض استقرا:

$$n = k: A \times B^k = B^k \times A$$

حکم استقرا:

$$n = k+1: A \times B^{k+1} = B^{k+1} \times A$$

$$A \times B^k = B^k \times A$$
$$\Rightarrow (A \times B^k) \times B = (B^k \times A) \times B$$
$$\Rightarrow A \times (B^k \times B) = B^k \times (A \times B)$$
$$\Rightarrow A \times B^{k+1} = B^k \times (B \times A) = (B^k \times B) \times A$$
$$\Rightarrow A \times B^{k+1} = B^{k+1} \times A$$

(که در این صورت حکم ثابت شده است.)

حال اگر فرض کنیم $B^n = C$، در این صورت قبلاً ثابت باشد که: $A \times C = C \times A$ یا $C \times A = A \times C$، و با استفاده از حکم قبل می‌توان برای هر $m \in \mathbb{N}$ نوشت: $C \times A^m = A^m \times C$ یا $B^n \times A^m = A^m \times B^n$ که ویژگی ۱۲ به اثبات می‌رسد.

تذکر: در تعریف توان‌های طبیعی یک ماتریس مربعی، به استقرا ثابت می‌شود:

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

ویژگی ۱۳. اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه‌ی A^n کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان n برسانیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی اسکالر و $a_{11} = k$ باشد، در این صورت داریم:

$$A^n = \begin{bmatrix} k^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k^n & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k^n \end{bmatrix} = k^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = k^n I$$

ویژگی ۱۴. (در ماتریس‌های ۲×۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ماتریسی شبه‌مثلثی باشد، در این صورت همواره داریم:

I) n زوج: $A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$

II) n فرد: $A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$

(اثبات هر دو قسمت (I) و (II)، به استقرا روی n امکان‌پذیر است.)

تذکر مهم: قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها، در حالت کلّی برقرار نیست؛ یعنی در حالت کلی از $A \times B = A \times C$ نمی‌توان نتیجه گرفت که: $B=C$. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$، در این صورت داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

درواقع، با این که می‌بینید $A \times B = A \times C$، ولی $B \neq C$.

نتیجه‌ی مهم: در ماتریس‌ها از تساوی $A \times B = \bar{o}$، در حالت کلّی، نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = \bar{o}$ یا $A = \bar{o}$. به

این مثال توجه کنید:

مثال: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$، در این صورت داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

در صورتی که $A\neq\bar{o}$ و $B\neq\bar{o}$.

ویژگی ۱۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$، در این صورت داریم:

$$(A\times B)^n=A^n\times B^n$$

اثبات: به استقرا روی n، فرض کنیم $A\times B=B\times A$.

در این صورت داریم:

$$n=1\Rightarrow A\times B=A\times B$$

فرض استقرا: $n=k\Rightarrow (A\times B)^k=A^k\times B^k$

حکم استقرا: $n=k+1\Rightarrow (A\times B)^{k+1}=A^{k+1}\times B^{k+1}$

$$(A\times B)^{k+1}=(A\times B)\times(A\times B)^k$$
$$=(A\times B)\times(A^k\times B^k)$$

$$(A\times B)^{K+1}=A\times(B\times A^k)\times B^k \overset{\text{ویژگی ۱۲}}{=\!=} A\times(A^k\times B)\times B^k$$
$$=(A\times A^k)\times(B\times B^k)=A^{k+1}\times B^{k+1}$$

ویژگی ۱۶. اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، در این صورت همواره داریم:

$$\mathrm{trace}(A\times B)=\mathrm{trace}(B\times A)$$

آزمون: اگر A و B ماتریس‌هایی ۲×۲ و $A\times B=\begin{bmatrix}10&3\\8&8\end{bmatrix}$ در این صورت $(B\times A)$ کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix}2&-1\\12&15\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}4&1\\0&14\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}3&4\\4&13\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}5&1\\-4&8\end{bmatrix}$

حل: گزینه‌ی (ب) صحیح است؛ زیرا در گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (ب) ماتریسی را معرفی می‌کند که حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلی آن یا $\mathrm{trace}(A\times B)$ یعنی ۱۸ برابر است.

نتیجه: اگر A، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، داریم:

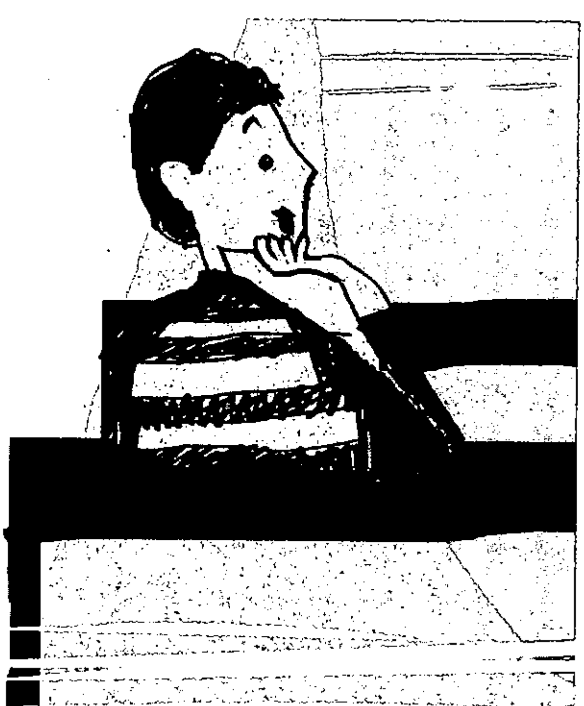
$$\mathrm{trace}(A\times B\times C)=\mathrm{trace}(B\times C\times A)$$

اثبات:

$$\mathrm{trace}(A\times B\times C)=\mathrm{trace}[A\times(B\times C)]=\mathrm{trace}[(B\times C)\times A]$$
$$=\mathrm{trace}(B\times C\times A)$$

ویژگی ۱۷. مجموعه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی از مرتبه‌ی n (پائین مثلثی از مرتبه‌ی n) نسبت به عمل ضرب بسته است. در واقع، ضرب دو ماتریس بالا مثلثی (پائین مثلثی) و هم‌مرتبه ماتریسی است بالا مثلثی (پائین مثلثی).

نتیجه: حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری و هم‌مرتبه،



ماتریسی قطری از همان مرتبه است.

تعریف ماتریس خودتوان: ماتریس مربعی A را **خودتوان** می‌نامیم، هرگاه:

$$A^2 = A$$

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ماتریسی خودتوان است، زیرا:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = A$$

تمرین: نشان دهید، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ماتریسی خودتوان است.

نتیجه: اگر A ماتریسی خودتوان باشد، در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$A^n = A$$

اثبات به عهده‌ی شما (با فرض $A^2 = A$ و با کمک استقرا، به‌راحتی حکم ثابت می‌شود).

تعریف ماتریس پوچ‌توان: ماتریس مربعی A را **پوچ‌توان** از مرتبه‌ی m می‌نامیم، هرگاه m کوچک‌ترین توانی باشد که $A^m = \bar{o}$.

واضح است که برای هر $n > m$ همواره $A^n = \bar{o}$ و برای هر $k < m$، $A^k \neq \bar{o}$ است.

مسأله: نشان دهید هر ماتریس به شکل $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ است.

حل: ثابت می‌کنیم $A^2 \neq \bar{o}$ و $A^3 = \bar{o}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{o}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی پوچ‌توان از مرتبه‌ی m و α یک عدد حقیقی باشد، در این صورت (αA) نیز پوچ‌توان از مرتبه‌ی m است.

اثبات: $(\alpha A)^m = \alpha^m A^m = \alpha^m \bar{o} = \bar{o}$

نتیجه: حاصل‌ضرب دو ماتریس تعویض‌پذیر مانند A و B که یکی از آن‌ها مثلاً A پوچ‌توان از مرتبه‌ی m باشد، ماتریسی پوچ‌توان از مرتبه‌ی m است.

اثبات: فرض کنیم $AB = BA$ و $A^m = \bar{o}$، در این صورت داریم:

$$(AB)^m = A^m B^m = \bar{o} B^m = \bar{o}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی ناصفر و خودتوان باشد، آن‌گاه پوچ‌توان نیست؛ زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ همواره داریم: $A^n = A \neq \bar{o}$. پس A پوچ‌توان نیست.

مسأله: اگر AB=A و BA=B، ثابت کنید A و B خودتوان هستند.

حل:

$$AB = A \Rightarrow (AB)A = AA$$

(A خودتوان است.)

$$\Rightarrow A(BA) = A^2 \Rightarrow A(B) = A^2 \Rightarrow A = A^2$$

(به همین ترتیب ثابت می‌شود که: $B^2 = B$. شما ثابت کنید.)



طرح و حل چند مسأله‌ی مهم

مسأله‌ی ۱ . اگر A ، B و C ماتریس‌هایی مربعی از مرتبه‌ی n باشند و داشته باشیم : AC=CA و BC=CB ، ثابت کنید که ماتریس (AB) با C تعویض‌پذیر است .

حل :

$$(A\times B)\times C = A\times(B\times C) = A\times(C\times B) = (A\times C)\times B$$
$$(C\times A)\times B = C\times(A\times B)$$

مسأله‌ی ۲ . اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند، ثابت کنید :

$$\text{trace}(A\pm B) = \text{trace}(A)\pm\text{trace}(B)$$

حل : فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$. در این صورت داریم :

$$\text{trace}(A\pm B) = (A\pm B) \text{ مجموع درایه‌های روی قطر اصلی}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}\pm b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) \pm \sum_{i=1}^{n}(b_{ii})$$
$$= \text{trace}(A)\pm\text{trace}(B)$$

مسأله‌ی ۳ . اگر A ماتریسی $n\times n$ و α یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید :

$$\text{trace}(\alpha A) = \alpha\,\text{trace}(A)$$

حل : فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ ، $\text{trace}(\alpha A) = \alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii} = \alpha\,\text{trace}(A)$$

مسأله‌ی ۴ . ثابت کنید، هیچ دو ماتریس $n\times n$ مانند A و B یافت نمی‌شوند که در رابطه‌ی AB-BA=I صدق کنند .

حل : فرض کنیم چنین ماتریس‌هایی وجود داشته باشند (فرض خلف) ، آن‌گاه :

$$AB-BA=I \Rightarrow \text{trace}(AB-BA) = \text{trace}(I)$$
$$\Rightarrow \text{trace}(AB)-\text{trace}(BA) = n \Rightarrow 0 = n \text{ (تناقض)}$$

و تناقض حاصل یعنی n = ۰ فرض خلف را باطل می‌کند و حکم برقرار خواهد بود .

مسأله‌ی ۵ . اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی n و $A^2=I$ ، ثابت کنید ماتریس $\frac{1}{2}(I-A)$ خودتوان است .

حل :

$$\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]^2 = \frac{1}{4}(I-A)^2 = \frac{1}{4}(I^2-2IA+A^2)$$
$$= \frac{1}{4}(I-2A+I) = \frac{1}{4}(2I-2A)$$
$$= \frac{1}{2}(I-A)$$

مسأله‌ی ۶ . اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید : $A^n=\begin{bmatrix}2^n&3(2^n-1)\\0&1\end{bmatrix}$.

حل : اثبات به استقرا روی n :

$$n=1\rightarrow A^1=\begin{bmatrix}2^1&3(2^1-1)\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$n=k\rightarrow A^K=\begin{bmatrix}2^K&3(2^K-1)\\0&1\end{bmatrix} \text{ فرض استقرا}$$

$$A^{K+1}=\begin{bmatrix}2^{K+1}&3(2^{K+1}-1)\\0&1\end{bmatrix} \text{ حکم استقرا}$$

$$A^{K+1}=A^K\times A=\begin{bmatrix}2^K&3(2^K-1)\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2^{K+1}&2^K\times3+3(2^K-1)\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2^{K+1}&3\left[(2^K+2^K)-1\right]\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{K+1}&3(2^{K+1}-1)\\0&1\end{bmatrix}$$

با راهیان المپیاد های ریاضی ۳



غلامرضا یاسی پور

اشاره: در شماره های قبل، مسائلی را درباره ی قوت نقطه مطرح و ۴ مساله ی آن را حل کردیم، اینک در پی، حل ادامه ی آن مسائل را می آوریم.

مسائل قوت نقطه

۵. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث، و A' ، B' و C' ، به ترتیب، نقاطی بر اضلاع BC ، CA و AB باشند. نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABA' و $A'B'C'$ را با M، و نقطه‌ی تقاطع دوم دایره‌های ABB' و $A'B'C'$ را با N نمایش می‌دهیم. به همین شیوه، نقاط P، Q، R و S را، به ترتیب، تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که:

الف) دست کم یکی از موارد زیر رخ می‌دهد:

۱. خط‌های سه‌گانه‌ی $(AB, A'M, B'N)$ ، $(BC, B'P, C'Q)$ ، $(CA, C'R, A'S)$ ، به ترتیب، در C'' ، A'' ، و B'' متقاربند.

۲. $A'M$ و $B'N$ موازی AB، یا $B'P$ و $C'Q$ موازی BC، یا $C'R$ و $A'S$ موازی CA هستند.

ب) وقتی که حالت (۱) رخ می‌دهد، نقاط A'' ، B'' و C'' بر یک استقامتند.

۶. در میان نقاط A، B، C و D هیچ سه نقطه‌ای بر یک استقامت نیستند. خطوط AB و CD در E، و BC و DA در F متقاطعند. ثابت کنید یا دوایر با اقطار AC، BD و EF از نقطه‌ای مشترک می‌گذرند، یا هیچ دو دایره‌ای از آن‌ها نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۷. فرض می‌کنیم C_1 و C_2 دایره‌های هم‌مرکز باشند و C_2 درون C_1 قرار داشته باشد. از نقطه‌ی A بر C_1، مماس AB را بر C_2 رسم می‌کنیم $(B\in C_2)$. فرض می‌کنیم، C دومین نقطه‌ی تقاطع AB و C_1، و D وسط AB باشد. خط گذرنده از A دایره‌ی C_2 را در E و F چنان قطع می‌کند که عمودمنصف‌های DE و CF در نقطه‌ی M ی واقع بر AB متقاطع می‌شوند. نسبت $\frac{AM}{MC}$ را با دلیل به‌دست آورید.

۸. فرض می‌کنیم، ABC مثلثی حادالزّوایا باشد. نقاط M و N را به ترتیب بر اضلاع AB و AC درنظر می‌گیریم. دایره‌های به قطرهای BN و CM در نقاط P و Q تقاطع می‌کنند. ثابت کنید P، Q، و H، محل تلاقی ارتفاعات مثلث، واقع بر یک استقامت هستند.

۹. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارضلعی محدب و محاط در نیم‌دایره‌ی s به قطر AB باشد. خطوط AC و BD در E، و خطوط AD و BC در F تقاطع می‌کنند. خط EF نیم‌دایره‌ی s را در G و خط AB را در H قطع می‌کند. ثابت کنید، E وسط پاره‌خط GH است، اگر و تنها اگر G وسط پاره‌خط FH باشد.

۱۰. فرض می‌کنیم، ABC یک مثلث و D و E، به ترتیب، بر اضلاع AB و AC چنان باشند که DE موازی BC باشد. و فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای درون مثلث ADE و F و G، به ترتیب تقاطعات DE با خطوط BP و CP باشند. نیز فرض می‌کنیم، Q تقاطع دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های PDG و PFE باشد. ثابت کنید نقاط A، P، و Q بر یک خط مستقیم قرار دارند.

۱۱. فرض می‌کنیم A، B، C و D چهار نقطه‌ی متمایز واقع بر یک خط باشند. دایره‌های به قطرهای AC و BD در X و Y متقاطعند. خط XY با BC در Z تلاقی می‌کند. فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای بر خط XY، غیر از Z، باشد. خط CP دایره‌ی به قطر AC را در C و M، و خط BP دایره‌ی به قطر BD را در B و N قطع می‌کند. ثابت کنید، خطوط AM، DN، و XY متقاربند.

۱۲. نیم‌دایره‌ای به مرکز O و قطر AB را درنظر می‌گیریم. خطی AB را در M و نیم‌دایره را در C و D چنان قطع می‌کند که MB<MA و MD<MC. دوایر محیطی مثلث‌های AOC و DOB بار دیگر در نقطهٔ K متقاطع می‌شوند. نشان دهید MK و KO متعامدند.

حل مسائل قوت نقطه

۵. خط‌های AB، A′M و B′N محورهای اصلی سه جفت دایره‌ی حاصل از ABA′، ABB′، و A′B′C′ هستند. این خطوط یا موازی‌اند یا در مرکز اصلی سه دایره متقاطع می‌شوند.

به همین ترتیب، BC، B′P، و C′Q سه محور اصلی دایره‌های BCB′، BCC′ و A′B′C′، و CA، C′R، و A′S سه محور اصلی دایره‌های ACC′ و ACA′، و A′B′C′ هستند. بنابراین، یا حالت (۲) رخ می‌دهد، یا این خطوط به ترتیب، در سه نقطه‌ی A″، B″، و C″ متقاطع می‌شوند.



این موضوع، قسمت اول مسأله را به اثبات می‌رساند.

نقطه‌ی A'' دارای قوت یکسان نسبت به دایره‌های ABB' ، ABA'، و $A'B'C'$ است؛ یعنی:

$$A''A \cdot A''B = A''M \cdot A''A' = A''N \cdot A''B'$$

نتیجه می‌شود که A'' دارای قوت یکسان نسبت به دایره‌های ABC و $A'B'C'$ است؛ در نتیجه بر محور اصلی آن دو قرار دارد. به همین ترتیب، B'' و C'' بر محور اصلی دایره‌ی ABC و $A'B'C'$ قرار دارند، بنابراین، سه نقطه‌ی مورد بحث بر یک خط راست واقع هستند. (امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۸۵).

۶. ثابت می‌کنیم، دایره‌های مورد بحث «هم‌محور» (دارای محور اصلی مشترک) هستند که در این صورت، ادعای مورد بحث به اثبات می‌رسد: اگر دو دایره تلاقی کنند، آن‌گاه محور اصلی آن‌ها از تقاطعشان می‌گذرد؛ در نتیجه دایره‌ی سوم نیز از تقاطع آن‌ها می‌گذرد.

فرض می‌کنیم H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ADE باشد. همان‌طور که از راه‌حل مسأله‌ی ۴ ملاحظه می‌شود، قرینه‌ی H نسبت به هر ضلع، بر دایره‌ی محیطی مثلث واقع می‌شود. اگر A' ، D' ، و E' ، به ترتیب، پاهای ارتفاعات از A، D، و E باشند، این مطلب بدین معنی است که $AH \cdot A'H$ برابر نصف قوت H نسبت به دایره‌ی محیطی است، و همین ترتیب برای سایر ارتفاعات برقرار است. در این صورت:

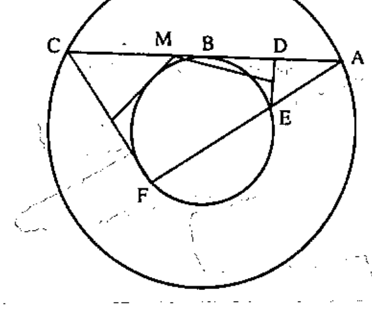
$$AH \cdot A'H = DH \cdot D'H = EH \cdot E'H$$

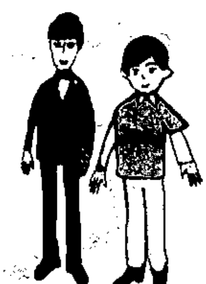
اما در مورد قوت نقطه‌ی H نسبت به دایره‌ی به قطر AC چه می‌توان گفت؟ از آن‌جا که A' بر این دایره قرار دارد، این قوت نیز $AH \cdot A'H$ است. با استفاده از استدلالی مشابه و برابری فوق، H دارای قوتی یکسان نسبت به دایره‌ای به قطرهای AC، BD، و EF است.

از طرف دیگر، همین مطلب باید در مورد محل تلاقی ارتفاعات سه مثلث دیگر حاصل از هر سه خط از چهار خط AB، BC، CD، DA برقرار باشد. از آن‌جا که جمیع این خطوط منطبق بر هم نیستند، سه دایره‌ی مورد بحث باید محور اصلی مشترک داشته باشند. (المپیاد ریاضی مجارستان، ۱۹۹۵).

۷. با نوشتن قوت نقطه‌ی A نسبت به C_2 ، حاصل می‌کنیم (شکل ۵):

$$AE \cdot AF = AB^2$$





شکل ۵

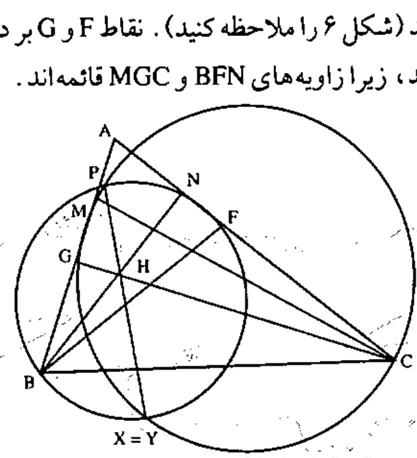
از طرف دیگر: $AD \cdot AC = (AB/2) . 2AB = AB^2$

در نتیجه: $AE \cdot AF = AD \cdot AC$

این رابطه نشان می‌دهد که مثلث‌های ADE و AFC (با زاویه‌ی مشترک در A) مشابهند؛ به این ترتیب: $\angle AED = \angle ACF$. بنابراین DEFC دوری است.

از آن‌جا که M تقاطع عمود منصف‌های DE و CF است، باید مرکز دایره‌ی محیطی DEFC باشد. در نتیجه، M نیز بر عمود منصف CD قرار دارد. و از آن‌جا که M بر AC است، باید وسط CD باشد. در نتیجه: $AM / MC = \frac{5}{3}$ (طرح از: R. Gelca؛ USAMO، ۱۹۹۸).

۸. فرض می‌کنیم F و G، به ترتیب پاهای ارتفاعات از B و C باشند (شکل ۶ را ملاحظه کنید). نقاط F و G بر دو دایره قرار دارند، زیرا زاویه‌های BFN و MGC قائمه‌اند.



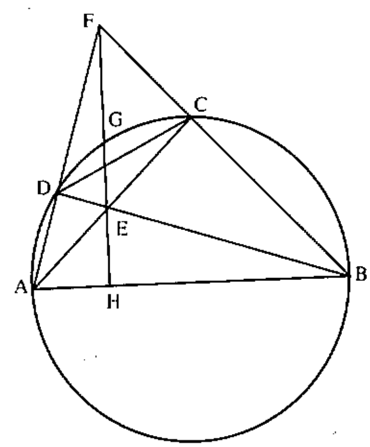
شکل ۶

فرض می‌کنیم X و Y تقاطع PH با این دایره‌ها باشند. مسأله خواهان این است که اثبات کنیم: X=Y. با نوشتن قوت نقطه‌ی H نسبت به دایره‌های به قطرهای BN، CM و BC، رابطه‌های زیر را حاصل می‌کنیم:

$PH \cdot HX = CH \cdot HG = BH \cdot HN = PH \cdot HY$

یعنی: HX=HY، و در نتیجه: X=Y، و کار انجام می‌شود (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸).

۹. از آن‌جا که AC و BD ارتفاعات مثلث ABF هستند (شکل ۷ را ملاحظه کنید.)



شکل ۷

E محل تلاقی ارتفاعات این مثلث است. بنابراین FE بر AB عمود است. مثلث‌های HEB و HAF مشابهند، بنابراین HE/HA=HB/HF. در نتیجه:

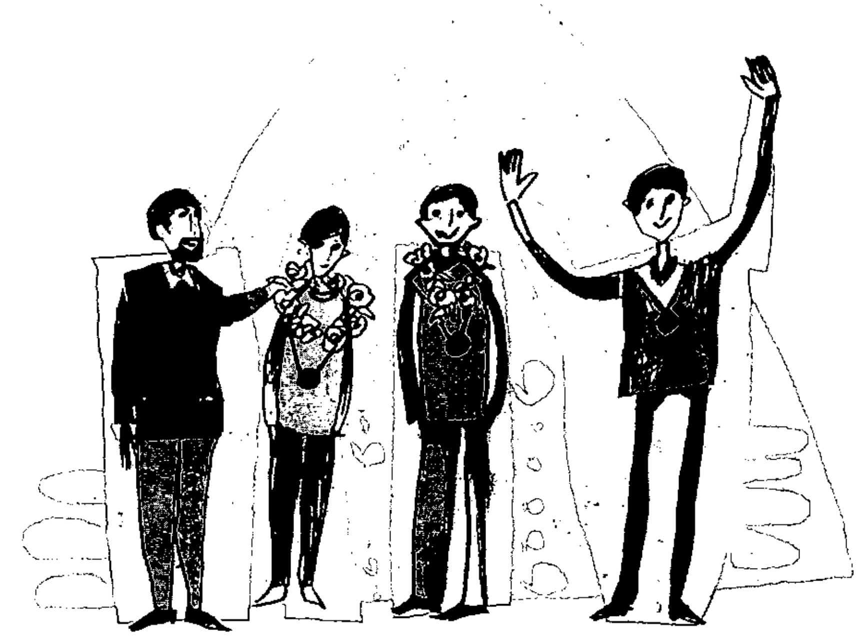
$HE \cdot HF = HA \cdot HB$

که برابر HG^2 است (قوت نقطه‌ی H نسبت به این دایره)، و هم‌ارزی مورد بحث اکنون واضح است (پیشنهادی ایالات متحده برای IMO، ۱۹۹۷، طرح T.Andreescu).

۱۰. کافی است نشان دهیم، A بر محور اصلی دایره‌های محیطی مثلث‌های DPG و FPE است؛ یعنی A دارای قوت‌های یکسان نسبت به این دو دایره است. بنابراین می‌کوشیم، این دو قوت را محاسبه کنیم.

نقطه‌ی تقاطع دیگر AB را با دایره‌ی محیطی مثلث DPG با M، و نقطه‌ی تقاطع دیگر AC را با دایره‌ی محیطی مثلث FPE، با N نمایش می‌دهیم. در این صورت، دو قوت مورد بحث $AD \cdot AM$ و $AE \cdot AN$ هستند. برای اثبات این که این دو برابرند، کافی است نشان دهیم که نقاط M، N، D، E بر یک دایره واقعند.

اگر D بین A و M باشد، آن‌گاه از آن‌جا که MDPG دوری است:



$\angle DMP = \angle DGP$

نیز، DG و BC موازی‌اند، بنابراین زاویه‌ی اخیر برابر با $\angle BCP$ است. در نتیجه M، B، C و P دوری هستند.

اگر M بین A و D باشد، آن‌گاه $\angle DMP$ و $\angle BCP$ مکملند، و این مطلب بار دیگر مستلزم آن است که M، B، C و P دوری هستند.

به همین ترتیب، N، B، C، P و همچنین M، N، B، C، دوری‌اند. از آن‌جا که DE موازی BC است، M، N، D و E دوری‌اند، و اثبات کامل می‌شود (امتحان انتخابی IMO هند، ۱۹۹۵).

۱۱. با نوشتن قوت نقطه‌ی P نسبت به دو دایره، حاصل می‌کنیم (شکل ۸):

$BP \cdot PN = XP \cdot PY = CP \cdot PM$

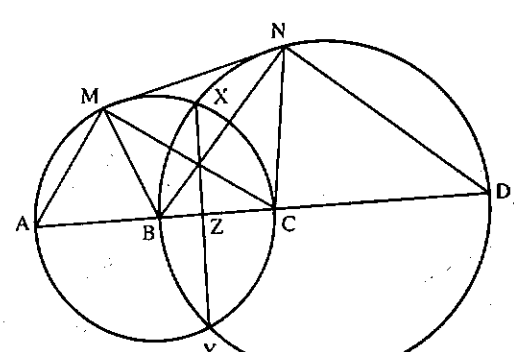
یعنی چهار ضلعی MBCN دوری است، و بنابراین:

$\angle MNB = \angle MCB$.

دو مثلث MAC و BND قائم‌الزاویه‌اند، زیرا AC و BD قطرند؛ در نتیجه:

$\angle A = 90^\circ - \angle MCA = 180^\circ - \angle MND$

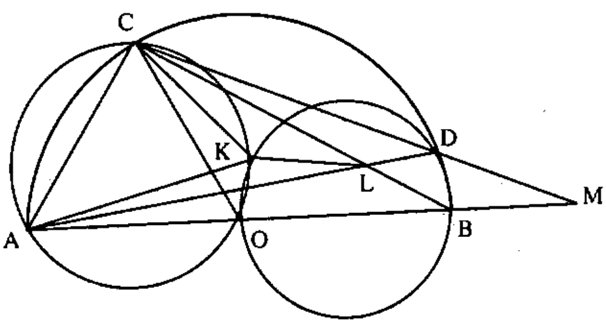
نتیجه می‌شود که چهار ضلعی AMND دوری است. خط‌های XY، AM و DN محورهای اصلی دایره‌های به قطرهای AC، BD و دایره‌ی محیطی AMND هستند. در نتیجه، در مرکز اصلی این دایره‌ها همرس هستند. (سی و ششمین IMO، ۱۹۹۵؛ طرح از Bulgaria).



شکل ۸



۱۲. فرض می‌کنیم L تقاطع AD و CB باشد. کار را با اثبات این مطلب آغاز می‌کنیم که K، L، و M بر یک استقامتند (شکل ۸). در چهار ضلعی دوری AOKC داریم:



شکل ۹

$\angle AKO = \angle ACO$

به همین ترتیب، در چهار ضلعی دوری BOKD:

$\angle BKO = \angle BDO$

در دایره‌ی به قطر AB:

$\angle ACO = 90^\circ - \angle COA/2$

$\angle BDO = 90^\circ - \angle BOD/2$

با مرتبط کردن زاویه‌ها با کمان‌های نیم‌دایره، حاصل می‌کنیم:

$$\angle AKB = \angle AKO + \angle OKB = 180^\circ - \left(\frac{\angle COA}{2} + \frac{\angle BOD}{2}\right)$$
$$= 180^\circ - \left(\frac{\widehat{CA}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2}\right) = 180^\circ - \angle CLA = \angle ALB$$

بنابراین، $\angle AKB = \angle ALB$، و بنابراین چهار ضلعی AKLB دوری است.

به عنوان نتیجه به دست می‌آوریم:

$$\angle CKL = 360^\circ - \angle AKL - \angle CKA$$
$$= (180^\circ - \angle AKL) + (180^\circ - \angle CKA)$$
$$= \angle LBA - (180^\circ - \angle COA)$$

با ارجاع به کمان‌های واقع بر نیم‌دایره‌ی مفروض، حاصل می‌کنیم:

$180^\circ - \angle COA = 180^\circ - \widehat{AC}/2, \angle LBA = \widehat{AC}/2,$
$\angle CAD = \widehat{CD}/2$

با جمع این سه، و استفاده از برابری فوق، رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\angle CKL + \angle CDL = ۱۸۰^\circ$$

در نتیجه، چهار ضلعی AKLD دوری است. سه محور اصلی دایره‌های محیطی AKLB، CKLD، و ABCD در مرکز اصلی متقاطع می‌شوند.

محورهای اصلی مزبور عبارتند از CD، AB، و KL. در نتیجه، M، تقاطع دو مورد اول، بر سومی قرار می‌گیرد.

بنابراین مسأله را به اثبات این مطلب تحویل کرده‌ایم که LK عمود بر KO است.

از آن‌جا که مجموع زوایای AKL و ABL ۱۸۰° است، کافی است ثابت کنیم:

$$\angle AKO + \angle ABL = ۹۰^\circ$$

با استفاده از چهار ضلعی دوری ACKO می‌نویسیم:

$$\angle AKO + \angle ABL = \angle ACO + \angle CBA = \frac{۱۸۰^\circ - \angle COA}{۲} + \frac{\widehat{AC}}{۲}$$

$$= ۹۰^\circ - \frac{\widehat{AC}}{۲} + \frac{\widehat{AC}}{۲} = ۹۰^\circ$$

و به این ترتیب مسأله حل می‌شود (المپیاد ریاضی بالکان، ۱۹۹۶).





معماهای فکری و منطقی

در ملاقاتی که با خانم A داشتم، به سه فرزند او معرفی، و سن‌شان را جویا شدم. میزبانم با لبخند گفت: «دقیقاً به خاطر نمی‌آورم، چون رابطه‌ام با عدد و رقم خوب نیست. اما اگر B کوچک‌ترین نباشد، فکر می‌کنم A هست، و اگر C کوچک‌ترین نباشد، آنوقت A بزرگترین است. این اطلاعات کافی هستند؟»

جواب دادم البته که کافی هستند؛ گر چه اصلاً چنین نبود. تا این‌که روزها بعد، ناگهان به خاطرم خطور کرد گر چه نتوانسته بود سن بچه‌هایش را به من بگوید، دست کم می‌توانستم بر اساس راهنمایی‌های عجیب و غریبیش بگویم کدام بزرگ‌ترین، کدام وسطی و کدام کوچک‌ترین است.

❀❀❀

سن نسبی سه کودک مزبور چیست؟



اشاره

در قسمت اول این مقاله، حالت‌های ناقص معادله درجه دوم بررسی شد و فرمول‌های حل معادله اثبات شد و چند نکته مفید با ذکر مثال‌های متنوع مطرح شد.

در شماره‌ی قبل تجزیه‌ی معادله‌ی درجه دوم به حاصل‌ضرب عوامل اول، تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم و بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم بیان شد. اینک در ادامه، روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌های درجه دوم را در پی می‌آوریم.

۳

احمد قندهاری

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ با فرض این‌که x' و x'' ریشه‌های این معادله باشند رابطه‌های بین a، b، c و x' و x'' از این قرارند:

۱. $x'+x''=-\frac{b}{a}=S$

۲. $x'.x''=\frac{c}{a}=P$

۳. $|x'-x''|=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴. $x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=S^2-2P$

۵. $\frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}=\frac{x''^2+x'^2}{x'^2.x''^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}$

۶. $|x'^2-x''^2|=|(x'-x'')(x'+x'')|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times S\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\times|S|$

۷. $x'^3+x''^3=(x'+x'')(x'^2+x''^2-x'x'')$

$=S(S^2-2P-P)=S(S^2-3P)$

$\Rightarrow x'^3+x''^3=S^3-3PS$

۸. $\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{x''^3+x'^3}{x'^3.x''^3}=\frac{S^3-3PS}{P^3}$

۹. $|x'^3-x''^3|=|(x'-x'')(x'^2+x''^2+x'.x'')|$

$=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(S^2-2P+P)\right|$

$\Rightarrow|x'^3-x''^3|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}|S^2-P|$

۱۰. $x'^4+x''^4=(x'^2+x''^2)^2-2x'^2.x''^2=(S^2-2P)^2-2P^2$

۱۱. $\frac{1}{x'^4}+\frac{1}{x''^4}=\frac{x''^4+x'^4}{x'^4.x''^4}=\frac{(S^2-2P)^2-2P^2}{P^4}$

۱۲. $|x'^4-x''^4|=|(x'^2-x''^2)(x'^2+x''^2)|$

$=(x'^2+x''^2)|x'^2-x''^2|=(S^2-2P)\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.|S|$

فرض می‌کنیم: $x'>0$, $x''>0$ درنتیجه داریم:

۱۳. $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})^2}=\sqrt{x'+x''+2\sqrt{x'x''}}$

$=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

۱۴. $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\sqrt{(\sqrt{x'}-\sqrt{x''})^2}=\sqrt{x'+x''-2\sqrt{x'x''}}$

$=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$

$$15.\ \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}}=\frac{x'+x''}{\sqrt{x'x''}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$$

مسأله‌ی ۱. در معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ ، اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، موارد ۱۵ گانه‌ی روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را محاسبه کنید.

حل: در این معادله داریم: $\Delta=9-4=5>0$ و $\frac{c}{a}=1>0$ و $-\frac{b}{a}=3>0$ پس دو ریشه‌ی معادله، یعنی x' و x'' مثبت هستند.

$a=1$ و $b=-3$ و $c=1$

$S=-\frac{b}{a}=3\Rightarrow S=3$

$P=\frac{c}{a}=1\Rightarrow P=1$

$1.\ x'+x''=S=3$

$2.\ x'.x''=P=1$

$3.\ |x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$

$4.\ x'^2+x''^2=S^2-2P=9-2=7$

$5.\ \frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{7}{1}=7$

$6.\ \left|x'^2-x''^2\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.|S|=\frac{\sqrt{5}}{1}\times 3=3\sqrt{5}$

$7\ x'^3+x''^3=S^3-3PS=(3)^3-3(1)(3)=27-9=18$

$8.\ \frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{S^3-3PS}{P^3}=\frac{18}{1}=18$

$9.\ \left|x'^3-x''^3\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.\left|S^2-P\right|=\frac{\sqrt{5}}{1}|9-1|=8\sqrt{5}$

$10.\ x'^4+x''^4=(S^2-2P)^2-2P^2=(9-2)^2-2=47$

$11.\ \frac{1}{x'^4}+\frac{1}{x''^4}=\frac{(S^2-2P)^2-2P^2}{P^4}=\frac{47}{1}=47$

$12.\ \left|x'^4-x''^4\right|=(S^2-2P)\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.|S|=(7)\frac{\sqrt{5}}{1}(3)=21\sqrt{5}$

$13.\ \sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{3+2\sqrt{1}}=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$

$14.\ \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}=\sqrt{3-2\sqrt{1}}=\sqrt{3-2}=1$

$15.\ \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}}=\frac{S}{\sqrt{P}}=\frac{3}{\sqrt{1}}=\frac{3}{1}=3$

مسأله‌ی ۲. اگر در معادله‌ی $x^2-5x+(m-2)=0$ ، x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $x'^3+x''^3=65$ ، آن‌گاه مقدار m را بیابید.

حل: $S=5$ و $P=m-2$ $\qquad x'^3+x''^3=65$

$S^3-3PS=65$

$(5)^3-3(m-2)(5)=65$

$125-15(m-2)=65$

$60=15(m-2)\Rightarrow 4=m-2\Rightarrow \boxed{m=6}$

مسأله‌ی ۳. در معادله‌ی $x^2+(m-2)x+(k+1)=0$ اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $x'^4-\frac{1}{x'^4}+x''^4-\frac{1}{x''^4}=0$ و $x'^2+x''^2=47$ ، آن‌گاه مقدار k و m را بیابید (x' و x'' مخالف صفرند).

حل: $x'^4-\frac{1}{x'^4}+x''^4-\frac{1}{x''^4}=0$

$\Rightarrow x'^4+x''^4=\frac{1}{x'^4}+\frac{1}{x''^4}\Rightarrow x'^4+x''^4=\frac{x'^4+x''^4}{x'^4.x''^4}$

$\Rightarrow 1=\frac{1}{x'^4.x''^4}\Rightarrow (x'x'')^4=1\Rightarrow (\frac{c}{a})^4=1$

$\Rightarrow \frac{c}{a}=\pm 1\Rightarrow \frac{k+1}{1}=\pm 1\Rightarrow k=-1\pm 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{k=0 \text{ یا } -2}$

$$x'^2 + x''^2 = 47 \Rightarrow S^2 - 2P = 47 \begin{cases} S = -(m-2) \\ P = k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 - 2(k+1) = 47$$

الف) $k = 0\ ;\ (m-2)^2 - 2 = 47 \Rightarrow (m-2)^2 = 49$

$$\Rightarrow m - 2 = \pm 7 \Rightarrow m = 2 \pm 7 \Rightarrow \boxed{m = 9 \text{ یا } -5}$$

ب) $k = -2\ ;\ (m-2)^2 + 2 = 47 \Rightarrow (m-2)^2 = 45$

$$\Rightarrow m - 2 = \pm\sqrt{45} \Rightarrow m = 2 \pm \sqrt{45} \Rightarrow \boxed{m = 2 \pm 3\sqrt{5}}$$

تشکیل معادله

۱. تشکیل معادله با حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد

اگر مجموع دو عدد یعنی S و حاصل ضرب همان دو عدد یعنی P، معلوم باشند و بخواهیم آن دو عدد را پیدا کنیم، معادله‌ی درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش آن دو عدد باشند.

معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را درنظر می‌گیریم و دو طرف آن را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

می‌دانیم: $\begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases}$

$$x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

در معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$، مقادیر عددی S و P را قرار می‌دهیم و آن‌گاه معادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم، از حل معادله آن دو عدد به‌دست می‌آیند.

مثال: دو عدد چنان بیابید که مجموع آن‌ها ۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲ باشد.

حل: $x^2 - Sx + P = 0\ ;\ S = 4$ و $P = 2$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} = 2 \pm \sqrt{2}$$

پس آن دو عدد $\sqrt{2} - 2$ و $\sqrt{2} + 2$ هستند.

۲. تشکیل معادله‌ای که یک ریشه‌ی آن معلوم است

ریشه‌ی معلوم را مساوی x قرار می‌دهیم. سپس دو طرف این رابطه را به توان درجه‌ی معادله‌ی موردنظر می‌رسانیم.

مثال: معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشه‌ی آن $\sqrt{2} - 3$ باشد.

روش اول: $x = 3 - \sqrt{2}$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم: $x - 3 = -\sqrt{2}$

$$x^2 - 6x + 9 = 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

روش دوم: اگر بخواهیم معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا بسازیم که یک ریشه‌ی آن $\sqrt{2} - 3$ باشد، باید ریشه‌ی دیگر $\sqrt{2} + 3$ باشد تا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها اعداد گویا باشند. پس:

$$S = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

توجه: روش اول کاراتر است.

مثال۲: معادله‌ی درجه سومی با ضرایب گویا بسازید که یک ریشه‌ی آن $\sqrt[3]{5} - 2$ باشد.

حل: $x = \sqrt[3]{5} - 2$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم: $x + 2 = \sqrt[3]{5}$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 5 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 3 = 0$$

تشکیل معادله‌ی درجه دوم جدید از روی معادله‌ی مفروض تحت شرایط خاص

ریشه معادله‌ی مفروض را x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم. سپس خواسته‌ی مسأله را به یک رابطه‌ی ریاضی بین x و y تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه x را از آن رابطه محاسبه می‌کنیم و در معادله‌ی مفروض قرار می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که در انتهای کار، یک معادله‌ی درجه دوم حاصل شود.

مسأله‌ی۱. معادله‌ی $x^2 - 5x + 3 = 0$ مفروض است. معادله‌ی درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که:

الف) ریشه‌های آن از ثلث ریشه‌های معادله‌ی مفروض ۲ واحد کم‌تر باشد.

ب) ریشه‌های آن از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی مفروض ۳ واحد بیش‌تر باشد.

ج) ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد.

د) ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله‌ی مفروض باشد.

حل:

الف) $\begin{cases} x = \text{ریشه‌ی معادله‌ی مفروض} \\ y = \text{ریشه‌ی معادله‌ی جدید} \end{cases}$

$$y = \frac{x}{۳} - ۲ \Rightarrow \frac{x}{۳} = y + ۲ \Rightarrow x = ۳y + ۶$$

در معادله‌ی مفروض به جای x، $۳y + ۶$ را قرار می‌دهیم:

$$x^۲ - ۵x + ۳ = ۰ \Rightarrow (۳y + ۶)^۲ - ۵(۳y + ۶) + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۹y^۲ + ۳۶y + ۳۶ - ۱۵y - ۳۰ + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۹y^۲ + ۲۱y + ۹ = ۰ \Rightarrow ۳y^۲ + ۷y + ۳ = ۰$$

ب) $y = ۲x + ۳ \Rightarrow ۲x = y - ۳ \Rightarrow x = \frac{y - ۳}{۲}$

در معادله‌ی مفروض به جای x، $\frac{y-۳}{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^۲ - ۵x + ۳ = ۰ \Rightarrow \frac{(y - ۳)^۲}{۴} - \frac{۵(y - ۳)}{۲} + ۳ = ۰$$
$$(y - ۳)^۲ - ۱۰(y - ۳) + ۱۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۶y + ۹ - ۱۰y + ۳۰ + ۱۲ = ۰$$
$$\Rightarrow y^۲ - ۱۶y + ۵۱ = ۰$$

ج) $y = x^۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

در معادله‌ی درجه دوم مفروض به جای x، $\pm\sqrt{y}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^۲ - ۵x + ۳ = ۰ \Rightarrow (\pm\sqrt{y})^۲ - ۵(\pm\sqrt{y}) + ۳ = ۰$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم

$$y - ۵(\pm\sqrt{y}) + ۳ = ۰ \Rightarrow y + ۳ = ۵(\pm\sqrt{y})$$
$$y^۲ + ۶y + ۹ = ۲۵y \Rightarrow y^۲ - ۱۹y + ۹ = ۰$$

د) $y = x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y}$

در معادله‌ی مفروض به جای x، $\sqrt[۳]{y}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^۲ - ۵x + ۳ = ۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{y^۲} - ۵\sqrt[۳]{y} + ۳ = ۰$$

روش اول: $\sqrt[۳]{y^۲} - ۵\sqrt[۳]{y} = -۳$

$a = \sqrt[۳]{y^۲}$ و $b = ۵\sqrt[۳]{y}$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم: $a - b = -۳$

$$a^۳ - b^۳ - ۳ab(a - b) = -۲۷$$
$$y^۲ - ۱۲۵y - ۳(\sqrt[۳]{y^۲})(۵\sqrt[۳]{y})(-۳) = -۲۷$$
$$y^۲ - ۱۲۵y + ۴۵y = -۲۷ \Rightarrow y^۲ - ۸۰y + ۲۷ = ۰$$

روش دوم: استفاده از اتحاد اولر

$$\begin{cases} a + b + c = ۰ \\ \text{یا} \\ a = b = c \end{cases} \Rightarrow a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۳abc$$

$$\sqrt[۳]{y^۲} - ۵\sqrt[۳]{y} + ۳ = ۰$$

$$a = \sqrt[۳]{y^۲},\ \ b = -۵\sqrt[۳]{y},\ \ c = ۳$$

$$a + b + c = ۰ \Rightarrow a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۳abc$$

$$\sqrt[۳]{y^۲} - ۵\sqrt[۳]{y} + ۳ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۱۲۵y + ۲۷ = ۳(\sqrt[۳]{y^۲})(-۵\sqrt[۳]{y})(۳) \Rightarrow$$
$$y^۲ - ۱۲۵y + ۲۷ = -۴۵y \Rightarrow y^۲ - ۸۰y + ۲۷ = ۰$$

مسأله‌ی۲. معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ مفروض است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $۲x' + ۳x'' - ۴$ و $۲x'' + ۳x' - ۴$ باشند.

حل: یکی از روابط را مساوی y قرار می‌دهیم:

$$y = ۲x' + ۳x'' - ۴ \Rightarrow y = ۲x' + ۲x'' + x'' - ۴ \Rightarrow$$
$$y = ۲(x' + x'') + x'' - ۴ \Rightarrow y = ۲(۳) + x'' - ۴ \Rightarrow$$
$$y = ۶ + x'' - ۴ \Rightarrow x'' = y - ۲ \text{ و } x = y - ۲$$

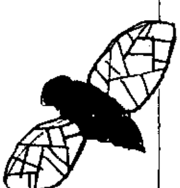
در معادله‌ی مفروض به جای x، $y - ۲$ را قرار می‌دهیم.

روش مگس در حل مسائل ریاضی

مرتضی بیات و زهرا خاتمی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه‌ی زنجان
Bayat @iasbs.ac.ir

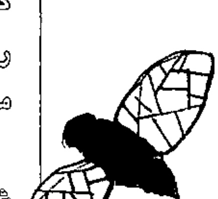
چکیده

ژورژ پولیا می‌گوید: «اگر یک مساله یا یک قضیه چندین بار به کار رود، به یک روش تبدیل می‌شود.»



در ابتدای این مقاله، چندین روش قدیمی حل مساله‌ی ریاضی همانند «برهان خلف» و «روش نزول نامتناهی فرما» و نیز «استقرای ریاضی» را بررسی می‌کنیم. در ادامه، با استفاده از روش برهان خلف، راه حلی ساده برای مساله‌ی قدیمی اشتینر- لموس در هندسه‌ی مقدماتی ارائه می‌دهیم و نیز به تعمیمی از استقرا برای اعداد حقیقی و کاربرد آن در آنالیز ریاضی اشاره می‌کنیم.

هدف اصلی این مقاله، معرفی روش جدیدی به نام «تغییر بُعد» یا «روش مگس» و چگونگی پیدایش آن است. روش مگس، در درک و فهم ساده‌ی مسائل و ارائه‌ی توجیه شهودی برای آن‌ها و نیز حدس و تعمیم مسائل و قضایا، روشی کارا است. لازم به ذکر است، این روش به صورت پنهان در اکثر کارهای ریاضیدانان بزرگ دیده می‌شود، اما متأسفانه تا به حال به عنوان روشی کارامد معرفی نشده است.



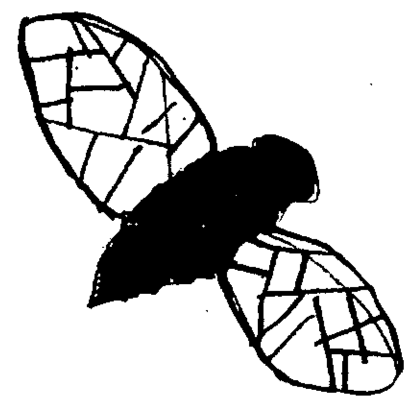
در پایان این مقاله، به بخشی از مسائلی می‌پردازیم که با روش مگس حل شده‌اند.

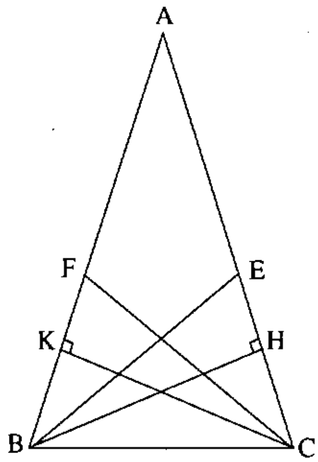
مقدمه

همان‌گونه که می‌دانیم، مسائل ریاضی با روش‌های متفاوت حل می‌شوند که بعضی از آن‌ها قدمت بسیار دارند. برای مثال، روش کلیدی «**برهان خلف**»[1] که در حل اکثر مسائل ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارد، به زمان **اقلیدس** برمی‌گردد.

چنان‌که ریاضیدان بزرگ انگلیسی، **هاردی**[2] در این‌باره گفته است:

«برهان خلف، این عزیز دردانه‌ی اقلیدس، یکی از برّنده‌ترین سلاح‌های ریاضیدانان است. در بازی شطرنج، وقتی حرکتی انجام می‌گیرد، دیری نمی‌پاید که ارزش آن





شکل ۱

معین می‌شود. بازیکن ممکن است خطر از دست دادن یک پیاده یا مهره‌ی دیگر را بپذیرد؛ امّا برای او کل بازی مطرح است.»

در این جا اثبات جدیدی از قضیه‌ی «اشتینر ـ لموس» [۵] را می‌آوریم که به وسیله‌ی برهان خلف ارائه شده است. در این راه حل، فقط از مقاله‌ی اول اقلیدس استفاده شده است.

قضیه‌ی اشتینر ـ لموس: اگر دو نیمساز داخلی مثلثی با هم برابر باشند، آن‌گاه مثلث متساوی‌الساقین خواهد بود.

برهان: مثلث مفروض ABC با دو نیمساز برابر BE و CF را در نظر می‌گیریم (شکل ۱). ابتدا دو ارتفاع BH و CK را رسم می‌کنیم. فرض خلفی را بنا می‌کنیم مبنی بر این که مثلث مفروض متساوی‌الساقین نباشد، پس $BH \neq CK$. حال فرض کنیم: $CK<BH$. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BHE و CKF وتری یکسان دارند (BE=CF)، پس $K\hat{F}C < B\hat{E}H$ (*).

حال در دو مثلث قائم‌الزاویه BHC و BKC وتر BC مشترک است و چون $CK< BH$ است، پس $\hat{B} < \hat{C}$. در نتیجه: $\hat{B}/2 < \hat{C}/2$. آن‌گاه داریم:

$E\hat{B}F < F\hat{C}E$.

سپس خواهیم داشت: $K\hat{F}C > B\hat{E}H$ که مخالف نامساوی (*) و فرض اختیاری ماست. در حالت $CK >BH$ نیز به طور مشابه دچار تناقض می‌شویم. پس باید $CK=BH$ و مثلث متساوی‌الساقین باشد.

روش قدیمی دیگر، **روش استقرای ریاضی** است که گرچه با اصول پئانو (۱۸۸۹) رسمیت یافت، ولی قبل از آن هم توسط **ددکیند** به کار برده شده بود. باید اقرار کرد که همان **روش نزول نامتناهی فرما**[۳] شروع کننده استقراست. روش نزول نامتناهی، به وسیله‌ی **پیردوفرما** (۱۶۶۵ـ۱۶۰۱) در اثبات عدم وجود جواب‌های معادله‌ی سیال به کار برده شده است و به نظر می‌رسد، این تنها ابزار فرما برای حل معادلات سیال بوده است. فرما قصد داشت که روش خودش را در مورد عدم وجود جواب غیر بدیهی معادله‌ی $X^n + Y^n = Z^n$ برای $n \geq 3$ به کار ببرد، ولی این روش در مورد $n \geq 5$ دچار مشکل شد.

امروزه جمله‌ی «طبق فرض استقرا» بیش‌ترین تکرار را در نوشته‌های ریاضی دارد. لازم به ذکر است، روش استقرا برای اعداد حقیقی نیز درست است. این موضوع را **بلمبورگ** در سال ۱۹۳۰ در شیکاگو، در یک سخنرانی ارائه کرد که بعدها در "Bull. AMS" به چاپ رسید. البته موضوع سخنرانی چیز دیگری بود و او به استقرا برای اعداد حقیقی، تنها اشاره‌ی کوتاهی کرد. ظاهراً هیچ کس بعدها به این استقرا اشاره‌ای نکرده است تا این که در سال ۱۹۸۹ یک چینی به نام **ژانگ چینگ ژونگ**، در گزارش‌هایی فنی که در تریست ایتالیا[۱] (IC/89/157) به چاپ رساند، این روش اثبات را به طور کامل بیان کرد. البته ظاهراً او از کار بلمبورگ بی‌خبر بوده است. ژانگ اکثر قضایای آنالیز مقدماتی را با این روش اثبات کرد. با توجه به این‌که روش استقرا از همان ابتدا به همه معرفی می‌شود، این روش شاید در آنالیز کارایی بهتری از روش



دِکنید داشته باشد. حال بهتر است، به‌طور خلاصه اصل استقرای پیوسته را در جدول معرفی کنیم.

اصل استقرای اعداد طبیعی	اصل استقرای اعداد حقیقی
فرض کنید P(n) یک گزاره روی اعداد طبیعی n باشد؛ به طوری که: ۱. یک عدد طبیعی n_0 وجود دارد، به طوری که P(n) برای $n<n_0$ درست است. ۲. اگر P(n) برای n<m درست باشد، آن‌گاه P(n) برای n<m+1 درست است. در این صورت P(n) برای تمام اعداد طبیعی درست است.	فرض کنید P(x) یک گزاره‌نما روی عدد حقیقی x باشد، به طوری که: ۱. یک عدد حقیقی x_0 وجود دارد، به طوری که P(x) برای $x<x_0$ درست است. ۲. اگر P(x) برای x<y درست باشد، آن‌گاه یک $\delta_y > 0$ وجود دارد که P(x) برای $x < y + \delta_y$ نیز درست است. در این صورت P(x) برای تمام اعداد حقیقی درست است.

روش مگس

در این‌جا به روش جدیدی در حل مسائل ریاضی به نام روش تغییر بُعد یا روش مگس می‌پردازیم. لازم به ذکر است، این روش بدون اطلاع مؤلفان دو مقاله‌ی [۱] و [۶] در فهرست منابع، و به‌طور مستقل از هم کشف شده است. **الکساندر شِن**[۴] در مقاله‌ی [۱] با عنوان «حل مسائل سه بُعدی برای مسائل دو بُعدی»، تنها این روش را برای حل مسائل هندسی به کار برده است. در مقاله‌ی [۶] با عنوان «روش‌ها و نتایج کلیدی در ریاضیات» که به زبان فارسی نوشته شده است، دکتر امید علی شهنی کرمزاده، این روش را علاوه بر مسائل هندسی، به مسائل گوناگون ریاضی گسترش داده و تعدادی مسائل غیر هندسی را نیز به کمک آن حل کرده است. دکتر کرمزاده این روش را با عنوان روش تغییر بُعد (روش مگس) نامگذاری کرده و سپس دلیل این نامگذاری را به این صورت نقل کرده است: «علت نامیدن این روش به نام مگس، حکایت زیر است:

درست در سال ۱۳۴۸ خورشیدی (۱۹۷۸ میلادی) در دانشگاه تهران، در بخش ریاضی با دکتر **محسن هشترودی** کلاس داشتیم. ایشان طبق معمول از هر فرصتی استفاده می‌کرد و راجع به موضوعات علمی که خیلی هم در دانشجویان انگیزه ایجاد می‌کرد، صحبت می‌کرد [ایشان به واقع به این گفته‌ی آلبرت اینشتین که «تخیل بالاتر از علم است»، ایمان کامل داشت]. آن روز موضوع مفهوم بُعد فضا و ناتوانی انسان به عنوان موجودی که نمی‌تواند به طور فیزیکی از همه‌ی ابعادش استفاده کند، بود. او گفت: مثلاً ورق کاغذی را در نظر بگیرید که به شکلی در فضا نگه داشته شده است و روی آن سه موجود مثلاً یک عقرب و یک سوسک و یک مگس قرار دهید و بعد این ورق را آتش بزنید. مگس پرواز می‌کند، ولی دو موجود دیگر که ظاهراً قوی‌تر از مگس هستند، کشته می‌شوند. یعنی یک حادثه، ظاهراً در یک فضای دو بعدی برای سه موجود سه بُعدی اتفاق می‌افتد، ولی فقط یکی از آن‌ها جان سالم به در می‌برد. و البته بحث می‌کرد که اگر سوسک و عقرب فکر داشتند نیز می‌توانستند خود را نجات دهند. به هر حال، این مثال روی من خیلی تأثیر گذاشت و نتیجه‌گیری‌های غیر ریاضی هم برای من داشت که در این‌جا به آن‌ها اشاره‌ای نمی‌کنم. ولی در مورد تأثیرش در فکر ریاضی‌ام باید بگویم، پیش خود فکر کردم، پس اگر ما هم یک مشکلی در صفحه داشتیم (مثل حل یک مسأله‌ی ریاضی)، باید بتوانیم بعضی اوقات با رفتن به فضا یا بالعکس این مشکل را ساده‌تر کنیم. بعدها دیدم، در عمل این طرز فکر کاملاً ریاضی است و کاربردهای فراوان دارد. از آن‌رو آن را روش مگس نامیدم.»

دکتر **محسن هشترودی** (۲۲ دی ۱۲۸۶ در تبریز ـ ۱۳ شهریور ۱۳۵۵ در تهران)، ریاضیدان و هنرشناس ایرانی است. در سال ۱۳۰۴ دارالفنون را تمام کرد، چند سال پزشکی خواند و بعد وارد دانش‌سرای عالی (تربیت معلم) و رشته‌ی ریاضی شد. سپس به فرانسه رفت، از دانشکده‌ی علوم پاریس لیسانس و از دانشگاه سوربون دکترای ریاضی گرفت (۱۹۱۷ میلادی). بعد به تهران آمد و به تدریس ریاضی در دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران مشغول شد. در سال ۱۳۲۰ به مرتبه‌ی استادی رسید و از سال ۱۳۳۶ ریاست

دانشکده‌ی علوم دانشگاه تهران را به عهده داشت. رساله‌ی دکترای هشترودی «فضاهای تصویری ـ نقطه، خط، صفحه ـ با اتصال‌های نرمال» بود. در این زمینه، الی کارتان را استاد راهنما انتخاب کرده بود. هشترودی، به قول دکتر علی افضلی‌پور، استاد ریاضیات «دانشمند، استاد و انسان» بود. بی‌هیچ پروا عقیده‌اش را بیان می‌کرد و در دانشگاه همیشه جانبدار دانشجویان بود. هشترودی را در ضمن باید یک مربی بزرگ به شمار آورد. از او دو کتاب ریاضی به زبان فرانسوی «از انتشارات دانشگاه تهران» مجموعه‌ای از مقاله‌ها با عنوان‌های «دانش و هنر»، «تمرین‌های ریاضیات مقدماتی»، مجموعه‌ی شعری با عنوان «سایه‌ها» و تعداد زیادی مقاله در «نشریه‌ی داخل و خارج از کشور» باقی مانده است.

بیان لطیف و پر معنای زیر، در رابطه با علم و هنر، از این استاد فقید است:

«... تصور نکنید وقتی دانشمندی چیزی را تحقیق می‌کند، کاملاً مجرد فکر می‌کند. این هم مثل آن هنرمند، با ضمیر خود در کشمکش است. گاهی به قدری امر علمی نزدیک به هنر و آفرینش هنری می‌شود که اصلاً موجب اعجاز می‌شود. اگر احترامی به دانشمندانی چون نیوتن و اینشتین یا دانشمندان بزرگ دیگر می‌گذاریم، در آن لحظاتی از آفرینش علمی آنان است که به هنر نزدیک شده‌اند.» [به نقل از گفت‌وگوی رادیویی با عنوان «مرزهای علم»].



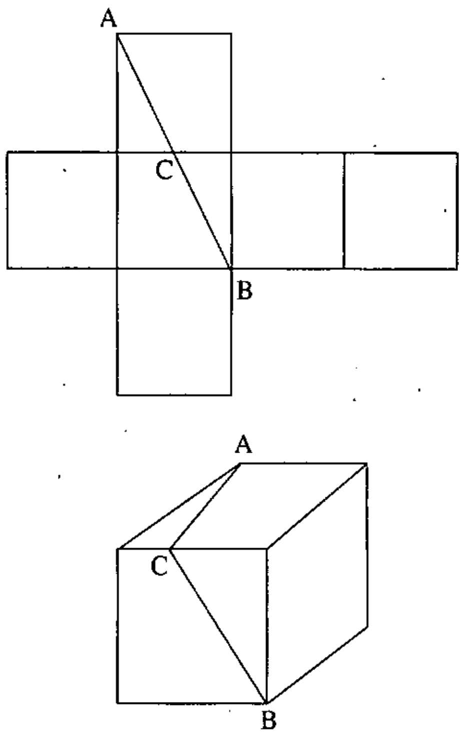
چند کاربرد از روش مگس

در این بخش به تعدادی از مسائل هندسی که به روش مگس حل شده‌اند، می‌پردازیم. تعدادی از این راه‌حل‌ها در مقاله‌های [۱] و [۶] فهرست منابع آمده‌اند.

مثال ۱ (کوتاه‌ترین مسیر حرکت مگس): مکعبی با ابعاد واحد داده شده است. مگسی از رأس A بدون آن‌که پرواز کند، روی سطوح این مکعب حرکت می‌کند و به B می‌رسد. کوتاه‌ترین مسیر حرکت این مگس را تعیین کنید.

حل: این مسأله به وسیله‌ی حساب دیفرانسیل با ساختن یک تابع یک بُعدی مناسب قابل حل است. اما به وسیله‌ی روش مگس می‌توان راه‌حل بسیار ساده و زیبایی برای آن ارائه کرد. به این منظور مکعب را به صورت شکل ۲ باز می‌کنیم. پاره‌خط AB کوتاه‌ترین مسیر از A به B است.

حال اگر شکل گسترده شده را به وضعیت اول برگردانیم، مسیر AC+CB که در آن C وسط یک ضلع مکعب است، جواب مسأله خواهد بود.



شکل ۲ ـ مسیر حرکت مگس روی سطوح مکعب

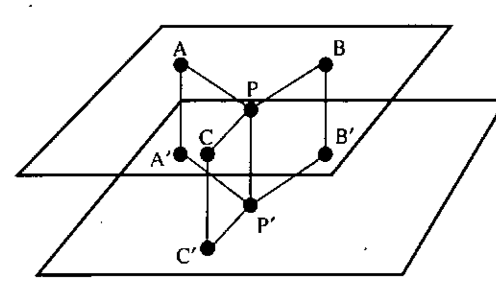
اگر در مثال بالا، به جای مکعب یک استوانه و دو نقطه روی سطح جانبی آن در نظر بگیریم، به طریق کاملاً مشابه، به کوتاه‌ترین مسیر روی سطح جانبی دست پیدا خواهیم کرد.

مثال بعدی در مورد «مسأله‌ی اشتاینر» است. یاکوب اشتاینر، هندسه‌دان معروف دانشگاه برلین در اوایل قرن نوزدهم، مسأله‌ی بسیار ساده، ولی آموزنده‌ی زیر را بررسی و حل کرد.

مثال ۲ (مسأله‌ی اشتاینر): سه نقطه‌ی A، B و C در یک صفحه مفروضند. در جست‌وجوی نقطه‌ی چهارم P‌ای در صفحه هستیم، به طوری که a+b+c می‌نیمم باشد. a، b و c به ترتیب نشان‌دهنده‌ی فاصله‌های P از A، B و C هستند.

حل: به علت پدیده‌ی کشش سطحی، لایه‌ای از محلول صابون، فقط وقتی در حالت تعادل است که مساحتش می‌نیمم باشد. این موضوع منبع زوال‌ناپذیری از آزمایش‌های مهم از لحاظ ریاضی است. دو صفحه‌ی شیشه‌ای یا ورقه‌ی پلاستیکی شفاف و موازی را به وسیله‌ی دو یا سه میله‌ی عمودی به هم وصل می‌کنیم. اگر شیء حاصل را در محلول صابون فرو بریم و درآوریم، لایه‌ی صابون، دستگاهی مرکب از چند صفحه‌ی قائم بین دو صفحه‌ی شفاف به وجود می‌آورد که میله‌های ثابت را به هم وصل می‌کنند. تصویری که روی صفحات شیشه‌ای ظاهر می‌شود، جواب مسأله‌ی مورد بحث است (شکل ۳).

بنابراین، اگر در مثلث ABC همه‌ی زاویه‌ها کم‌تر از ۱۲۰ درجه باشند، آن‌گاه P نقطه‌ای است که هر سه ضلع AB، BC و CA از آن نقطه به زاویه‌ی ۱۲۰ درجه دیده می‌شوند. ولی اگر زاویه‌ای از ABC، مثلاً زاویه‌ی رأس C، برابر با ۱۲۰ یا بزرگ‌تر از آن باشد، آن‌گاه نقطه‌ی P بر رأس C منطبق است.



شکل ۳

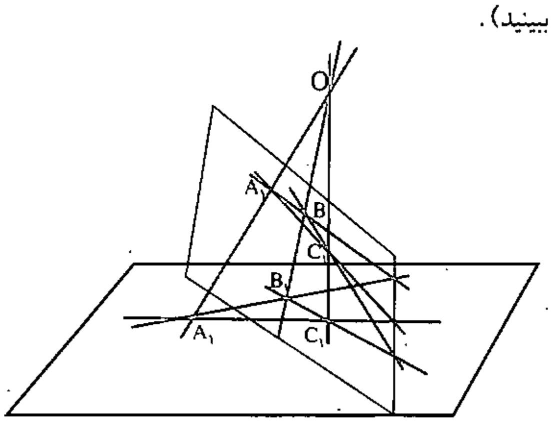
تعمیمی از مسأله‌ی اشتاینر برای n نقطه به صورت زیر بیان می‌شود:

«n نقطه‌ی A_1، A_2، ...، A_n داده شده‌اند. شبکه‌ی به هم پیوسته‌ای از پاره‌خط‌ها را با کم‌ترین طول کل ممکن پیدا کنید، به‌طوری که دو تا از نقطه‌ها را بتوان با یک خط شکسته‌ی مرکب از پاره‌خط‌هایی از شبکه، به هم وصل کرد. البته، شکل جواب بستگی به آرایش نقطه‌های مفروض دارد.»

به‌ازای n نقطه‌ی مفروض، حداکثر (n-2) تقاطع چندگانه وجود دارد که در هر یک از آن‌ها سه پاره‌خط یکدیگر را به زاویه‌های ۱۲۰ درجه قطع می‌کنند. لازم به ذکر است، جواب مسأله همواره به‌طور یکتا معین نمی‌شود ([۱۰] ببینید).

مثال ۳ (قضیه‌ی دزارگ): دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط‌های مستقیم A_1A_2 و B_1B_2 از نقطه‌ی O عبور می‌کنند. در این صورت، سه نقطه‌ی اشتراک اضلاع متناظر A_1B_1 و A_2B_2 و نیز B_1C_1 و B_2C_2 و همچنین A_1C_1 و A_2C_2 روی یک خط مستقیم قرار دارند.

اثبات: فرض کنید که قضیه حل شده باشد. مثلث $A_1B_1C_1$ را روی یک صفحه‌ی شفاف، و مثلث $A_2B_2C_2$ را روی یک سطح افقی رسم کنید. با به‌کارگیری یک لامپ بالای صفحه‌ی شفاف، در نقطه‌ی O، صفحه‌ی شفاف را در یک سطح افقی، به گونه‌ای متمایل کنید که سایه‌ای از مثلث $A_1B_1C_1$ در صفحه‌ی افقی روی مثلث $A_2B_2C_2$ قرار بگیرید (این یک اصل کلی است: هر دو مثلث می‌توانند به این طریق به هم مربوط شوند). محل تقاطع دو صفحه‌ی شفاف و صفحه‌ی افقی، همان خط مورد نظر قضیه است (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴

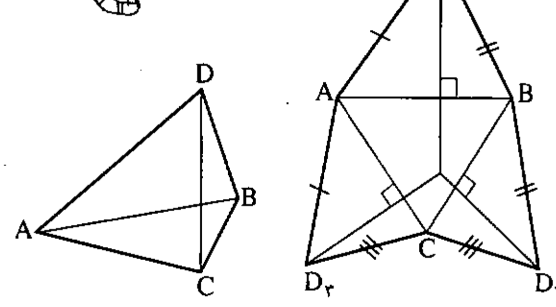
مثال ۴: مثلث ABC و سه مثلث دیگر ABD_1، BCD_2 و ACD_3 را در نظر می‌گیریم که ضلع مشترکی با آن دارند. فرض کنید، اضلاع مجاور با هر یک از رأس‌های مثلث ABC برابر

باشند (یعنی: $AD_۱=AD_۲$، $BD_۱=BD_۲$ و $CD_۲=CD_۳$). ارتفاع‌های نظیر سه رأس $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ از سه مثلث را بر اضلاع مثلث ABC رسم کنید. در این صورت، امتداد این ارتفاع‌ها از یک نقطه عبور می‌کند.

اثبات: یک چهار وجهی کاغذی ABCD، با وجه افقی ABC را در نظر بگیرید (شکل ۵). فرض کنید، چهار وجهی را در امتداد خطوط AD، BD و CD بریده‌ایم و وجوه را طوری باز می‌کنیم که یال‌های چهاروجهی روی یک صفحه‌ی افقی قرار گیرند. با این روش، شش ضلعی مسطح $AD_۱BD_۲CD_۳$ را به دست خواهیم آورد که رأس‌های آن به وسیله‌ی سه کپی $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ از رأس D به دست آمده‌اند.

در زیر با حرکت دادن سه کپی از وجوه ABD، BCD و ACD، مثلث‌های جانبی $ABD_۱$، $BCD_۲$ و $ACD_۳$ را به دست خواهیم آورد. هر کپی در امتداد یک دایره حرکت می‌کند که بر صفحه‌ی افقی عمود است و در یک طرف مثلث ABC می‌باشد. بنابراین، در نگاهی به رأس، رأس‌های $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ در امتداد یک خط مستقیم عمود بر یک طرف مثلث ABC حرکت می‌کند.





شکل ۵

مثال بعدی به «**مسأله‌ی سیلوستر**» معروف است. این مسأله به مدت چهل سال (۱۸۹۲ تا ۱۹۳۳) بدون جواب مانده است. در آن سال‌ها، ریاضیدانانی چون **هیلبرت**، **هاردی**، **کلاین**، **مینکوفسکی**، **وبلن**، **آرتین**، **نویتر**، **یورسیون**، و ده‌ها تن دیگر که فعالانه کار می‌کردند، هیچ کدام جوابی به این مسأله ندادند. در این جا به روش مگس، برای این مسأله اثبات جدیدی می‌آوریم ([۷] ببینید).

ابتدا لم ساده‌ی زیر را که با فرمول **اویلر** (اگر G یک گراف مسطح هم‌بند با n رأس، e یال و f وجه باشد، آن‌گاه $n-e+f=۲$) ثابت می‌شود، می‌آوریم.

لم: فرض کنید G گراف مسطح ساده‌ی ناتهی هم‌بند باشد. در این صورت، G رأس با درجه‌ی حداکثر ۵ دارد.

اثبات: هر وجه G، دست کم ۳ ضلع دارد (زیرا G ساده است). پس خواهیم داشت:

$$f = f_۳+f_۴+f_۵+...$$
$$۲e = ۳f_۳+۴f_۴+۵f_۵+...$$

بنابراین: $۲e - ۳F \geq ۰$.

حال اگر هر رأس درجه‌ای حداقل برابر ۶ داشته باشد، مشابه بالا داریم:

$$n = n_۶ + n_۷ + n_۸ +...$$
$$۲e = ۶f_۶ + ۷f_۷ + ۸f_۸ +...$$

بنابراین: $۲e - ۶n \geq ۰$ و:

$$۶(e - n - f) = (۲e - ۶n) + ۲(۲e - ۳f) \geq ۰$$

و بنابراین: $e \geq n + f$ که با فرمول **اویلر** مغایر است.

مثال ۵ (**قضیه‌ی سیلوستر**): می‌دانیم که اگر n نقطه در صفحه داشته باشیم که روی یک خط نباشند، آن‌گاه یک خط وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از این نقاط می‌گذرد.

اثبات: اگر صفحه‌ی حاوی نقاط را نزدیک کره‌ای قرار دهیم، آن‌گاه هر نقطه در صفحه با یک نقطه متقاطر (هم قطر) روی کره است، و خط‌های صفحه، متناظر با دایره‌های عظیمه‌ی روی کره هستند. پس قضیه را به صورت زیر بازسازی می‌کنیم:

«اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq ۳$ جفت نقطه و متقاطر روی کره داده شده باشد که همگی روی یک دایره‌ی عظیمه نباشند، همواره دایره‌ی عظیمه‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً دو تا از جفت‌های متقاطر است.»

حال دوباره این صورت از قضیه را می‌نویسیم. به این منظور، به جای هر جفت نقطه‌ی متقاطر، دایره‌ی عظیمه‌ی متناظر روی کره را قرار می‌دهیم. در این صورت، قضیه

سیلوستر از ما می‌خواهد که ثابت کنیم :

«اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ دایره‌ی عظیمه روی کره داده باشند که همه‌ی آن‌ها از یک نقطه نگذرد، همواره نقطه‌ای وجود دارد که روی دقیقاً دوتا از دایره‌های عظیمه است. »

اما آرایش دایره‌های عظیمه، گراف مسطح ساده‌ای روی کره به دست می‌دهد که رأس‌هایش نقاط تقاطع دو تا از دایره‌های عظیمه‌اند که دایره‌های عظیمه را به یال‌هایی تجزیه می‌کنند. همه‌ی درجه‌های رأس‌ها زوجند و بنا به طرز ساختن گراف، دست کم چهار عدد هستند. حال لم قبل نشان می‌دهد که رأسی از درجه‌ی ۴ وجود دارد و این اثبات را تمام می‌کند.

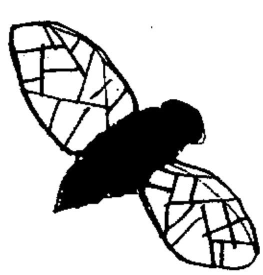
حال اگر بخواهیم تعمیم آن را در فضا بگوییم، باید بگوییم، اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن‌گاه یک صفحه وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد. اما متأسفانه این نتیجه غلط است، زیرا کافی است دو خط متنافر در نظر بگیریم و روی هر خط چهار نقطه قرار دهیم.

حال با توجه به این‌که خط قضیه‌ی سیلوستر را می‌توان دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت در نظر گرفت، تعمیم زیر را ارائه می‌دهیم که آن را مدیون روش مگس هستیم.

مثال ۶ (تعمیم قضیه‌ی سیلوستر): اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن‌گاه دایره‌ای وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد.

اثبات: از چهار نقطه از این نقاط یک کره می‌گذرانیم. بعد یکی از این نقاط، مثلاً A را به عنوان مرکز انعکاس در نظر می‌گیریم و کره را منعکس می‌کنیم (یعنی همان تصویر گنج‌نگاری) تا به صفحه‌ی مماس منعکس شود. می‌دانیم، دایره‌ای که روی کره از A بگذرد، به خط تبدیل می‌شود و اگر از A نگذرد، به یک دایره تبدیل می‌شود. در این تبدیل، آن تعداد از n نقطه که روی کره قرار دارند، به نقاطی در صفحه می‌روند که روی یک خط نیستند. اکنون طبق قضیه‌ی سیلوستر، یک خط d وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از این نقاط روی صفحه می‌گذرد و آشکارا تصویر آن روی کره دایره است. این دایره دقیقاً از سه نقطه که یکی از آن‌ها نقطه‌ی A است، می‌گذرد. در حقیقت ما ثابت کرده‌ایم، دایره‌ای وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این n نقطه می‌گذرد؛ به طوری که یکی از این نقاط را همواره می‌توان از قبل انتخاب کرد.

در این‌جا دیدیم، برای این‌که قضیه‌ی سیلوستر را تعمیم دهیم، اول به فضا رفتیم، بیان گزاره را حدس زدیم و بعد برای اثبات آن به صفحه برگشتیم؛ یعنی دوباره تغییر بُعد دادیم.



منابع

1. Shen, Alexander. "Three-Dimensional Solutions for Two-Dimensional Problem". The Mathematical Intelligencer. 19 (1937)44-47.
2. Hachtroudi, M.Les espaces d´e´le´ments á prosective normale. Hermann. Paris. (1937).
3. Chern, Shiing-Shen& Njï, Shany. Projective Geometry and Piemenn's Mapping Problem. Math. An 302 (1995) 582-600.
4. Aigner, M. and Ziegler, G.M. Proofs From THE BOOk. Springer. Berlin. 1998.

۵. کاری مجیدآبادی، عباس. «برهانی بر قضیه‌ی لموس ـ اشتینر». رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۵۱. بهار ۱۳۷۷.
۶. شهنی کرمزاده، امیدعلی. نتایج باورنکردنی در ریاضیات. انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز. ۱۳۸۰.
۷. کاظمی، سیامک. کتاب اثبات. انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی. ۱۳۷۹. (این کتاب ترجمه کتاب [۲] است).
۸. علی مرصَعی، علی. «حل‌های سه بعدی برای مسائل دو بعدی». گزارش سومین کنفرانس آموزش ریاضی کرمان ـ ایران. ۱۳۷۷. (این مقاله ترجمه‌ی بخشی از مقاله‌ی [۱] است).
۹. شهریاری، پرویز. گاهنامه‌ی ریاضیدانان ۱۳۸۰. انتشارات مهاجر. ۱۳۸۰.
۱۰. کورانت، ریچارد و رابینز، هربرت. ریاضیات چیست؟. ترجمه‌ی: سیامک کاظمی. انتشارات نشر نی. ۱۳۷۹.

زیرنویس

1. Reductio and Absudum
2. G.H. Hardy
3. Infinite Descent
4. Alexander Shen

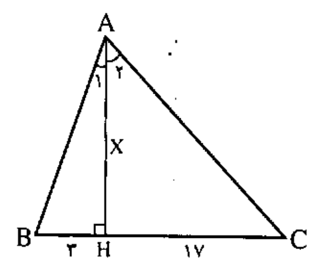




۴۷

حل مسائل مسابقه‌ای برهان

۱. مطابق شکل، اگر طول ارتفاع رأس A، یعنی AH را مساوی x فرض کنیم، خواهیم داشت:



$$tgA = tg(A_1 + A_2) = \frac{tgA_1 + tgA_2}{1 - tgA_1 tgA_2} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{17}{x}}{1 - \frac{3}{x} \times \frac{17}{x}} = \frac{22}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{20}{x}}{\frac{x^2 - 51}{x^2}} = \frac{22}{7} \Rightarrow \frac{20x}{x^2 - 51} = \frac{22}{7} \Rightarrow 22x^2 - 1122 = 140x$$

$$\Rightarrow 11x^2 - 70x - 561 = 0 \Rightarrow \Delta = 4900 + 24684$$

$$\Delta = 29584 = (172)^2 \Rightarrow x = \frac{70 \pm 172}{22}, \quad x > 0 \Rightarrow x = 11$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 11 \times 20 = 110$$

۲. از قضیه‌ی اصلی تقسیم که در کتاب حسابان آمده است، استفاده می‌کنیم:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

حال اگر فرض کنیم: $f(x) = ax^{17} + bx^{16} + 1$ باید $f(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}) = 0$ با فرض $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ و $q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ خواهیم داشت:

$$f(p) = ap^{17} + bp^{16} + 1 = 0$$

$$f(q) = aq^{17} + bq^{16} + 1 = 0$$

و از حذف b در این دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ap^{17} + bp^{16} + 1 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{-1 - ap^{17}}{p^{16}} = \dfrac{-1}{p^{16}} - pa \\ aq^{17} + bq^{16} + 1 = 0 \Rightarrow aq^{17} + (-\dfrac{1}{p^{16}} - pa)q^{16} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow aq^{17} - \frac{q^{16}}{p^{16}} - paq^{16} + 1 = 0 \Rightarrow a(q^{17} - pq^{16}) = \frac{q^{16}}{p^{16}} - 1$$

$$\Rightarrow aq^{16}(q - p) = \frac{q^{16} - p^{16}}{p^{16}} \Rightarrow a = \frac{q^{16} - p^{16}}{p^{16} q^{16} (q - p)}$$

و با توجه به این که $pq = -1$ است، داریم:

$$a = \frac{q^{16} - p^{16}}{p - q} = (q + p)(q^2 + p^2)(q^4 + p^4)(q^8 + p^8)$$

همچنین داریم: $p + q = 1$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$q^2 + p^2 = (p + q)^2 - 2pq = 3$$

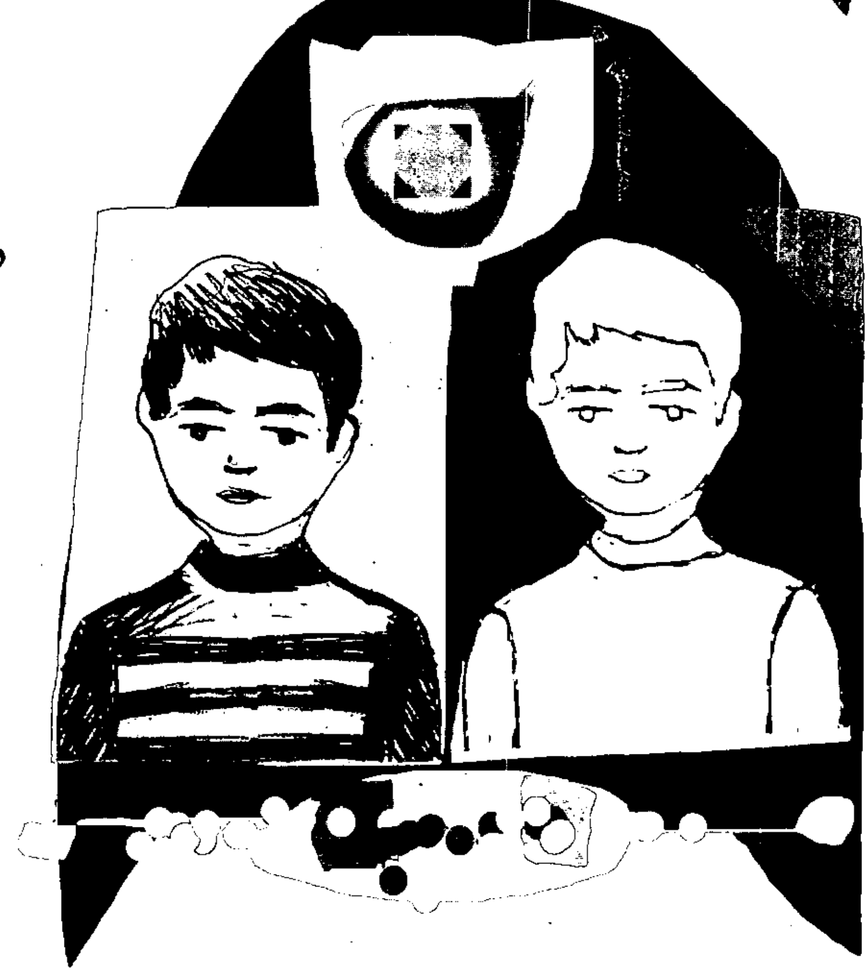
$$q^4 + p^4 = (q^2 + p^2)^2 - 2(pq)^2 = 9 - 2 = 7$$

$$q^8 + p^8 = (q^4 + p^4)^2 - 2(pq)^4 = 49 - 2 = 47$$

$$\Rightarrow q = 1 \times 3 \times 7 \times 47 = 987$$

۱۲

معادله‌های مثلثاتی



برای
دانش‌آموزان
سال دوم و سوم
متوسطه

محمدهاشم رستمی

حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول بحث کردیم، اینک در ادامه راه‌حل‌های دیگر این‌گونه معادله‌ها را در پی می‌آوریم.

راه دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول

معادله‌ی کلاسیک نوع اول $a\sin X+b\cos X=c$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\sin X=\dfrac{2\,tg\frac{X}{2}}{1+tg^2\frac{X}{2}}$ و $\cos X=\dfrac{1-tg^2\frac{X}{2}}{1+tg^2\frac{X}{2}}$ است. در معادله‌ی بالا، به جای $\sin X$ و $\cos X$ بر حسب $tg\frac{X}{2}$ معادل‌های آن‌ها را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$a\left(\frac{2tg\frac{X}{2}}{1+tg^2\frac{X}{2}}\right)+b\left(\frac{1-tg^2\frac{X}{2}}{1+tg^2\frac{X}{2}}\right)=c\Rightarrow\frac{2a\,tg\frac{X}{2}+b(1-tg^2\frac{X}{2})}{1+tg^2\frac{X}{2}}=c$$

$$\Rightarrow 2a\,tg\frac{X}{2}+b(1-tg^2\frac{X}{2})=c(1+tg^2\frac{X}{2})$$

$$\Rightarrow (c+b)tg^2\frac{X}{2}-2a\,tg\frac{X}{2}+c-b=0 \qquad (1)$$

به طوری که دیده می‌شود، معادله‌ی به دست آمده، یعنی معادله‌ی (۱)، معادله‌ای درجه‌ی دوم بر حسب $tg\frac{X}{2}$ است

که با حل آن، مقدار $tg\frac{X}{۲}$ و از روی آن، با حل معادله یا معادله‌های ساده‌ی مثلثاتی، مقدار X جواب معادله محاسبه می‌شود.

تبصره: اگر در معادله‌ی (۱)، $c+b=۰$ باشد، یکی از جواب‌های این معادله به ∞ میل می‌کند و داریم:

$$tg\frac{X}{۲}\to\infty \Rightarrow tg\frac{X}{۲}=tg\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \frac{X}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow X=۲k\pi+\pi$$

پس در این حالت، این جواب را نیز باید جزو جواب‌های معادله منظور کنیم.

نکته‌ی ۱. شرط وجود جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول را با استفاده از معادله‌ی (۱) نیز می‌توان به دست آورد؛ زیرا معادله‌ی کلاسیک نوع اول وقتی جواب دارد که معادله‌ی (۱) جواب داشته باشد و این معادله نیز در صورتی دارای جواب است که مبیّن آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\Delta' = b'^{۲} - ac \ge ۰ \Rightarrow (a)^{۲}-(c+b)(c-b)\ge ۰\Rightarrow$$
$$a^{۲}-(c^{۲}-b^{۲})\ge۰\Rightarrow a^{۲}-c^{۲}+b^{۲}\ge۰\Rightarrow \boxed{a^{۲}+b^{۲}\ge c^{۲}}$$

و این همان شرطی است که قبلاً به دست آوردیم.

نکته‌ی ۲. معمولاً وقتی از روش دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول استفاده می‌کنیم که $\frac{b}{a}$، تانژانت زاویه‌ی مشخصی نباشد و یا ضریب‌های a، b و c یکی، یا همگی آن‌ها پارامتری باشند.

مثال ۱. معادله‌ی $\sin x + ۲\cos x = \frac{۳}{\sqrt{۲}}$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=۱$، $b=۲$، $c=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$، و $a^{۲}+b^{۲}>c^{۲}$ است؛ زیرا $(۱)^{۲}+(۲)^{۲}>(\frac{۳}{\sqrt{۲}})^{۲}$ یا $۵>\frac{۹}{۲}$

پس این معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$(c+b)tg^{۲}\frac{x}{۲}-۲a\,tgx+c-b=۰$$
$$\Rightarrow (\frac{۳}{\sqrt{۲}}+۲)tg^{۲}\frac{x}{۲}-۲\times۱\times tg\frac{x}{۲}+\frac{۳}{\sqrt{۲}}-۲=۰$$
$$\Rightarrow (\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+۲)tg^{۲}\frac{x}{۲}-۲tg\frac{x}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۲=۰$$
$$\Rightarrow tg\frac{x}{۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۱-(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+۲)(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۲)}}{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+۲}=\frac{۱\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+۲}$$
$$\Rightarrow tg\frac{x}{۲}=\sqrt{۲}-۱\ ,\ \ tg\frac{x}{۲}=۵\sqrt{۲}-۷$$
$$tg\frac{x}{۲}=\sqrt{۲}-۱=tg\frac{\pi}{۸}\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۸}\Rightarrow\boxed{x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}}$$
$$tg\frac{x}{۲}=۵\sqrt{۲}-۷=tg\alpha\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\alpha\Rightarrow\boxed{x=۲k\pi+۲\alpha}$$

مثال ۲. معادله‌ی $\sin ۲x+\sqrt{۳}\cos ۲x=۲$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$a=۱, b=\sqrt{۳}, c=۲, (c+b)tg^{۲}x-۲a\,tgx+c-b=۰$$
$$\Rightarrow(۲+\sqrt{۳})tg^{۲}x-۲\times۱\times tgx+۲-\sqrt{۳}=۰$$
$$\Rightarrow(۲+\sqrt{۳})tg^{۲}x-۲tgx+۲-\sqrt{۳}=۰$$
$$\Rightarrow tgx=\frac{۱\pm\sqrt{۱-(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow tgx=۲-\sqrt{۳}=tg\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow\boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}}$$

نکته: در این معادله $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ است، زیرا $(۲)^{۲}=(\sqrt{۳})^{۲}+(۱)^{۲}$ یا ۴=۴ است.

بنابراین، مشخص است که این معادله ریشه‌ی مضاعف دارد.

مثال ۳. معادله‌ی $\sin ۴x-\sqrt{۲}\cos ۴x=\sqrt{۲}$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$a = 1, b = -\sqrt{2}, c = \sqrt{2}$$
$$(c+b)\mathrm{tg}^2 2x - 2a\,\mathrm{tg}2x + c - b = 0$$
$$\Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{2})\mathrm{tg}^2 2x - 2 \times 1\,\mathrm{tg}2x + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$
$$0 \times \mathrm{tg}^2 2x - 2\mathrm{tg}2x + 2\sqrt{2} = 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}2x \to \infty, -2\mathrm{tg}2x + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}2x = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}2x = \mathrm{tg}\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$
$$,\mathrm{tg}2x = \sqrt{2} = \mathrm{tg}\alpha \Rightarrow 2x = k\pi + \alpha \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}$$

نکته: در این معادله، چون $c + b = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ است، از ابتدا می‌دانیم که $\mathrm{tg}2x \to \infty$؛ یعنی $\mathrm{tg}2x = \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه: $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ یا $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است، و ریشه‌ی دیگر معادله از $-2a\mathrm{tg}2x+c-b=0$، یعنی از معادله‌ی $-2\mathrm{tg}2x + 2\sqrt{2} = 0$ به دست می‌آید.

مثال ۴. معادله‌ی $(m-1)\sin\frac{x}{2} + m\cos\frac{x}{2} = m - 1$ را حل کنید.

حل: داریم:

$$a = m-1, b = m, c = m-1, (c+b)\mathrm{tg}^2\frac{x}{4} - 2a\,\mathrm{tg}\frac{x}{4} + c - b = 0$$
$$\Rightarrow (m-1+m)\mathrm{tg}^2\frac{x}{4} - 2(m-1)\mathrm{tg}\frac{x}{4} + m - 1 - m = 0$$
$$\Rightarrow (2m-1)\mathrm{tg}^2\frac{x}{4} - 2(m-1)\mathrm{tg}\frac{x}{4} - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{4} = \frac{(m-1) \pm \sqrt{(m-1)^2 + 1(2m-1)}}{2m-1} = \frac{m-1 \pm m}{2m-1}$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{4} = \frac{2m-1}{2m-1} = 1, \mathrm{tg}\frac{x}{4} = \frac{-1}{2m-1} = \frac{1}{1-2m}$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{4} = 1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = 4k\pi + \pi}$$
$$,\mathrm{tg}\frac{x}{4} = \frac{1}{1-2m} = \mathrm{tg}\alpha \Rightarrow \frac{x}{4} = k\pi + \alpha \Rightarrow \boxed{x = 4k\pi + 4\alpha}$$

مثال ۵. معادله‌ی $(2m+3)\sin x+\cos x=m+4$ داده شده است:

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله دارای جواب باشد.

۲. مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از جواب‌های این معادله $x = \frac{\pi}{3}$ باشد.

۳. مقدار m را چنان بیابید که $\mathrm{tg}\frac{x}{2} \to \infty$.

۴. مقدار m را چنان بیابید که $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 2$ باشد.

حل: در این معادله، $a=2m+3$، $b=1$ و $c=m+4$ است و داریم: $a^2 + b^2 \geq c^2$

۱. شرط وجود جواب معادله:

$$\Rightarrow (2m+3)^2 + (1)^2 \geq (m+4)^2 \Rightarrow 3m^2 + 4m - 6 \geq 0$$
$$\Rightarrow 3m^2 + 4m - 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4+18}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{3}$$

m	$-\infty$	$\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$		$\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$	$+\infty$
$3m^2 + 4m - 6$	+	0	−	0	+
معادله	ریشه دارد	ریشه دارد	ریشه ندارد	ریشه دارد	ریشه دارد

پس به ازای $m \leq \frac{-2-\sqrt{22}}{3}$ و $m \geq \frac{-2+\sqrt{22}}{3}$ معادله دارای جواب است.

۲. شرط آن که $x = \frac{\pi}{3}$ ریشه‌ی این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$x = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{در معادله}} (2m+3)\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = m + 4$$
$$\Rightarrow (2m+3) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = m + 4 \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)m = \frac{7 - 3\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow m = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{(7 - 3\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \Rightarrow \boxed{m = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2}}$$

۳. برای آن‌که $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\to\infty$ باید $c+b=0$ باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$(m+4)+1=0\Rightarrow m+5=0\Rightarrow \boxed{m=-5}$$

۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم بر حسب $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ را تشکیل می‌دهیم. یک ریشه‌ی آن باید $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ باشد. داریم:

$$(c+b)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c-b=0\Rightarrow$$
$$(m+4+1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2(2m+3)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+m+4-1=0$$
$$\Rightarrow(m+5)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2(2m+3)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+m+3=0$$

در این معادله قرار می‌دهیم؛ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$

$$(m+5)(2)^2-2(2m+3)(2)+m+3=0$$
$$4m+20-8m-12+m+3=0\Rightarrow -3m=-11\Rightarrow \boxed{m=\frac{11}{3}}$$

راه سوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول

در این روش، معادله‌ی کلاسیک نوع اول asinX+bcosX=c را به معادله‌ای درجه‌ی دوم بر حسب cosX (یا sinX) تبدیل می‌کنیم و با حل این معادله‌ی درجه‌ی دوم، cosX (یا sinX) و با استفاده از آن، مقدار X، جواب معادله‌ی داده شده را محاسبه می‌کنیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a\sin X+b\cos X=c\Rightarrow a\sin X=-b\cos X+c$$

دو طرف این معادله را مجذور می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\Rightarrow(a\sin X)^2=(-b\cos X+c)^2$$
$$\Rightarrow a^2\sin^2X=b^2\cos^2X+c^2-2bc\cos X$$

اما $\sin^2X=1-\cos^2X$ است. پس داریم:

$$a^2(1-\cos^2X)=b^2\cos^2X+c^2-2bc\cos X$$
$$\Rightarrow(a^2+b^2)\cos^2X-2bc\cos X+c^2-a^2=0$$

از این معادله، مقدار cosX و از روی آن، Xهای جواب مسأله محاسبه می‌شوند.

نکته‌ی مهم: چون طرفین معادله‌ی $a\sin X=-b\cos X+c$ را به توان ۲ رسانده‌ایم، پس حتماً باید جواب‌های به دست آمده برای X را در معادله‌ی اصلی، یعنی در معادله‌ی asinX+bcosX=c امتحان کنیم، تا جواب‌های خارجی به دست آمده (در صورت وجود)، مشخص شوند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. معادله‌ی $\sin x+2\cos x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.

حل: مقدارهای a=1، b=2 و $c=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ را در معادله‌ی زیر قرار می‌دهیم.

$$(a^2+b^2)\cos^2x-2bc\cos x+c^2-a^2=0$$
$$(1+4)\cos^2x-2\times2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{9}{2}-1=0$$
$$5\cos^2x-6\sqrt{2}\cos+\frac{7}{2}=0\Rightarrow\cos x=\frac{+3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-\frac{35}{2}}}{5}$$
$$\Rightarrow\cos x=\frac{+3\sqrt{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}{5}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$
$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4},x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$$

k	x
0	$+\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$
1	$2\pi+\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

$$x=\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

پس $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ جواب است.

در معادله

$$x=-\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(-\frac{\pi}{4})+2\cos(-\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{+\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \text{جواب نیست } x=2k\pi-\frac{\pi}{4} \text{ پس} \Rightarrow x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

$$\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}\Rightarrow \sin x=\sqrt{1-\frac{98}{100}}=\sqrt{\frac{1}{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10},\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{\text{در معاله}}\frac{\sqrt{2}}{10}+2\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{15\sqrt{2}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \text{جواب است}$$

$$\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}=\cos\alpha\Rightarrow\boxed{x=2k\pi\pm\alpha}$$

نکته: همین جواب‌ها را در روش دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول به دست آوردیم.

مثال ۲. معادله‌ی $\sin 2x-\cos 2x=1$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a=1$، $b=-1$ و $c=1$ است، بنابراین برای حل این معادله می‌توانیم مانند مثال قبل عمل کنیم؛ یعنی در معادله‌ی $(a^2+b^2)\cos^2 X-2b\cos X+c^2-a^2=0$ به‌جای a، b و c مقدارهای بالا و به جای X مقدار 2x را قرار دهیم و معادله را حل کنیم. اما این معادله را به طور مستقیم به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\sin 2x-\cos 2x=1\Rightarrow\sin 2x=1+\cos 2x\Rightarrow\sin^2 2x=(1+\cos 2x)^2$$

$$\Rightarrow 1-\cos^2 2x=1+\cos^2 2x+2\cos 2x\Rightarrow 2\cos^2 2x+2\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x(\cos 2x+1)=0\Rightarrow 2\cos 2x=0\Rightarrow\cos 2x=0\Rightarrow$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$2x=2k\pi\pm\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2},x=k\pi-\frac{\pi}{2}$$

اکنون این جواب‌ها را در معادله قرار می‌دهیم تا جواب‌های خارجی، در صورت وجود، مشخص شوند. داریم:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})-\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$$

$$\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow 1-0=1\Rightarrow 1=1\Rightarrow \text{جواب است } x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$x=k\pi-\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(2k\pi-\frac{\pi}{2})-\cos(2k\pi-\frac{\pi}{2})=1$$

$$\Rightarrow\sin(-\frac{\pi}{2})-\cos(-\frac{\pi}{2})=1\Rightarrow -1-0=1\Rightarrow -1=1\Rightarrow$$

$x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ جواب معادله نیست.

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(2k\pi+\pi)-\cos(2k\pi+\pi)=1$$

$$\Rightarrow\sin\pi-\cos\pi=1\Rightarrow 0-(-1)=1\Rightarrow 1=1\Rightarrow$$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ جواب است.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $x=k\pi-\frac{\pi}{2}$ نیز جواب است.

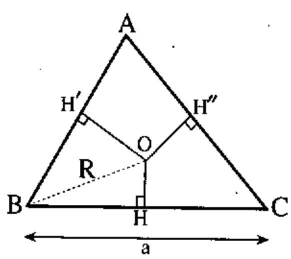
نکته: همانند مثال قبل، می‌توانستیم برای بررسی قابل قبول بودن جواب‌های به دست آمده، جواب‌های خصوصی موجود دربازه‌ی $[0,2\pi]$، یعنی $x=\frac{\pi}{4}$، $x=\frac{3\pi}{4}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را در معادله‌ی کلاسیک داده شده امتحان کنیم. اما در این مثال، خواستیم نشان دهیم که می‌توانیم جواب‌های کلی به دست آمده را نیز در معادله‌ی اصلی امتحان کنیم. بدیهی است، استفاده از جواب‌های خصوصی، محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

محاسبه فاصله‌ی پای عمود منصف هر ضلع مثلث از مرکز دایره محیطی

● حسن جوشن

دبیر ریاضی منطقه‌ی میان جلگه نیشابور

در این مقاله به محاسبه فاصله پای عمودمنصف هر ضلع مثلث از مرکز دایره محیطی می‌پردازیم، برای این منظور شکل زیر را درنظر می‌گیریم:



در مثلث OBH داریم: $OH^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$

از طرفی بنا به قانون سینوس‌ها داریم: $2R = \frac{a}{\sin A}$.

درنتیجه داریم:

$$OH^2 = \frac{a^2}{4\sin^2 A} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 - a^2\sin^2 A}{4\sin^2 A} = \frac{a^2\cos^2 A}{4\sin^2 A}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \left(\frac{a\cos A}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{OH = \frac{a\cot gA}{2}}$$

و یا می‌توان نوشت:

$$OH^2 = \frac{a^2\cos^2 A}{4\sin^2 A} \Rightarrow OH^2 = 4R^2.\frac{\cos^2 A}{4} = R^2\cos^2 A$$

$$\Rightarrow \boxed{OH = R\cos A}$$

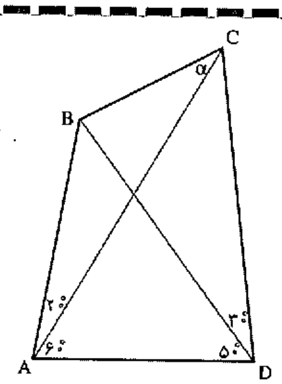
از مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$$OH + OH' + OH'' = \frac{a\cot gA + b\cot gB + c\cot gC}{2}$$

$$OH + OH' + OH'' = R(\cos A + \cos B + \cos C)$$

مسئله مسابقه‌ای

زاویه مشخص شده‌ی α در این شکل را پیدا کنید؟



انتخاب: خانم پروانه محمدی

دبیر ریاضی شهرستان خمین

منبع ....

www.mathpages.com



شگفتی های آفرینش



پیش گفتار

راجع به زنبور عسل و حقیقت زندگی این حشره، از سوی دانشمندان و پژوهشگران مطالعات و تحقیقات زیادی صورت گرفته و اظهارنظرهای متفاوتی عنوان شده‌اند. ریشه‌ی این تحقیق را می‌توان در قرن‌ها و عصرهای باستان نیز مشاهده کرد. پاره‌ای از این گفته‌ها و نوشته‌ها، بدون توجه کافی به حقایق زندگی این حشره، از تصورات و برداشت‌های شخصی ناشی شده‌اند.

مطالعه‌ی واقعی درباره‌ی طرز زندگی زنبور عسل، از قرن هفدهم شروع شد و اندیشمندان زیادی که نام عده‌ای از آن‌ها در این مقاله آمده است، توانستند با پیشرفت علم و تکنیک و انتخاب ابزارهای مناسب، تحقیقات بهتری صورت دهند و مطالب دقیق‌تری از وضع زندگی این حشره و هوش ذکاوتش منتشر کنند.

مقاله‌ی حاضر که از کتابی به نام «شگفتی‌های هندسی»[1] انتخاب و مفهوم آن ترجمه شده است، نمونه‌ای از تحقیقی شگفت و ظریف از سوی پژوهشگران در قرن‌های گذشته می‌باشد که درباره‌ی هوش و ذکاوت زنبور به عمل آمده است. بدیهی است، دربرگردان متن بیش‌ترین توجه روی نمایاندن این هوش و ذکاوت حشره در ارتباط با ساختمان سلول‌ها از لحاظ هندسی متمرکز بوده است.

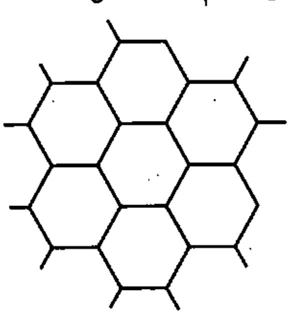
ضمناً، هر جا به توضیحات حاشیه‌ای احتیاج بوده، به آن‌ها اشاره شده و از ترجمه‌ی تفصیلی سایر نظریه‌های پژوهشگران درباره‌ی زندگی این حشره که در کتاب‌های دیگر هم آمده، صرف‌نظر شده است. امید است، مورد توجه خوانندگان محترم قرار گیرد.

محمد علی شیخان

سلول‌های «کندوی» زنبور عسل

الف) شکل و ترتیب چیدن

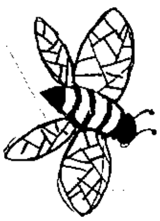
هر گاه یک (شان) از موم را که زنبور عسل به منظور ذخیره‌سازی عسل می‌سازد، مورد بررسی قرار دهیم، معلوم می‌شود از سلول‌های کنار هم چیده شده‌ای ساخته شده است. که هر یک محوری افقی و دهانه یا منفذی به شکل شش ضلعی منتظم دارد (شکل ۱).

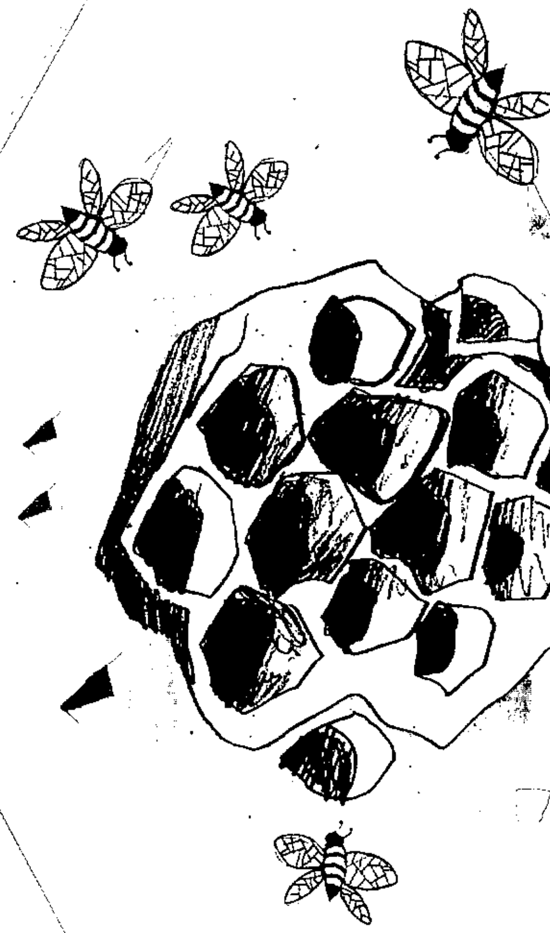


شکل ۱

دو ردیف از این سلول‌ها موجود است که از ته (یا پایه) در وسط (شان) به هم متصل هستند و دهانه‌های آن‌ها در دو وجه مقابل (شان) قرار گرفته است یعنی هر سلول یک منشور قائم شش پهلو است.

پایه‌ی سلول مسطح نیست، بلکه سطحی است مقعر (گود)، متشکل از سه لوزی متساوی SABC و SCDE و SEFA به رأس مشترک S (شکل ۲). به این ترتیب، به هر سلول (از یک طرف) سه سلول از مجموعه سلول‌های طرف دیگر متکی است که هر یک با اولی در یک لوزی مشترک است (شکل‌های ۳ و ۴).



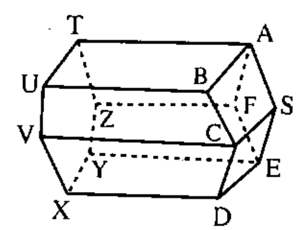


اندازه‌ی زاویه‌های ABC و SCB به ترتیب مساوی است با ´۲۸,°۱۰۹ و ´۳۲,°۷۰، و اندازه‌ی ضلع شش ضلعی به‌طور متوسط $۱\frac{۱}{۵}$ ligne[۲] (یا ۲/۷۱ mm) و عمق سلول مساوی ۵lignes (یا ۱۱/۳ mm) و $\frac{AT}{TU}=\frac{۲۵}{۶}$ است. اما ضخامت دیواره‌ها و پایه سلول به زحمت به $\frac{۱}{۳}$ کلفتی برگی از کاغذ معمولی می‌رسد. وانگهی دهانه (یا منفذ) هر سلول با حاشیه‌ای (یا مغزی) از موم استحکام یافته است. بالاخره همین دهانه، برای جلوگیری از ریزش عسل، با ورقه‌ی شش ضلعی شکلی از جنس موم، بسته شده است.

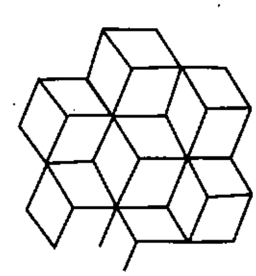
مزیت این تدارکات

موضوع پوشاندن صفحه‌ای به‌وسیله‌ی چند ضلعی‌های منتظم محدب، به‌طوری‌که هر دو چند ضلعی مجاور هم، در یک ضلع و رأس‌های مربوط به آن ضلع مشترک باشند، تداخلی بین چند ضلعی‌ها صورت نگیرد و جای خالی حول وحوش هیچ رأسی باقی نماند، خود بحثی است جداگانه و از دو نظر می‌تواند، مورد مطالعه قرار گیرد: یکی پوشاندن صفحه چند ضلعی‌های منتظم محدب **هم‌نوع**، و دیگری پوشاندن صفحه با **انواع متفاوت** چندضلعی‌های منتظم. در مورد اول، تنها می‌توان با انتخاب مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و یا شش ضلعی منتظم محدب، به این کار موفق شد.[۳]

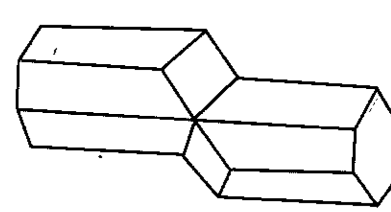
با توجه به این موضوع به نظر می‌رسد، دو نوع اول چندضلعی‌ها که محوطه‌های زاویه‌دار زیادی را پدید می‌آورند، برای لاروها (یعنی بچه زنبورها و در نتیجه زنبورها) غیر قابل استفاده‌اند، و برعکس، شش ضلعی منتظم به سبب آن‌که بیش‌تر با دایره مقایسه می‌شود و شبیه آن است



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

مناسب‌تر اند.

اما به‌ویژه آشکار است، هدف زنبور عسل یافتن راهی است تا موم را که محصولی ناپیدا و از دست رفته برای جانور است، تلف نکند. به‌عبارت دیگر، جانب اقتصاد را از نظر صرف موم برای ساختن سلول‌های کندو، مراعات کند.

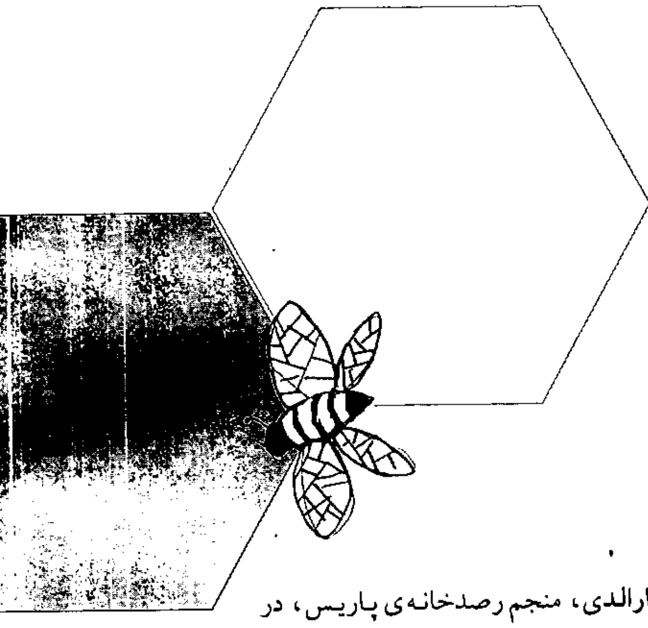
اتکا (یا اتصال) سلول‌ها از پایه به‌هم که باعث حذف یکی از پایه‌های سلول‌های یکی از دو طرف (شان) می‌شود نیز به‌همین منظور است. به‌علاوه، همان‌طور که اشاره شد، شش ضلعی منتظم یکی از سه نوع چندضلعی‌های منتظم محدبی است که می‌توان بدون جاخالی آن‌ها را کنار هم چید. به‌زودی ثابت خواهیم کرد که برای یک سطح معلوم، شش ضلعی منتظم کوچک‌ترین محیط را دارد و در نتیجه، با استفاده از آن، برای ساختن بدنه‌ی سلول به موم کم‌تری نیاز است. همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، مقطع مشترک لوزی شکلی که زنبور عسل برای پایه‌ی سلولی انتخاب می‌کند، متناسب است با کامل‌ترین سطح کوچکی که برای ساختن آن، موم کمی احتیاج است. این قوه‌ی درک و شعور زنبورهاست که آن‌ها را هدایت می‌کند تا در این دو مورد چنین تصمیمی بگیرند.

یک مطلب تاریخی

در روزگاران قدیم، به شکل شش پهلو بودن سلول‌های کندوی زنبور عسل پی برده بودند. **ارسطو** (قرن چهارم قبل از میلاد) در کتاب «تاریخ حیوانات» خود (مقاله‌ی نهم، فصل ۲۷) و **پلین لانسین**[۴] (قرن اول) در کتاب «تاریخ طبیعی»اش (مقاله‌ی ۱۱، فصل ۱۲)، از آن نام می‌برند.

به‌نظر می‌رسد اول بار **پاپوس**[۵] (قرن چهارم) این موضوع را به‌طریق هندسی شرح داد.

او در آغاز مقاله‌ی پنجم از مجموعه‌ی نوشته‌های خود، به این شکل از مقطع سلول‌های کندو توجه کرد و انگیزه‌ی انتخاب آن را برای پوشش صفحه با دو شرط مربوط به محیط مینیمم برای یک سطح معلوم بیان داشت. ولی قابل ذکر است که به لوزی شکل بودن پایه‌ی سلول‌های کندو تا قبل از قرن هیجدهم توجهی نشده بود. برادرزاده‌ای از **کاسینی‌ها**[۶] به‌نام



مارالدی، منجم رصدخانه‌ی پاریس، در سال ۱۷۱۲ از طریق تجربه و با دقت، زوایای لوزی‌ها را معین کرد و مقادیر (´۲۸,°۱۰۹) و (´۳۲,°۷۰) را برای این زوایا پیدا کرد.

رئومور[۷] (محققی که درباره‌ی حشرات به تحقیق پرداخته و کتاب‌هایی در سال‌های ۱۷۴۰ و ۱۷۴۲ در پاریس منتشر کرده است)، بدگمان از این‌که نیت صرفه‌جویی، زنبورها را به ساختن سلول‌هایی با چنان پایه‌هایی وادار کرده باشد، به مهندسی آلمانی به‌نام **کونیگ**[۸]، بدون آن‌که نتایج به‌دست آمده‌ی قبلی مارالدی را باوی در میان گذارد، پیشنهاد کرد این مسأله را حل کند: «بین تمام سلول‌های شش پهلو با پایه‌ی مرکب از سه لوزی متساوی، آن را معین کنید که بتوان با کم‌ترین ماده ساخت.»

کونیگ، در سال ۱۷۳۹ مسأله را با حساب دیفرانسیل حل کرد و دریافت که باید زوایای لوزی‌های سلول، دست کم مساوی (´۲۶,°۱۰۹) و (´۳۴,°۷۰) باشند. مطابقت این مقادیر با اندازه‌هایی که مارالدی به‌دست آورده بود، شگفت‌آور بود. **ماک‌لورن**[۹] در سال ۱۷۴۳ ثابت کرد که **کونیگ** در محاسباتش مرتکب خطا شده و مقادیر درست زوایا دقیقاً همان است که مارالدی معین کرده است؛ یعنی: (´۲۸,°۱۰۹) و (´۳۲,°۷۰).

چندی بعد، همین مسأله از نقطه نظر هندسی به وسیله‌ی ریاضیدانان دیگری بررسی شد، و از بین آنان، **لویی لیه**[۱۰] (۱۷۸۱)، **لالان**[۱۱] (۱۸۴۰)، **بروگام**[۱۲] (۱۸۵۸) و **هنسی**[۱۳] (۸۶ـ۱۸۸۵) همان نتایج پیشین را تأئید یا کامل کرده‌اند.

ب) خواص هندسی

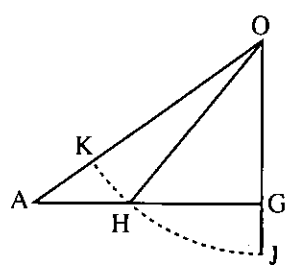
مقطع قائم سلول

۱ . شش ضلعی منتظم با کنار هم چیده شدن می‌توانند، صفحه‌ای را به طور نامحدود بپوشانند. در واقع، اطلاع پیدا کردیم که در این رابطه، از شش ضلعی منتظم، مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع، یکسان می‌توان استفاده کرد.

۲ . از بین تمامی این گونه چندضلعی که می‌توانند با کنار هم چیده شدن، صفحه‌ای را بپوشانند، آن که کم‌ترین محیط را برای یک سطح معلوم نشان می‌دهد، شش ضلعی منتظم است (پاپوس، قرن چهارم میلادی).

در ادامه، اثبات نظریه‌ی فوق خواهد آمد، اما چون **کاماندین**[۱۴] در قرن شانزدهم این اثبات را بازسازی و کامل کرده است، ابتدا لِم زیر را که اشاره به همین مطلب است، ثابت می‌کنیم.

لِم: اگر OG و AG دو خط عمود بر هم باشند و OH و OA دو مایل نسبت به AG، خواهیم داشت: $\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$ (شکل۵).



شکل ۵

زیرا اگر به مرکز O و به شعاع OH قوسی رسم کنیم تا OA را در K و امتداد OG را در J قطع کند، واضح است داریم: (مساحت قطاع OKH) <(مساحت مثلث OAH) و (مساحت قطاع OHJ) > (مساحت مثلث OHG)

از آن‌جا:

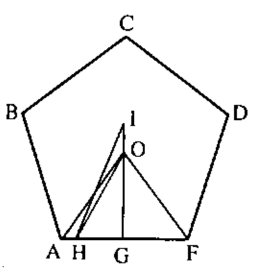
$$\frac{\text{م. مثلث } OAH}{\text{م. مثلث } OHG} > \frac{\text{م. قطاع } OKH}{\text{م. قطاع } OHJ}$$

حال اگر در دو طرف این نامساوی، عضو به عضو نسبت‌های مساوی‌شان را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

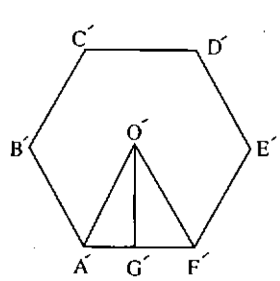
$$\frac{AH}{HG} > \frac{\angle AOH}{\angle HOG}$$

پس از ترکیب نسبت‌ها در صورت و خلاصه کردن، با توجه به شکل داریم: $\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$

حال برای رسیدن به مطلبی که از آن صحبت شد، استدلال پاپوس را دنبال و ثابت می‌کنیم، اگر تعداد اضلاع دو چندضلعی منتظم O و O′ (چندضلعی بر اساس مراکزشان نامیده شده‌اند) متفاوت، ولی محیط‌های آن‌ها مساوی باشند، مثلاً اگر تعداد اضلاع O′ بیش‌تر باشد، مساحتش نیز بیش‌تر خواهد بود (شکل ۶ و ۷).



شکل ۶



شکل ۷

در حقیقت، اگر G و G′ به ترتیب اوساط اضلاع AF و A′F′ از چندضلعی‌های O و O′ باشند، در صورتی‌که: AF > A′F′، در نتیجه: AG > A′G′. آن‌گاه می‌توان GH را روی AG مساوی G′A′ جدا کرد و با وصل H به O داریم:

$\frac{AF}{P} = \frac{\angle AOF}{\text{۴ قائمه}}$ و $\frac{A'F'}{P} = \frac{\angle A'O'F'}{\text{۴ قائمه}}$ (P محیط)

چندضلعی‌ها است) از آن‌جا داریم: $\frac{AF}{A'F'} = \frac{\angle AOF}{\angle A'O'F'}$ که نتیجه می‌شود:

$$\frac{AG}{HG} = \frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'}$$

ولی بنا به لم بالا: $\frac{AG}{HG} > \frac{\angle AOG}{\angle HOG}$. پس:

$\frac{\angle AOG}{\angle HOG} > \frac{\angle AOG}{\angle A'O'G'}$ ، و در نتیجه داریم:

$\angle A'O'G' < \angle HOG$ و $\angle G'A'O' > \angle GHO$.

حال: اگر $\angle GHI$ را مساوی $\angle G'A'O'$ بگیریم، I روی امتداد GO قرار می‌گیرد. پس $IG > OG$ یا $O'G' > OG$.

از طرف دیگر، مساحت کثیرالاضلاع O مساوی است با: $\frac{P \times OG}{2}$ و مساحت کثیرالاضلاع O′ مساوی است با: $\frac{P \times O'G'}{2}$.

در نتیجه:

مساحت کثیرالاضلاع O > مساحت کثیرالاضلاع O′ .

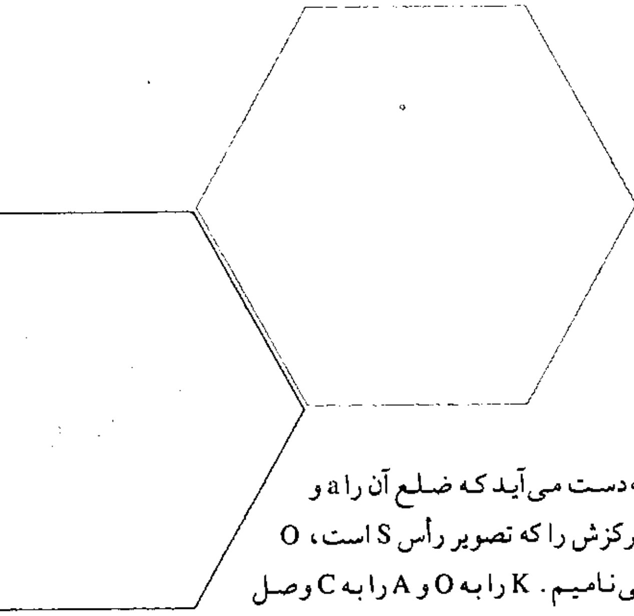
برعکس، اگر مساحت‌های کثیرالاضلاع‌های O و O′ مساوی باشند، محیط O′ کم‌تر از محیط O خواهد شد.

پس: **محیط شش‌ضلعی منتظم برای یک سطح معلوم، کوچک‌تر است از محیط مربع و یا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع که دارای همان مساحت باشد.**

پایه سلول

۳. مساحت کل سلولی با مقطع و ارتفاع معین، وقتی کم‌ترین است که پایه‌ی آن لوزی شکل و از لوزی‌های متساوی تشکیل شده باشد.

در این‌جا روش **ماک‌لورن** را که برگرفته از کتاب هندسه‌ای باستانی است، به‌کار خواهیم برد. زیرا در زمره‌ی نمونه کارهای قابل توجه است. فرض می‌کنیم سلولی با پایه‌ای از لوزی‌های متساوی SABC، SCDE و ... به ضلع c تشکیل شده باشد (شکل ۸). مقطع قائم مار بر رأس A را رسم می‌کنیم. در شکل، شش‌ضلعی منتظم... AKCL

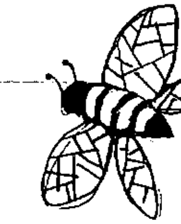


به‌دست می‌آید که ضلع آن را a و مرکزش را که تصویر رأس S است، O می‌نامیم. K را به O و A را به C وصل می‌کنیم (شکل ۸) و از AC صفحه‌ی دلخواهی می‌گذرانیم که فصل مشترک آن با صفحات TABU، UBCV، ASO و CSO، لوزی AG′CG را نتیجه می‌دهد. بالاخره، یال AT را با l و نیم‌قطر AP را با d نشان می‌دهیم. در حالی که فقط $\frac{1}{3}$ سلول را مشخص کرده‌ایم، باید صفحه‌ی AG′CG را چنان رسم کنیم تا مساحت‌های حاصل از ذوزنقه‌های TAGU و UGCV و لوزی AG′CG مینیمم شود؛ یعنی: $(l + GU)a + 2d.GP$ می‌نیمم باشد. عبارت فوق را می‌شود چنین نوشت: $(l + l - Gk)a + 2d.GP$ یا $2la - a.Gk + 2d.GP$.

اما حاصل‌ضرب $2.l.a$ مقدار ثابتی است. پس مسأله به تعیین مینیمم عبارت $2d.GP - a.Gk$ (۱) منجر خواهد شد.

فرض می‌کنیم، B روی UK طوری انتخاب شده باشد که: $\frac{BK}{BP} = \frac{a}{2d}$ (۲). به مرکز P و به شعاع PG در صفحه BKP قوسی رسم می‌کنیم تا BP یا امتداد آن را در J قطع کند. KH و GI را عمود بر PB رسم می‌کنیم. از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه GIB، KHB و PKB و نیز با توجه به رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت: $\frac{BI}{BG} = \frac{BH}{BK} = \frac{BK}{BP} = \frac{a}{2d}$ یا: $\frac{BH - BI}{BK - BG} = \frac{IH}{GK} = \frac{a}{2d}$ از آن‌جا: $a.GK = 2d.HI$. آن‌گاه عبارت (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$2d.GP - a.GK = 2d.GP - 2d.HI = 2d(GP - HI) = 2d(JI + HP)$$



اما d و HP مقداری است ثابت.

پس تحقیق می‌کنیم، چه وقت مقدار JI مینیمم است. پیدا است، این هم درازای JI=۰ می‌نیمم خواهد بود؛ یعنی موقعی که نقاط J و I بر هم منطبق شوند یا موقعی که G روی B قرار گیرد. بنابراین، مینیمم مطلوب زمانی حاصل می‌شود که صفحه‌ی قاطع از B که به‌وسیله‌ی رابطه‌ی (۲) مشخص شده است، بگذرد. این وضع از صفحه‌ی قاطع، دقیقاً همان چیزی است که در سلول‌ها وجود دارد.

تبصره: اولاً، آنچه که گفته شد بدون در نظر گرفتن ورقه‌ی شش‌ضلعی دهانه‌ی سلول بود، ولی چون سطح این ورقه ثابت است، نتیجه‌ای که در بالا به‌دست آورده‌ایم، تغییر نمی‌کند.

ثانیاً، منشور قائمی که به‌قاعده‌ی شش‌ضلعی... AKCL است و خود سلول، ظرفیت (حجم) مساوی دارند، زیرا در حالی که فقط $\frac{1}{3}$ حجم آن‌ها مشخص شده است، دیده شد که هرم‌های BAKC و SAOC مساوی‌اند. ولی دیدیم و ثابت شد که مساحت‌های آن‌ها مساوی نیستند.

۴. زوایای لوزی متقابلاً مساوی‌اند با: $(109°,28',16'')$ و $(70°,31',44'')$.

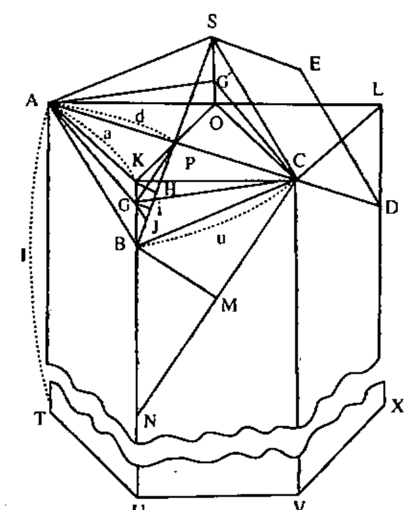
از مثلث قائم‌الزاویه‌ی BKP داریم:

$$\overline{BP}^2=\overline{BK}^2+\overline{KP}^2$$

به‌جای BK مقدار مساوی‌اش $BP.\frac{a}{2d}$ را قرار می‌دهیم (رابطه‌ی ۲)، و نیز به‌جای KP مقدار $\frac{a}{2}$ را. نتیجه می‌شود: $BP=\frac{ad}{\sqrt{4d^2-a^2}}$. و چون: AP=d، پس: $\frac{AP}{BP}=\frac{\sqrt{4d^2-a^2}}{a}$. ولی d نصف ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ی به شعاع a، و مقدارش مساوی $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است. پس: $\frac{AP}{BP}=\sqrt{2}$.

از این قرار، اندازه‌ی قطر بزرگ‌تر یکی از لوزی‌های پایه، مساوی با قطر مربعی است که به‌ضلع قطر کوچک‌تر ساخته می‌شود. به‌علاوه، قطر کوچک‌تر، یعنی BS، مساوی $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ است. از طرف دیگر می‌دانیم: $tg\,A\hat{B}P=\frac{AP}{PB}$ و به کمک جدول، مقدار تانژانت هر زاویه را می‌توان به‌دست آورد و برعکس.

چون: $tg54°,44',8''=\sqrt{2}$ و در نتیجه: $A\hat{B}C=109°,28',16''$، زاویه‌ی BCS که مکمل آن است، مساوی است با: $70°,31',44''$ (شکل ۸).



شکل ۸

۵. اندازه‌ی یک ضلع لوزی، سه برابر طول BK یا SO است. از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی BPC و BKP داریم: $\overline{BC}^2=\overline{BP}^2+\overline{PC}^2$ یا $\overline{BC}^2=\frac{d^2}{2}+d^2$ یا $\overline{BC}^2=\frac{9a^2}{8}$.

از آن‌جا: $BC=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$ و $\overline{BK}^2=\overline{BP}^2-\overline{KP}^2=\frac{d^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{8}$ یا: $BK=\frac{a\sqrt{2}}{4}$ و در نتیجه: $BC=3BK$ (شکل ۸).

به‌علاوه دیده می‌شود که BK مساوی $\frac{1}{4}$ ضلع مربع محاط در دایره‌ی به شعاع a است.

تبصره ۵: مربع اندازه‌ی هر یک از پاره‌خط‌های مستقیم‌الخط زیر با توجه به شکل ۸، یعنی AB، AK، AP، BP، KP و BK به ترتیب مساوی‌اند با: $\frac{9a^2}{8},a^2,\frac{3a^2}{4}$، $\frac{3a^2}{8},\frac{a^2}{4},\frac{a^2}{8}$. و یا اگر $\overline{BK}^2$ را واحد اختیار کنیم، مساوی‌اند با: ۹، ۸، ۶، ۳، ۲ و ۱.

۶. **زوایای حول هر کنج** مانند A، B، C، D و ... با هم مساوی‌اند.

زیرا اگر روی BU طول BN را مساوی BC بگیریم و BM را عمود بر CN رسم کنیم، از مثلث قائم‌الزاویه‌ی NKC با توجه به این‌که: $NK = 4BK = a\sqrt{2}$ نتیجه می‌شود:

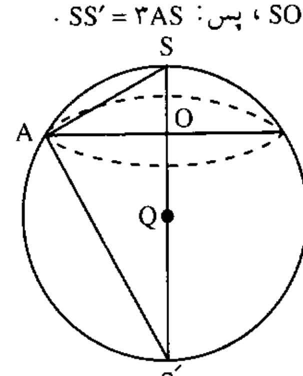
$CN = a\sqrt{3} = AC$ یا $\overline{CN}^2 = \overline{NK}^2 + \overline{KC}^2 = 3a^2$

پس دو مثلث NBC و ABC به حالت تساوی سه ضلع مساوی هستند و در نتیجه: $N\hat{B}C = A\hat{B}C$. به همین ترتیب: $N\hat{B}A = A\hat{B}C$. وجوه کنج C نیز مساوی‌اند، چون مکمل زاویه‌ی سه وجهی B هستند. و...

۷. **هرم مثلث القاعده‌ی SACE** که سلول «کندو» مختوم به آن است، قابل محاط در کره‌ای است که قطر آن سه برابر ضلع لوزی است.

قاعده‌ی این هرم، مثلث متساوی‌الاضلاع ACE است (شکل ۸) که می‌توان آن را در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA=a محاط کرد. حال می‌توانیم ثابت کنیم این دایره، دایره‌ی صغیره‌ای است به قطب S متعلق به کره‌ای به مرکز Q واقع روی SO (شکل ۹). از مثلث قائم‌الزاویه‌ی 'ASS نتیجه می‌شود: $\overline{AS}^2 = SS'.SO$. از این‌جا: $SS' = \frac{\overline{AS}^2}{SO}$.

چون: $SO = \frac{AS}{3}$، پس: $SS' = 3AS$.



شکل ۹

مقایسه سلول کندو با سلولی دارای پایه‌ی صاف

دیدیم (شماره‌ی ۳، تبصره، ثانیاً) که سلول کندو و یک سلول دارای پایه‌ی صاف که اندازه‌ی ضلع مقطعشان با هم و طول یال‌های آن‌ها نیز با هم مساوی باشند، دارای حجم‌های معادلند. ولی گفته شد که مساحت‌های آن‌ها یکی نیست و مساحت سلول کندو مینیمم است. اکنون بررسی می‌کنیم ارزش اقتصادی سطحی را که به وسیله‌ی زنبور عسل انتخاب شده است.

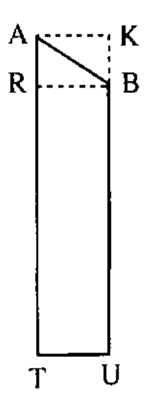
ضلع مقطع قائم دو قسم سلول را با a نشان می‌دهیم و می‌دانیم که طول یال مساوی $\frac{25a}{6}$ است. یک محاسبه‌ی ساده و اندکی جالب نشان می‌دهد که مساحت کل سلول کندو و سلول دارای پایه‌ی صاف به ترتیب مساوی‌اند با دو مقدار $\frac{a^2}{2}(50+3\sqrt{2})$ و $\frac{a^2}{2}(50+3\sqrt{3})$ (همیشه محاسبه منفک از ورقه‌ی منفذ سلول انجام می‌شود). پس مساحت اولی به دومی، مثل $50 + 3\sqrt{2}$ است به $50 + 3\sqrt{3}$؛ یا کمی نزدیک به ۵۴ است به ۵۵.

از این قرار، زنبورها با به کار بردن پایه‌ی لوزی شکل برای سلول کندو در مصرف موم صرفه‌جویی می‌کنند.

ج) ساختمان یک سلول

ذوزنقه‌های جانبی

اگر TU ضلع شش‌ضلعی مقطع قائم باشد (شکل ۱۰)، اندازه‌ی طول ضلع (یا قاعده‌ی) AT ذوزنقه مساوی است با: $\frac{25}{6}TU$ (بند الف). اختلاف دو قاعده‌ی ذوزنقه ABUT، یعنی AR=BK، مساوی است با: $\frac{\sqrt{2}}{4}TU$ (شماره‌ی ۵). از آن‌جا به‌وسیله‌ی رسم یا به کمک محاسبه، قاعده‌ی دیگر و وضع نقطه‌ی B مشخص می‌شود.



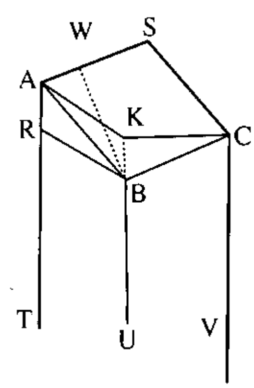
شکل ۱۰



اگر یکی از اضلاع لوزی‌های پایه مثلاً AB را بشناسیم، چنانچه طرز تعیین آن را بعد از این خواهیم دید، لازم نیست مقدار AR را به‌کار بریم. کافی است به‌مرکز A و به شعاع AB قوسی رسم کنیم تا UK را در B قطع کند.

لوزی‌های پایه

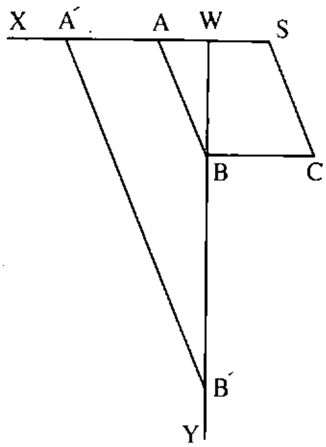
اگر قبلاً یکی از ذوزنقه‌های جانبی ساخته شده باشد، طول AB یکی از اضلاع لوزی است. به‌کمک زاویه‌یاب با توجه به این که مقدار یکی از زوایای لوزی مساوی $109°,28'$ است، رسم کامل لوزی به آسانی صورت می‌گیرد. حال فرض می‌کنیم، می‌خواهیم یکی از لوزی‌ها، مثلاً SABC را مستقل از رسم قبلی (یعنی بدون در نظر گرفتن رسم یکی از ذوزنقه‌های جانبی) بسازیم، در حالی که فقط اندازه‌ی a طول ضلع شش‌ضلعی مقطع قائم را می‌شناسیم. فاصله‌ی B از AS، یعنی BW، مساوی



شکل ۱۱

AK=a است؛ زیرا اگر BR را موازی AK رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AWB و ARB مساوی‌اند، چون وتر مشترک دارند و زوایای A در آن‌ها مساوی است (بند ب، شماره‌ی ۶). این را هم می‌دانیم که: $AW = AR = BK = \frac{AB}{3}$ (بند ب، شماره‌ی۵).

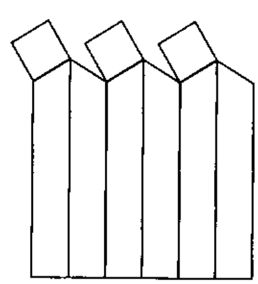
حال ببینیم چگونه می‌توان لوزی را ساخت. اگر WX و WY و خط عمود بر هم باشند، روی اولی طولی دلخواه WA' را انتخاب، و به‌مرکز A' و به‌شعاع $3WA'$، دایره‌ای رسم کنیم تا wy را در B' قطع کند (شکل ۱۲). آن‌گاه اگر روی WB' طول BW را مساوی AK=a جدا کنیم و BA را موازی $B'A'$ بکشیم، BA و زاویه‌ی BAW به‌ترتیب یک ضلع و یک زاویه‌ی لوزی مطلوب است. ساختمان را به آسانی کامل می‌کنیم.



شکل ۱۲

گسترش یک سلول

دو طریقه‌ی رسم قبلی امکان می‌دهد که گسترش یک سلول کندو را به‌دست آوریم. شکل ۱۳، این گستردگی را با مقیاس $\frac{5}{2}$ نشان می‌دهد. خوانندگان می‌توانند با کاغذ یا مقوا به سادگی این شبکه و از آن‌جا یک سلول را بسازند.



شکل ۱۳

زیرنویس ....

1. CURIOSI TÉS GÉOMÉTRIQUWS/E.FOURREY

۲. واحد اندازه‌گیری طول در قدیم.

۳. برای مطالعه‌ی بیش‌تر و بهتر در این مورد، به مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۳۰ مقاله‌ای با عنوان «خانه‌بندی صفحه» مراجعه کنید.

4. Pline L'ancien

5. Pappus

۶. CASSiNiS. برای اطلاعات بیش‌تر به کتاب: آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد دوم، یا به کتاب: دایرةالمعارف دانشمندان علم و صنعت، ترجمه‌ی دکتر مصاحب مراجعه کنید.

7. REAUMUR

8. KOENiG

9. MAC LAURiN

10. LHUILLIER

11. LALANNE

12. BROUGHAM

13. HENNESSY

14. COMMANDIN

برای
دانش‌آموزان
سال سوم و
پیش‌دانشگاهی

میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

کاربرد مشتق در امور فنی (مسائل بهینه‌سازی)

در زندگی روزمره با مسائلی روبرو می‌شویم که می‌خواهیم از حداقل امکانات حداکثر استفاده را ببریم، برای آشنایی بیشتر به این مثال توجه کنید:

«دو عدد صحیح مثبت چنان بیابید که حاصل جمع آن‌ها ۲۰ و حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن باشد».

برای حل این مثال، ابتدا با استفاده از شهود، سعی کرده جفت عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که حاصل جمع آن‌ها برابر با ۲۰ باشد، سپس حاصل ضرب هر کدام از آن‌ها را پیدا می‌کنیم. از بین این حاصل ضرب‌ها، هر کدام که از بقیه بیشتر باشد دو عدد موردنظر مسأله را می‌دهد:

$۱+۱۹=۲۰;۱\times۱۹=۱۹$ $\qquad$ $۶+۱۴=۲۰;۶\times۱۴=۸۴$

$۲+۱۸=۲۰;۲\times۱۸=۳۶$ $\qquad$ $۷+۱۳=۲۰;۷\times۱۳=۹۱$

$۳+۱۷=۲۰;۳\times۱۷=۵۱$ $\qquad$ $۸+۱۲=۲۰;۸\times۱۲=۹۶$

$۴+۱۶=۲۰;۴\times۱۶=۶۴$ $\qquad$ $۹+۱۱=۲۰;۹\times۱۱=۹۹$

$۵+۱۵=۲۰;۵\times۱۵=۷۵$ $\qquad$ $۱۰+۱۰=۲۰;۱۰\times۱۰=۱۰۰$

با توجه به حاصل جمع و حاصل ضرب‌های بالا ملاحظه می‌کنیم که هرچه اختلاف دو عدد کمتر می‌شود، حاصل ضربشان بیشتر می‌شود تا آن‌جا که وقتی هر دو عدد برابر با ۱۰ باشند، حاصل ضربشان بیشترین مقدار را دارد. بنابراین به روش شهودی به این حدس کلی می‌رسیم:

«دو عدد حقیقی x و y که حاصل جمعشان برابر با a ولی حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن را داشته باشند، برابرند با: $x=y=\frac{a}{۲}$»

می‌توان حدس بالا به طور دقیق به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{cases} x+y=a \Rightarrow y=a-x \\ P=xy \end{cases} \Rightarrow P=x(a-x)$$

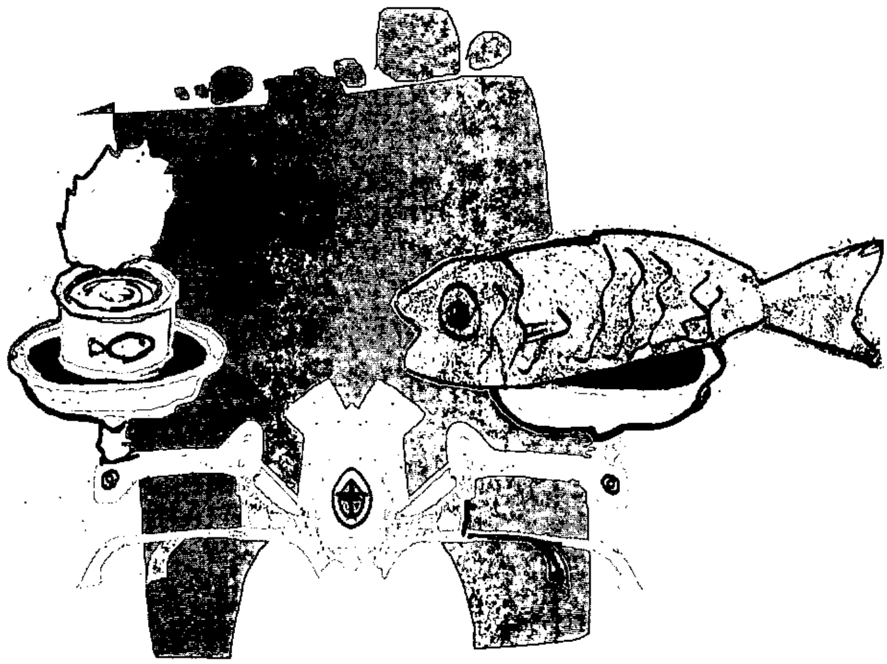
$$\Rightarrow P=x(a-x)=-x^۲+ax=-(x^۲-ax)$$

$$=-(x^۲-ax+\frac{a^۲}{۴}-\frac{a^۲}{۴})=\frac{a^۲}{۴}-(x-\frac{a^۲}{۲})$$

در نتیجه داریم:

$$P=\frac{a^۲}{۴}-(x-\frac{a}{۲})^۲ \quad (۱)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) درمی‌یابیم که بیشترین مقدار P



وقتی به دست می‌آید که: $(x-\frac{a}{2})^2=0$ بنابراین داریم:

$$x-\frac{a}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2} \quad (2)$$

از طرفی $x+y=a$، پس با توجه به رابطه (۲) ملاحظه می‌کنیم که $y=\frac{a}{2}$، در نتیجه وقتی P بیشترین مقدار ممکن را دارد که داشته باشیم:

$$x=y=\frac{a}{2}$$

اکنون می‌خواهیم که این مثال یا مسائل مشابه با آن را با استفاده از کاربرد مشتق حل کنیم.

در بحث کاربرد مشتق در امور فنی، معمولاً مسائلی مطرح می‌شوند که به دنبال یافتن بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار یک کمیت در شرایط مشخصی هستند. برای استفاده از مشتق در حل این گونه مسائل، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. شکل مناسبی (در صورت امکان) برای مسأله رسم می‌کنیم.

۲. با توجه به مسأله، عددها و متغیرهایی را به هر یک از مقدارهای شکل نسبت می‌دهیم.

۳. با توجه به صورت مسأله، برای کمیتی که باید ماکزیمم یا مینیمم شود، معادله‌ای می‌نویسیم و آن را «معادله‌ی اولیه» می‌نامیم.

۴. معمولاً در معادله‌ی اولیه، بیش از یک متغیر وجود دارد. با توجه به مسأله یا شکلی که برای آن رسم می‌کنیم، رابطه‌ای بین متغیرها وجود دارد که به آن «معادله‌ی ثانویه» می‌گوییم.

۵. معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته می‌کنیم. برای این کار از معادله‌ی ثانویه استفاده می‌کنیم.

۶. دامنه‌ی معادله‌ی اولیه را مشخص می‌کنیم.

۷. نقاط بحرانی معادله‌ی اولیه را به دست می‌آوریم و جدول تغییرات آن را رسم می‌کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به دست آید. سپس طول نقاط اکسترمم را در معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم و مقدار ماکزیمم یا مینیمم کمیت موردنظر را به دست می‌آوریم.

مثال: مجموع دو عدد مثبت برابر ۲۰ است. ماکزیمم حاصل ضرب آن‌ها چه قدر است.

حل: فرض کنیم آن دو عدد x و y باشند. چون هر دو عدد مثبت هستند، بنابراین: $y>0, x>0$

$A=xy$: معادله‌ی اولیه

$x+y=20 \rightarrow y=20-x$: معادله‌ی ثانویه

اکنون اگر $y=20-x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$A = x(20-x) = -x^2 + 20x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 20x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -2x + 20 = 0 \Rightarrow x = 10$$

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	100	↘	$-\infty$

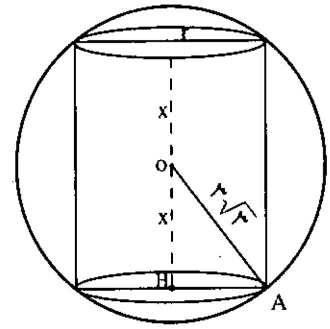
با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x=10$، دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$x=10, y=20-x=20-10=10$$

در نتیجه، دو عدد موردنظر $x=10$ و $y=10$ هستند.

مثال: در کره‌ای به شعاع $3\sqrt{3}$، استوانه‌ای به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. مقدار عددی این حجم را بیابید.

حل: در شکل زیر فرض می‌کنیم، ارتفاع استوانه $h=2x$، و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر r باشد.



می‌خواهیم حجم استوانه ماکزیمم باشد، بنابراین:

$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 x$: معادله‌ی اولیه

با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$OH^2 + HA^2 = OA^2 \Rightarrow x^2 + r^2 = (3\sqrt{3})^2$: معادله‌ی ثانویه

$$\Rightarrow r^2 = 27 - x^2$$

اکنون اگر $r^2 = 27 - x^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = 2\pi(27-x^2)x = -2\pi x^3 + 54\pi x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = -2\pi x^3 + 54\pi x$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -6\pi x^2 + 54\pi = 0 \rightarrow x=-3, x=3$$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-108	↗	108	↘	$-\infty$

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x=-3$ دارای مینیمم نسبی و در $x=3$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$x=3; r^2 = 27 - x^2 \Rightarrow r^2 = 27-9 = 18 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$$

در نتیجه، حجم ماکزیمم برابر است با:

$$V = 2\pi r^2 x = 2\pi \times 18 \times 3 = 108\pi$$

تمرین‌های حل شده

۱. دو عدد مثبت چنان بیابید که حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۹۲ و حاصل جمع عدد اول با ۳ برابر عدد دوم مینیمم باشد.

حل: فرض کنیم عدد اول $x>0$ و عدد دوم $y>0$ باشند. داریم:

$A=x+3y$: معادله‌ی اولیه

$xy = 192 = y = \frac{192}{x}$: معادله‌ی ثانویه

اگر $y = \frac{192}{x}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، آن را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$A = x + 3 \times \frac{192}{x} = x + \frac{576}{x}$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \frac{576}{x}$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۱-\frac{۵۷۶}{x^۲}=۰\Rightarrow\frac{x^۲-۵۷۶}{x^۲}=۰\Rightarrow x=۲۴, x=-۲۴$$

x	$-\infty$		-۲۴		۰		۲۴		$+\infty$
f′(x)		+	۰	−	‖	−	۰	+	
f(x)		↗		↘	‖	↘		↗	

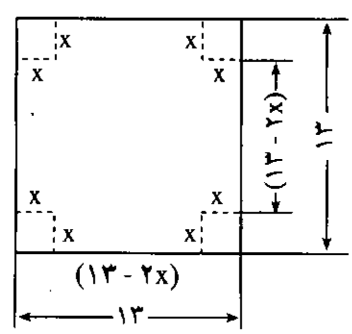
با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع در x=۲۴ دارای مینیمم نسبی است. بنابراین داریم:

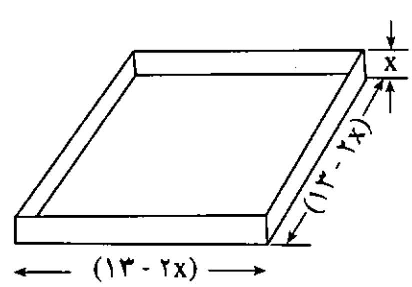
$$x=۲۴, y=\frac{۱۹۲}{x}=\frac{۱۹۲}{۲۴}=۸$$

در نتیجه دو عدد موردنظر x=۲۴ و y=۸ هستند.

۲. یک سازنده‌ی جعبه می‌خواهد از مقوایی مربع شکل به مساحت ۱۶۹ سانتی‌متر مربع، با بریدن چهار مربع برابر از چهار گوشه‌ی آن و بالا زدن جوانب آن، یک جعبه‌ی در باز بسازد. طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند، چه‌قدر باشد تا حجم جعبه بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشند؟

حل: در شکل زیر فرض کنیم که طول ضلع مربع‌هایی که از چهار گوشه مقوا بریده می‌شوند، برابر x سانتی‌متر باشد. چون مساحت مقوای مربع شکل ۱۶۹ سانتی‌متر مربع است، طول هر ضلع مربع ۱۳ سانتی‌متر می‌شود.





با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم که ابعاد جعبه‌ی در باز برابر است با: (۱۳-۲x)، (۱۳-۲x) و x. بنابراین:

$V=(۱۳-۲x)(۱۳-۲x)x$: معادله‌ی اولیه

$$V=x(۱۳-۲x)^۲$$

چون معادله‌ی اولیه بر حسب یک متغیر است، بنابراین نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x(۱۳-۲x)^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(۱۳-۲x)^۲-۴x(۱۳-۲x)=۰ \; ; \; (۱۳-۲x)(۱۳-۶x)=۰$$

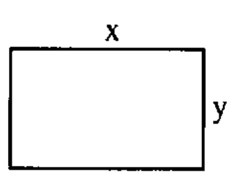
$$\Rightarrow x=\frac{۱۳}{۲}, x=\frac{۱۳}{۶}$$

x	$-\infty$		$\frac{۱۳}{۶}$		$\frac{۱۳}{۲}$		$+\infty$
f′(x)		+	۰	−	۰	+	
f(x)		↗		↘		↗	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x=\frac{۱۳}{۶}$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین اگر طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند، $\frac{۱۳}{۶}$ باشد، جعبه‌ی در باز بیش‌ترین حجم را دارد.

۳. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که محیط آن ۲۰۰ سانتی‌متر است.

حل: فرض کنیم طول مستطیل برابر x سانتی‌متر و عرض آن برابر y سانتی‌متر باشد. بنابراین داریم:



$A=xy$: معادله‌ی اولیه

$۲(x+y)=۲۰۰\Rightarrow x+y=۱۰۰$: معادله‌ی ثانویه

$$\Rightarrow y=۱۰۰-x$$

اکنون اگر $y=۱۰۰-x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم،

معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم :

$A = xy$ و $y = 100 - x \Rightarrow A = x(100 - x)$
$= -x^2 + 100x$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + 100x$ را به دست می‌آوریم :

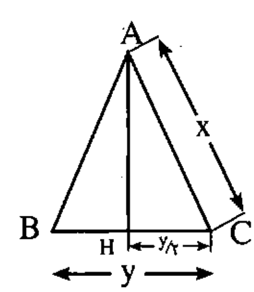
$f'(x) = -2x + 100 = 0 \Rightarrow x = 50$

x	$-\infty$		50		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم، تابع f در $x = 50$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین، اگر طول مستطیل را $x = 50$ سانتی‌متر درنظر بگیریم، عرض آن $y = 50$ سانتی‌متر خواهد بود و در این صورت، مساحت ماکزیمم خواهد شد.

۴. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الساقینی که محیط آن ۱۸ متر باشد.

حل : اگر طول ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین را x متر و قاعده‌ی آن را y متر درنظر بگیریم، خواهیم داشت :



$A\hat{H}C: AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH^2 = x^2 - \frac{y^2}{4}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$

معادله‌ی اولیه : $s = \frac{1}{2}(AH \times BC) = \frac{y}{2}\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$

معادله‌ی ثانویه : $x + x + y = 18 \Rightarrow x = \frac{18 - y}{2}$

اکنون اگر $x = \frac{18 - y}{2}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم :

$$s = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{(18 - y)^2}{4} - \frac{y^2}{4}}$$

اگر s بیش‌ترین مقدار را بگیرد، آن گاه $s^2 = \frac{y^2}{4}(\frac{(18 - y)^2}{4} - \frac{y^2}{4})$ نیز بیش‌ترین مقدار را خواهد گرفت. بنابراین، نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(y) = \frac{y^2}{4}(\frac{(18 - y)^2}{4} - \frac{y^2}{4})$ را به دست می‌آوریم :

$$f(y) = \frac{y^2}{4}(81 - 9y) = \frac{81}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^3$$

$$f'(y) = \frac{81}{2}y - \frac{27}{4}y^2 = 0 \Rightarrow \frac{27}{4}y(6 - y) = 0$$
$$\Rightarrow y = 0 \ , y = 6$$

y	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$f'(y)$		−	0	+	0	−	
$f(y)$		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $y = 6$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم :

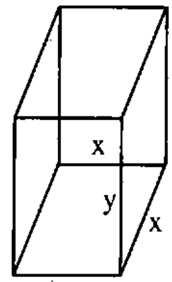
$y = 6$ و $x = \frac{18 - y}{2} \Rightarrow x = 6$

درنتیجه، بزرگ‌ترین مساحت مثلث برابر است با :

$$s = \frac{y}{2}\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} = \frac{6}{2}\sqrt{36 - \frac{36}{4}} = \frac{18\sqrt{3}}{2}$$

۵. در مکعب مستطیلی با قاعده‌ی مربع، مجموع طول و عرض و ارتفاع آن مقدار ثابت L است. ارتفاع این مکعب مستطیل چه‌قدر باشد تا حجم آن ماکزیمم شود.

حل : در صورتی که طول ضلع قاعده‌ی مکعب‌مستطیل را x و ارتفاع آن را y درنظر بگیریم، خواهیم داشت :



معادله‌ی اولیه : $V = x \times x \times y = x^{۲}y$

(حجم مکعب)

معادله‌ی ثانویه : $x + x + y = L \Rightarrow y = L - ۲x$

اکنون اگر $y = L - ۲x$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = x^{۲}(L - ۲x) = Lx^{۲} - ۲x^{۳}$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = Lx^{۲} - ۲x^{۳}$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۲Lx - ۶x^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ و } x = \frac{L}{۳}$$

h	$-\infty$		۰		$\frac{L}{۳}$		$+\infty$
$f'(h)$		−		+		−	
$f(h)$		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = \frac{L}{۳}$ دارای ماکزیمم نسبی است. درنتیجه داریم:

$$y = L - ۲x = L - \frac{۲L}{۳} = \frac{L}{۳}$$

۶. نقاطی بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۴ - x^{۲}$ پیدا کنید که نزدیک‌ترین نقاط به نقطه‌ی (۲و۰) باشند.

حل: فرض کنیم $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ واقع بر نمودار این تابع و نزدیک‌ترین نقطه به نقطه‌ی (۲و۰) باشد. بنابراین داریم:

معادله‌ی اولیه : $d = \sqrt{(x-۰)^{۲} + (y-۲)^{۲}}$

معادله‌ی ثانویه : $y = ۴ - x^{۲}$

اکنون اگر $y = ۴ - x^{۲}$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$d = \sqrt{x^{۲} + (۴ - x^{۲} - ۲)^{۲}} = \sqrt{x^{۲} + (۲ - x^{۲})^{۲}}$$

d وقتی کم‌ترین مقدار را می‌گیرد که عبارت زیر رادیکال کم‌ترین مقدار را داشته باشد، بنابراین نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{۲} + (۲ - x^{۲})^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۲x - ۴x(۲ - x^{۲}) = ۰ \;; ۲x(۲x^{۲} - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \text{ و } x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{۳}{۲}}$		۰		$\sqrt{\frac{۳}{۲}}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

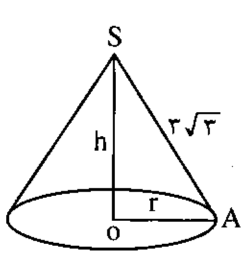
با توجه به جدول بالا، ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ دارای مینیمم نسبی است. درنتیجه داریم:

$$x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } y = ۴ - x^{۲} \Rightarrow y = ۴ - \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲};\; A\begin{vmatrix}\sqrt{\frac{۳}{۲}}\\ \frac{۵}{۲}\end{vmatrix}$$

$$x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } y = ۴ - x^{۲} \Rightarrow y = ۴ - \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲};\; B\begin{vmatrix}-\sqrt{\frac{۳}{۲}}\\ \frac{۵}{۲}\end{vmatrix}$$

پس نقاط A و B واقع بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۴ - x^{۲}$ هستند و تا نقطه‌ی (۲و۰) کم‌ترین فاصله را دارند.

۷. بین مخروط‌های به مولد ثابت $۳\sqrt{۳}$، ماکزیمم حجم را بیابید.



حل: فرض کنیم که شعاع قاعده‌ی مخروط r و ارتفاع آن h باشد. بنابراین داریم:

$$o\hat{S}A : oS^{۲} + oA^{۲} = SA^{۲} \Rightarrow r^{۲} + h^{۲} = ۲۷$$

معادله‌ی اولیه : $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$

معادله‌ی ثانویه : $r^{۲} + h^{۲} = ۲۷ \Rightarrow r^{۲} = ۲۷ - h^{۲}$

اگر $r^2 = 27 - h^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = \frac{1}{3}\pi(27 - h^2)h = 9\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(h) = 9\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$ را به دست می‌آوریم:

$f'(h) = 9\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = 3$ و $h = -3$

n	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(n)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(n)$		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $h = 3$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$h = 3$ و $r^2 = 27 - h^2 \Rightarrow r^2 = 27 - 9 = 18 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$

بزرگ‌ترین حجم مخروط به مولد $3\sqrt{3}$:

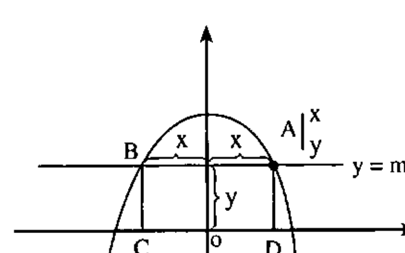
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 18 \times 3 = 18\pi$$

۸. خط $y = m > 0$، منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = 12 - x^2$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مستطیلی می‌سازیم که یک ضلع آن پاره‌خط AB و ضلع مقابل AB روی محور xها باشد. مقدار ماکزیمم مساحت مستطیل را بیابید.

حل. فرض کنیم $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ محل برخورد خط $y = m$ با تابع با ضابطه‌ی $y = 12 - x^2$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$S = 2xy$: معادله‌ی اولیه

$y = 12 - x^2$: معادله‌ی ثانویه



اگر $y = 12 - x^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$S = 2x(12 - x^2) = 2x^2 + 24x$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -2x^3 + 24x$ را به دست می‌آوریم:

$f'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x = 2$ و $x = -2$

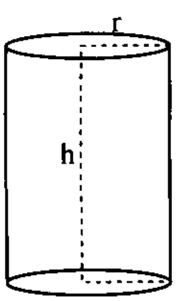
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $x = 2$ دارای ماکزیمم نسبی است. بنابراین داریم:

$$S = -2(2)^3 + 24(2) = 32$$

۹. رابطه‌ی بین r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه‌ای به صورت $r + h = 15$ است. شعاع قاعده چه قدر باشد تا سطح جانبی استوانه ماکزیمم شود؟

حل:



معادله‌ی اولیه:

$S = 2\pi rh$ (مساحت جانبی استوانه)

معادله‌ی ثانویه:

$r + h = 15 \Rightarrow h = 15 - r$

اگر $h = 15 - r$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، در این صورت معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$S = 2\pi r(15 - r) = -2\pi r^2 + 30\pi r$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(r) = -2\pi r^2 + 30\pi r$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(r) = -4\pi r + 30\pi = 0 \Rightarrow r = \frac{15}{2}$$

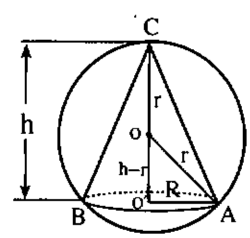
r	$-\infty$		$\frac{15}{2}$		$+\infty$
$f'(r)$		$+$	0	$-$	
$f(r)$		↗		↘	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم که تابع f در $r = \frac{15}{2}$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۱۰. حجم بزرگ‌ترین مخروط دواری را بیابید که در درون کره‌ای به شعاع r محاط شده است.

حل: فرض کنیم، شعاع قاعده‌ی مخروط R و ارتفاع آن h، و شعاع کره r باشد. بنابراین داریم:

$$O\overset{\Delta}{O'}A : OA^2 = OO'^2 + O'A^2 \Rightarrow r^2 = (h-r)^2 + R^2$$
$$\Rightarrow R^2 = r^2 - (h-r)^2$$
$$\Rightarrow R^2 = 2rh - h^2$$



معادله‌ی اولیه: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

معادله‌ی ثانویه: $R^2 = 2rh - h^2$

اگر $R^2 = 2rh - h^2$ را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم، معادله‌ی اولیه را به یک متغیر وابسته کرده‌ایم:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)h = \frac{2}{3}\pi rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(h) = \frac{2}{3}\pi rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(h) = \frac{4}{3}\pi rh - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = 0,\ \ h = \frac{4}{3}r$$

h	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}r$		$+\infty$
$f'(h)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(h)$		↘		↗		↘	

با توجه به جدول بالا ملاحظه می‌کنیم، تابع f در $h = \frac{4}{3}r$ دارای ماکزیمم نسبی است. درنتیجه:

$$V = \frac{2}{3}\pi r\left(\frac{4}{3}r\right)^2 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}r\right)^3 = \frac{32}{81}\pi r^3$$

تمرین‌های تکمیلی

۱. مطلوب است عددی از بازه‌ی $[0,1]$ که تفاضل بین آن عدد و مربعش ماکزیمم باشد.

۲. مطلوب است مساحت بزرگ‌ترین مستطیل قابل محاط در یک دایره به شعاع r.

۳. دو عدد مثبت چنان بیابید که مجموع آن‌ها برابر ۲۲۰ و حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم باشد.

۴. مطلوب است، ابعاد استوانه‌ی مستدیر قائم با بیش‌ترین حجم که بتوان آن را در یک مخروط مستدیر قائم به شعاع ۵ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط کرد.

۵. دایره‌ای با معادله‌ی $x^2 + y^2 = 9$ مفروض است. مطلوب است: الف) کوتاه‌ترین فاصله از نقطه‌ی (۵ و ۴) تا نقطه‌ای از دایره؛ ب) بیش‌ترین فاصله از نقطه‌ی (۵ و ۴) تا نقطه‌ای از دایره.

۶. مینیمم فاصله‌ی منحنی به معادله‌ی $y = x^2 - 2x$ از خط $y = 2x - 9$ را به دست آورید.

۷. خط $y = m > 0$ منحنی تابع به معادله‌ی $y = 27 - x^2$ را در نقاط A و B قطع می‌کند (O مبدأ مختصات است). اندازه‌ی ماکزیمم مساحت OAB را به دست آورید.

۸. در بیضی به معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، مستطیلی را که اضلاعش موازی محورهای مختصات است، محاط کرده‌ایم. ماکزیمم مساحت مستطیل را بیابید.

۹. یک قاعده‌ی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی ۴ متر و هریک از ساق‌های آن ۲ متر است. قاعده‌ی دیگر چند متر باشد تا مساحت ذوزنقه ماکزیمم باشد؟

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مجموع اندازه‌های وتر و یک ضلع مقدار ثابت k است. اگر مساحت مثلث ماکزیمم باشد، اندازه‌ی زوایای حاده‌ی آن را تعیین کنید.



هوشنگ شرقی

مسابقه‌های ریاضی در کشورها

در شماره‌ی قبل مسابقه‌های آزاد ریاضی کانادا در سال ۲۰۰۰ میلادی را ملاحظه کردید و حل قسمت الف این مسائل را آوردیم، اینک در پی حل مسائل قسمت ب را ملاحظه می‌کنید:

مسائل قسمت ب

۱. مثلث ABC با رئوس A(۰ و ۰) و B(۹ و ۰) و C(۰ و ۶) داده شده است. نقاط P و Q روی ضلع AB قرار دارند، به طوری که: AP=PQ=QB. به طریق مشابه، نقاط R و S روی AC واقعند، به قسمی که: AR=RS=SC. رأس C را به نقاط P و Q همچنین، رأس B را به نقاط R و S وصل می‌کنیم.

الف) معادله‌ی خط راستی را که از نقاط R و B می‌گذرد، بنویسید.

ب) معادله‌ی خط راستی که از نقاط P و C می‌گذرد را بنویسید.

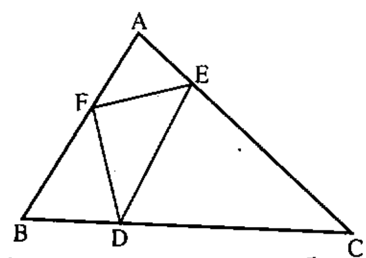
ج) پاره‌خط‌های PC و RB در نقطه‌ی X و پاره‌خط‌های QC و SB در نقطه‌ی Y متقاطع هستند. ثابت کنید، نقاط A ، X و Y روی یک خط راست واقعند.

۲. در مثلث ABC، نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB واقعند؛ به طوری که: $\angle AFE = \angle BFD$ ، $\angle BDF = \angle CDE$ و $\angle CED = \angle AEF$.

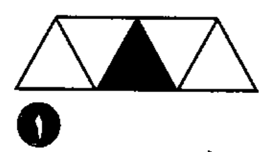
الف) ثابت کنید: $\angle BDF = \angle BAC$

مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا- سال ۲۰۰۰

ب) اگر AB=۵ ، BC=۸ و CA=۷ ، طول BD را بیابید.



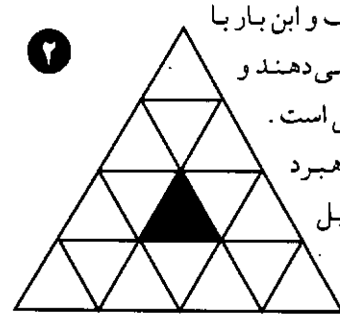
۳. الف) آلفونس و بریل بازی خود را از شکل هندسی مقابل شروع می‌کنند. آلفونس آغازگر بازی است و شکل اولیه را در امتداد یکی از خطوط راست



برش می‌دهد. قطعه‌ای را که شامل مثلث سیاه‌رنگ است، به بریل می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌اندازد. سپس بریل همین کار را می‌کند و قطعه‌ی شامل مثلث سیاه‌رنگ را به آلفونس می‌دهد و قطعه‌ی دیگر را دور می‌ریزد. این عمل تا آن‌جا ادامه می‌یابد که مثلث سیاه به یک نفر برسد و او برنده‌ی مسابقه است.

همراه با استدلال، نشان دهید که همواره یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد. (بریل همواره می‌تواند برنده باشد. مترجم)

ب) آلفونس و بریل، اکنون بازی دیگری را با همان قاعده‌ی بازی الف و این بار با شکل ۲ انجام می‌دهند و آغازگر بازی بریل است. آیا باز هم یک راهبرد پیروزی برای بریل وجود دارد؟ (پاسخ خود را با



استدلال دقیق ارائه دهید.)

۴. دنباله‌ی $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ با n جمله و با قانون‌های $t_1=1$ ، $t_2=4$ و $t_k = t_{k-1} + t_{k-2}$ و k=۳و۴و ... و n داده شده است. فرض کنید که T مجموعه‌ی جملات این دنباله باشد؛ یعنی $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$

الف) چند عدد صحیح مثبت وجود دارند که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً دو جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟

ب) چند عدد صحیح مثبت وجود دارند که بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دقیقاً سه جمله‌ی متمایز عضو T بیان کرد؟



حل مسائل مسابقه‌ی آزاد ریاضی کانادا (۲۰۰۰)

قسمت ب

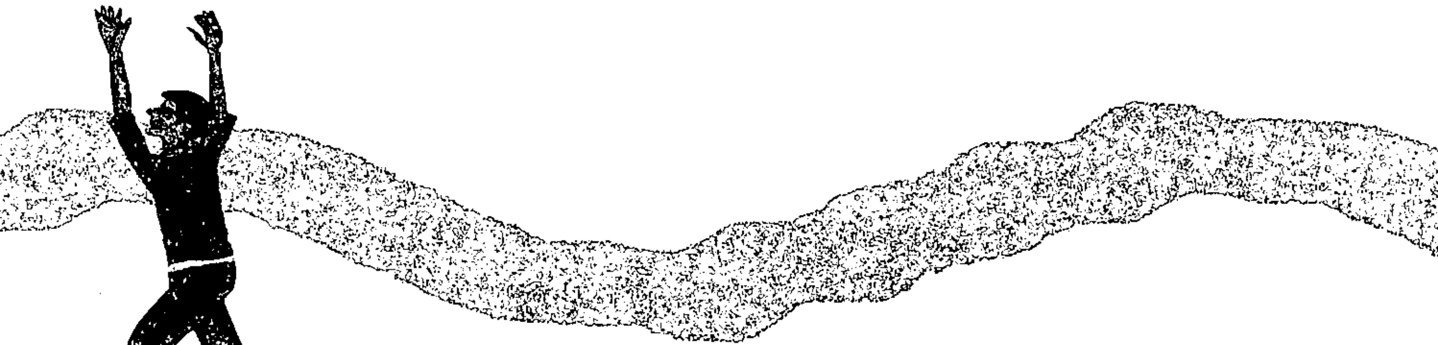
۱. با توجه به فرض مسأله، روشن است که: Q(۶ و ۰) و P(۳ و ۰) و S(۰ و ۴) و R(۰ و ۲) و بنابراین به سادگی شیب خطوط موردنظر و معادله‌ی آن‌ها به دست می‌آید:

$$m_{RB} = \frac{y_B - y_R}{x_B - x_R} = \frac{0-2}{9-0} = -\frac{2}{9} \Rightarrow RB: y - 0 = -\frac{2}{9}(x-9)$$

$$\Rightarrow RB: 9y + 2x = 18$$

$$m_{pc} = \frac{y_c - y_p}{x_c - x_p} = \frac{6-0}{0-3} = -2 \Rightarrow pc: y - 0 = -2(x-3) \Rightarrow$$

$$pc: y + 2x = 6$$



$$\begin{cases} y+2x=6 \\ 9y+2x=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ x=\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow X(\frac{9}{4},\frac{3}{2})$$

$$m_{QC}=\frac{y_c-y_Q}{x_c-x_Q}=\frac{6-0}{0-6}=-1 \Rightarrow QC: y-0=-1(x-6)$$

$$\Rightarrow QC: x+y=6$$

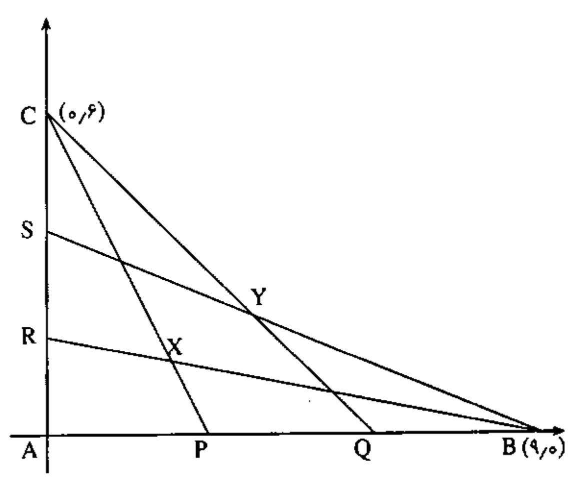
$$m_{SB}=\frac{y_B-y_S}{x_B-x_S}=\frac{0-4}{9-0}=-\frac{4}{9} \Rightarrow SB: y-0=-\frac{4}{9}(x-9)$$

$$\Rightarrow SB: 9y+4x=36$$

$$\begin{cases} 9y+4x=36 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{18}{5} \\ y=\frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow Y(\frac{18}{5},\frac{12}{5}) \Rightarrow$$

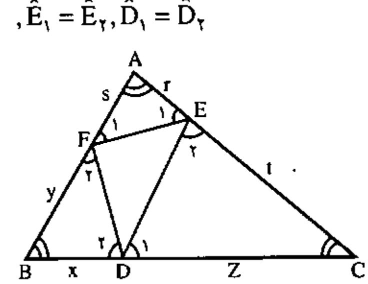
$$m_{AX}=\frac{\frac{3}{2}-0}{\frac{9}{4}-0}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}, m_{AY}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{18}{5}}=\frac{12}{8}=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$m_{AY}=m_{AX} \Rightarrow$ A، X و Y بر یک خط راست واقعند.



۲. الف در شکل داریم:

$$\hat{F}_1=\hat{F}_2 \quad ,\hat{E}_1=\hat{E}_2, \hat{D}_1=\hat{D}_2$$



و بنابراین می توان نوشت:

$$\hat{A}=180^\circ-\hat{E}_1-\hat{F}_1=180^\circ-\hat{E}_2-\hat{F}_2=$$
$$180^\circ-(180^\circ-\hat{C}-\hat{D}_1)-$$
$$(180^\circ-\hat{B}-\hat{D}_2)=\hat{C}+\hat{D}_1+\hat{B}+\hat{D}_2-180^\circ=$$
$$\hat{C}+\hat{B}+2\hat{D}_2-180^\circ=$$
$$180^\circ-\hat{A}+2\hat{D}_2-180^\circ=2\hat{D}_2-\hat{A} \Rightarrow \hat{A}=2\hat{D}_2-\hat{A} \Rightarrow$$
$$2\hat{A}=2\hat{D}_2 \Rightarrow \hat{A}=\hat{D}_2 \Rightarrow \angle BDF=\angle BAC$$

ب) به طریق مشابه قسمت الف می توان نشان داد که:

$$\hat{B}=\hat{E}_1=\hat{E}_2 \ , \ \hat{C}=\hat{F}_1=\hat{F}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{F}_2=\hat{C} \\ \hat{D}_2=A \end{cases} \Rightarrow \Delta BFD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BD}{AB}=\frac{BF}{BC} \Rightarrow$$

$$\frac{BD}{5}=\frac{BF}{8} \Rightarrow 8BD=5BF \ (1)$$

$$\begin{cases} \hat{E}_2=\hat{B} \\ \hat{D}_1=\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC} \Rightarrow$$

$$\frac{CD}{7}=\frac{CE}{8} \Rightarrow 8CD=7CE \ (2)$$

$$\begin{cases} \hat{E}_1=\hat{B} \\ \hat{F}_1=\hat{C} \end{cases} \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{5}=\frac{AF}{7} \Rightarrow 7AE=5AF \ (3)$$

حال با فرض BD=x، BF=y، CD=z، CE=t، AE=r و AF=s، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 8x=5y \\ 8z=7t \\ 7r=5s \\ x+z=8 \\ y+s=5 \\ r+t=7 \end{cases}$$

و پس از محاسبات لازم، از دستگاه معادلات فوق به دست می‌آید:

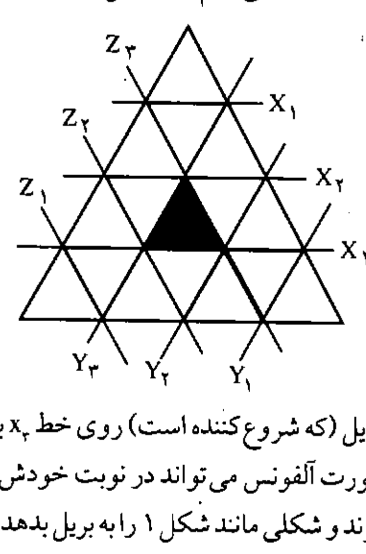
$$x=\frac{5}{2}, y=4, z=\frac{11}{2}, t=\frac{44}{7}, s=1, r=\frac{5}{7}$$

و در نتیجه: $BD=\frac{5}{2}$

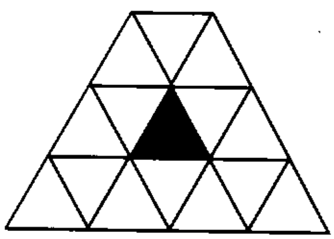
۳. **الف)** بدیهی است که بریل همواره می‌تواند برنده شود، زیرا اگر آلفونس برشی بزند که یک مثلث را جدا کند، در این صورت یکی از دو شکل زیر به بریل می‌رسد:  یا  و بنابراین بریل می‌تواند دو مثلث سفید را برش دهد و یکی از دو شکل  یا  را به آلفونس بدهد. حال آلفونس چاره‌ای جز این ندارد که یک مثلث سفید را ببرد و مثلث سیاه را تقدیم بریل کند!

اما اگر آلفونس در اولین برش دو مثلث سفید را جدا کند، بریل می‌تواند یک مثلث سفید را جدا کند و همان شکل بالا را به آلفونس بدهد و او را بازنده کند. نتیجه آن که: هرگاه یکی از این دو نفر شکلی نظیر شکل ۱ داشته باشد و آغازکننده‌ی بازی باشد، محکوم به باخت است.

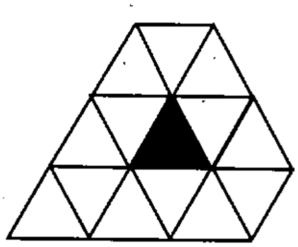
ب) دراین جا هم بریل می‌تواند برنده باشد. از نتیجه‌ی قسمت الف استفاده می‌کنیم. به شکل زیر دقت کنید:



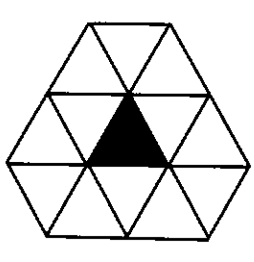
اگر بریل (که شروع کننده است) روی خط x_2 برش بزند، در این صورت آلفونس می‌تواند در نوبت خودش روی خط x_2 برش بزند و شکلی مانند شکل ۱ را به بریل بدهد. بنابراین، طبق نتیجه‌ی قسمت الف، چون بریل شروع کننده است، حتماً می‌بازد. به همین ترتیب، اگر بریل روی خط x_3 برش بزند، آلفونس می‌تواند روی خط x_3 برش بزند و همین وضع را ایجاد کند. پس بریل نباید روی خطوط x_2 و x_3 برش بزند. به همین ترتیب، او نباید روی خطوط y_2 و y_3 یا z_2 و z_3 برش بزند. پس او فقط می‌تواند، روی یکی از خطوط x_1 یا y_1 یا z_1 برش بزند و شکلی مانند این را به آلفونس بدهد:



با همین استدلال، در مرحله‌ی بعدی آلفونس فقط می‌تواند روی یکی از دو خط باقی مانده برش بزند و این شکل را به بریل بدهد:



بریل هم می‌تواند، روی خط سوم برش بزند و شکل زیر را به آلفونس بدهد:



و اکنون دیگر آلفونس بازنده است! (چرا؟)



۴. الف) طبق فرض داریم:

$T = \{1,4,5,9,14,23,\dots,t_n\}$

اعضای T به صورت صعودی مرتب شده‌اند. با کمی دقت درمی‌یابید که اگر عدد ۱ را با هر یک از اعضای T به جز ۱ و ۴، جمع کنیم، عددهای ۶، ۱۰، ۱۵ و ... به دست می‌آیند. یعنی این عددها به صورت مجموع دو عضو متمایز T قابل نمایش هستند. خود اعضای T نیز (به غیر از ۱ و ۴) طبق تعریف این دنباله، به صورت مجموع دو عضو T قابل نمایش هستند. یعنی عددهای زیر قابل نمایش به صورت مجموع دو عضو متمایز T هستند:

۵و۶و۹و۱۰و۱۴و۱۵و۲۳و۲۴و ... و T_n و T_n+1

که تعداد آن‌ها برابر است با: $n-2+n-2=2n-4$

با کمی دقت و امتحان به نظر می‌آید، به غیر از این عددها عدد صحیح دیگری قابل نمایش به صورت مجموع دو عضو T نباشد. یعنی برای مثال، عددهای طبیعی بین ۱۵ و ۲۳ (یعنی ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱ و ۲۲) را نمی‌توان به صورت مجموع دو عضو T نوشت. اما این موضوع را به طور دقیق هم اثبات می‌کنیم.

دو عضو متوالی T، یعنی T_{k+1} و T_k را در نظر بگیرید. واضح است که T_k را می‌توان به صورت مجموع دو عضو S (با شرط $k \ge 3$) نوشت. همچنین T_k+1 نیز مجموع T_k و ۱ است که هر دو عضو T هستند. اکنون نشان می‌دهیم که هیچ یک از عددهای متوالی $T_k+2, T_k+3, \dots, T_{k+1}-1$ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عضو T نوشت. اگر T_k+r $(2 \le r < T_{k-1}-1)$ را بتوان به صورت مجموع دو عضو T نوشت، واضح است که آن دو عضو کوچک‌تر از T_k هستند؛ یعنی: $T_k+r=T_m+T_n$ و m و $n<k$ با توجه به تعریف دنباله داریم:

$T_{k-1}+T_{k-2}+r=T_m+T_n, m,n \le k-1$

بدیهی است که برابری فوق نمی‌تواند درست باشد. (چرا؟)

ب) روش این قسمت مشابه قسمت الف است و به همان ترتیب می‌توان دید که به ازای هر $k \ge 5$، می‌توان هر T_k را به صورت مجموع سه عضو T نوشت:

$T_k = T_{k-1}+T_{k-2} = T_{k-1}+T_{k-3}+T_{k-4}$

همچنین، عدد بعدی آن را هم می‌توان به صورت مجموع سه عضو T نوشت:

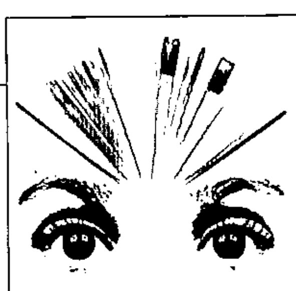
$T_k+1 = T_{k-1}+T_{k-2}+1$

اما با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد، هیچ عدد طبیعی بین T_{k+1} و T_k+1 را نمی‌توان به صورت مجموع سه عضو متوالی T نوشت، بنابراین، تعداد همه‌ی این گونه عددها برابر است با: $n-4+n-4=2n-8$

سؤال: حدس می‌زنید تعداد عددهای طبیعی که بتوان به صورت مجموع k عضو متمایز T نمایش داد، چندتا باشند؟

پاورقی

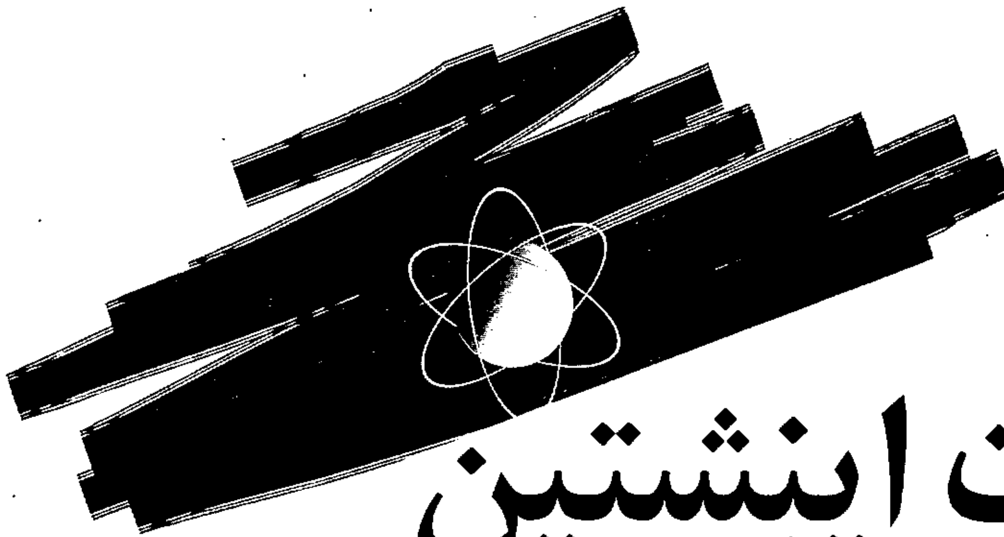
1. Challenging problems



معماهای فکری و منطقی

چهار گاو سیاه و سه گاو قهوه‌ای در پنج روز به اندازه‌ی سه گاو سیاه و پنج گاو قهوه‌ای در چهار روز شیر می‌دهند.

کدام نوع گاو شیر بیش‌تری می‌دهد، سیاه یا قهوه‌ای؟



آلبرت اینشتین

از کتاب (Einatein The passions of Scientiet)

ترجمه: احمد قندهاری

آلبرت اینشتین[1] مردی با هیجانات گوناگون بود. بزرگ‌ترین آرزویش درک طبیعت و یافتن بنیادهای نهفته‌ی حقایق بود.

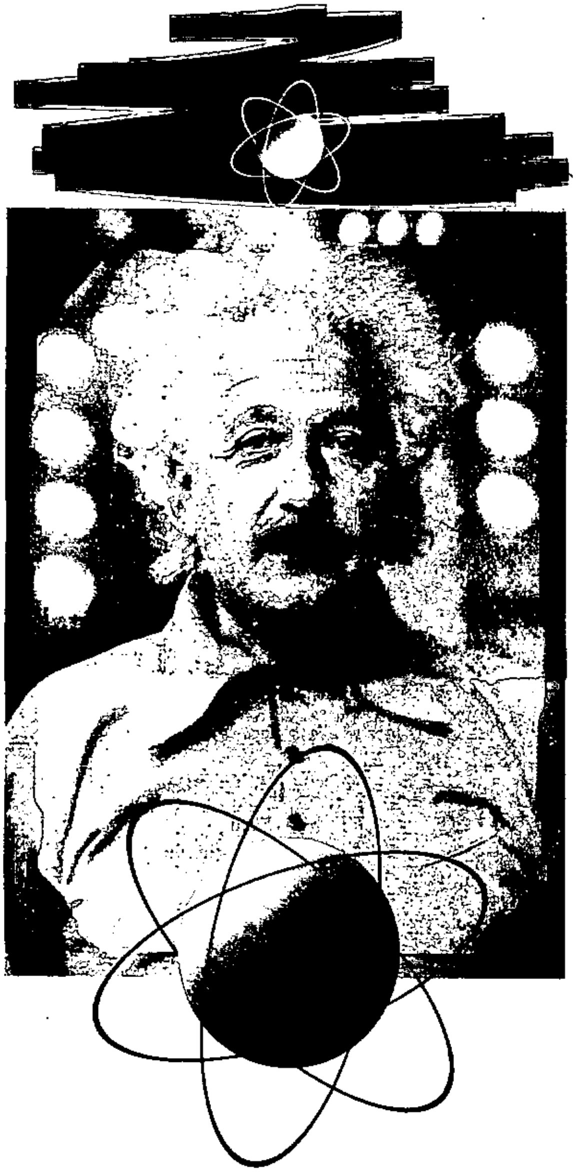
او همه‌ی عمر خود را وقف تحقیقات کرد. به دوست خود میشل بسو[2] نوشت: «اگر نتوانم کار خودم را انجام دهم، زندگی را نمی‌خواهم.» او پذیرفته بود که جان و تن خود را صرف علم کند و از این بابت هیچ تأسفی نداشت. تحقیق همه‌ی زندگی او بود و با تمام وجود، خود را وقف آن کرد. با وجود این، اینشتین علاقه‌مندی‌های دیگری هم داشت که در سرلوحه‌ی همه‌ی آن‌ها موسیقی قرار داشت. زمانی گفت: **«اگر فیزیکدان نبودم، علاقه‌مند بودم که موسیقیدان باشم.»**

او اغلب به موسیقی فکر می‌کرد و می‌گفت: «در رؤیای بیداریم با موزیک زندگی می‌کنم» و موزیک را بخشی از زندگی خود می‌دانست و از آن بسیار لذت می‌برد. یک‌بار به یک خبرنگار گفت، به‌خصوص به موتزارت علاقه‌مند است و می‌گفت: **«موسیقی موتزارت چنان ناب و زیباست که من آن را انعکاس فوق‌العاده‌ی زیبایی‌های جهان می‌دانم.»**

یکی از خواست‌های مهم اینشتین این بود که می‌خواست میان علوم مادی پیوند برقرار کند. او سی سال آخر عمر را صرف تحقیق مأیوس کننده‌ای برای نظریه‌ی وحدت جهان کرد؛ نظریه‌ای که می‌توانست همه‌ی علوم مادی را تعبیر و تفسیر کند. اگر چه این کوشش به نتیجه نرسید، ولی بیهوده هم نبود. هر چند در زمان حیات اینشتین عده‌ی کمی کار او را به صورت جدی دنبال کردند، اما جست‌وجو برای **«نظریه‌ی بنیاد واحد برای همه چیز»**، اینک رشته‌ی مهمی از فیزیک است؛ رشته‌ای که اکنون صدها دانشمند را در جهان به تحقیق واداشته است.

اینشتین در پیگیری علاقه‌مندی‌هایش به‌حدی شور و اشتیاق داشت که بعضی اوقات سرسخت و لجوج جلوه می‌کرد. این صفات ویژه‌ی او، هم در تحقیق برای اثبات نظریه‌ی وحدت جهان و هم در رد کردن مکانیک کوانتم مشهود بود. در مکانیک کوانتم، به جای نظریه‌ی کلاسیک «جبر علّی»، نظریه‌ی احتمال و عدم اطمینان ارائه شده بود، اینشتین این مغایرت و تباین را دریافت و آن را رد کرد. به اعتقاد او، جهان باید واقعیتی مبتنی بر جبر علّی داشته باشد. به عبارت دیگر، دانشمند باید قادر به تعیین دقیق و کامل همه‌ی خواص جهان باشد. این تنها چیزی بود که در ذهن او معنی داشت. یکی از مشهورترین عبارت‌های او این است: **«خداوند جهان را بر اساس تصادف خلق نکرده است.»**

اینشتین در نظریه‌هایش به دنبال ساده کردن بود. او در زندگی شخصی‌اش هم علاقه‌مند بود که ساده باشد. از ثروت بیزار بود و از موقعیت‌های متعدد که به او پیشنهاد می‌شد،



هیچ‌گاه برای اندوختن ثروت استفاده نکرد. از شهرتی که اضطراراً برایش ایجاد شده بود، ناراحت بود و حتی در میان جمع دستپاچه می‌شد. با آن همه شهرت، فروتن و بی‌تکلف بود؛ به‌خصوص سادگی او حتی در لباس پوشیدن نیز مشهود بود. لباس‌های کهنه و قدیمی را به لباس‌های نو ترجیح می‌داد و اغلب بدون جوراب بیرون می‌رفت. با وجود میلش به‌سادگی، مرد ساده‌ای نبود و حتی شخصیت پیچیده‌ای داشت.

افراد زیادی او را مردی آرام و شوخ می‌پنداشتند. در واقع، او مرد نجیبی بود که همه چیز را عمیقاً احساس می‌کرد و هدف‌هایش را با اشتیاق فراوان دنبال می‌کرد. برای هر چیزی که به آن عشق می‌ورزید، شالوده‌ی روانی بسیار قوی داشت. بانش هوفمن[۳]، در شرح حال اینشتین نوشت که او «خلاق و انقلابی» بود و به راستی این دو خصیصه، به علاوه‌ی احساس قوی او درباره‌ی جهان، از سنین اولیه در او آشکار بود. همچنین، از روش‌های آموزش نظامی که در مدرسه‌اش در مونیخ به کار گرفته می‌شد، ناراضی بود. در واقع، او از همه‌ی جنبه‌های امور نظامی بیزار بود. به همین دلیل هم، در زندگی آینده‌ی خود مردی صلح‌جو شد.

خانواده

اگر چه اینشتین از خانواده‌ای با محبت برخوردار بود، ولی آشفتگی‌هایی هم در دوران کودکی او وجود داشت. وقتی پدر و مادر او به میلان کوچ کردند، او برای ادامه‌ی تحصیل دبیرستان، در مونیخ ماند. دوری از خانواده باعث افسردگی او شد. به همین علت نتوانست با بسیاری از دبیران خود سازگاری کافی داشته باشد. در سال‌ها بعد، در دانشگاه نیز سرکش بود، و همین سرکشی و نافرمانی باعث شد که مطلوب استادانش نباشد.

بعد از فراغت از تحصیل، برای مدت کوتاهی، افسردگی شدیدی داشت. نمی‌توانست شغلی بیابد و از طرف دیگر، خانواده‌اش مخالف ازدواج او با هم‌کلاسی مورد علاقه‌اش بودند. اینشتین برای مدتی احساس پوچی می‌کرد، ولی نهایتاً تصمیم گرفت و موفق شد و واقعاً این هدف و این نیروی برانگیزنده موجب ادامه کار او شد. اگر چه وقتی جوان بود، سرکشی می‌کرد، ولی به موازات بالا رفتن سنش، طبیعت او حداقل به ظاهر تغییر کرد. وقتی جوان بود، احساس می‌کرد باید خود را به اثبات برساند؛ در این زمان آدمی از خودراضی جلوه می‌کرد. بالاخره وقتی که خود را به اثبات رساند، رفتارش آرام و متین شد، ولی زیر این ظاهر آرام، شور و جوانی و علاقه‌مندی‌هایش همیشه وجود داشتند.

برخی از ویژگی‌های شخصیتی او متأثر از رفتار مادرش با او بود. مادرش احساس عمیقی نسبت به او داشت، ولی با غرق کردن خود در عشق مادری، جلوی رشد او را نمی‌گرفت، بلکه بیش‌تر توجهش معطوف به آینده‌ی فرزندش و ترغیب او بود، برای این که متکی به خود بار بیاید. پدرش، هرمَن[۴]، کمی بی‌قید بود و به آسانی تحت تأثیر دیگران قرار می‌گرفت. پس

مادر به این نتیجه رسید که آلبرت نباید مثل پدرش از آب درآید. می‌خواست پسرش باشخصیتی قوی رشد یابد. هیچ تردیدی نیست که مادر بر شخصیت پسرش تأثیر فراوان داشت.

پدر اینشتین نیز روی آلبرت تأثیر داشت، اگر چه نه به اندازه‌ی مادرش. او مردی مهربان و خونگرم بود و آلبرت علاقه‌ی زیادی به او داشت. با وجود این علاقه‌مندی، وقتی متوجه شد که درآمد پدرش کافی نیست، از ادامه‌ی شغل خانوادگی که تجارت لوازم الکتریکی بود، خودداری کرد.

او از شکست‌های شغلی پدرش احساس اندوه می‌کرد و می‌دانست که در اثر فشار کار، سلامت پدر از دست می‌رود. پس پدر را تشویق می‌کرد که از کار خود دست بکشد، ولی این گفته‌ها تأثیری بر پدر نداشت.

اگر چه اینشتین از تنهایی لذت می‌برد، ولی تعدادی دوست نزدیک هم داشت. این دوستی‌ها در تمام طول زندگی‌اش ادامه یافتند. اینشتین علاقه‌ی شدیدی به چند زن داشت؛ اگر چه آن‌ها بارها مشکلاتی جدی برایش ایجاد می‌کردند. چهار زن اصلی زندگی او عبارتند از: مادرش، خواهرش **ماجا**[5] و دو همسرش **میلوا**[6] و **الزا**[7].

اینشتین از وقتی جوان بود تا زمانی که مشهور شد، به یادگیری و کتاب علاقه‌ی وافری داشت. او برای کتاب‌های علمی روز وقت زیادی صرف می‌کرد و از عهده‌ی مطالعه‌ی کتاب‌های جامع و پیشرفته نیز برمی‌آمد. از نوجوانی عادت داشت که خودش مطالعه کند، به جای این‌که مطالب را در کلاس یاد بگیرد. حتی در دانشگاه نیز وقت زیادی صرف خودآموزی می‌کرد. قدرت خلاقه‌ی او در زمان کوتاهی پس از فراغت از تحصیل بروز کرد واو را به قله رساند. با دو شاگردش، **موریس سولوین**[8] و **کزاد هبیج**[9]، آکادمی المپیک را تشکیل داد. پس از چند سال، سه تن از شاگردانش کارهای بزرگی در علوم انجام دادند.

اینشتین، برای آن‌که ایده‌های خودش را بهتر درک کند، آن‌ها را با شاگردانش در میان می‌گذاشت و درباه‌ی آن‌ها بحث می‌کرد. یکی از ایده‌های اصلی او، ارتباط بین نور و امواج الکتریکی بود. سال ۱۹۰۵ برای او سال معجزه بود؛ زیرا طی این سال، پنج مقاله فوق‌العاده مهم در فیزیک نوشت، که یکی از آن‌ها مقاله‌ی مشهور «نسبیت خاص» بود که تصویر تازه‌ای از نقش فضا و زمان در جهان ارائه می‌داد و شامل اطلاعاتی عجیب بود.

با وجود این، اومتوجه شد که نسبیت خاص کامل نیست و فقط روی حرکت یکنواخت مستقیم‌الخط کاربرد دارد. بنابراین، خیلی زود کوشش جدیدی را آغاز کرد تا آن‌را برای هر نوع حرکتی بسط دهد.

موفقیت «نظریه‌ی نسبیت عمومی» اینشتین راخوشحال کرد. حالا ما می‌دانیم که این نظریه علاوه بر توضیح نیروی جاذبه، از چیزهای عجیب دیگری نظیر وجود سیاهچال‌ها و همچنین تشریح چگونگی پیدایش جهان و ساختمان آن خبر می‌دهد. اینشتین سرانجام احساس کرد که این مطلب ممکن است در مورد زمینه‌ی دیگری از طبیعت که رشته‌ی الکترومغناطیس خوانده می‌شود نیز، صادق باشد. اوتحت تأثیر دو کوشش دیگر در این راستا بود که اولی به‌وسیله **هرمن ویل**[10] و دومی به وسیله‌ی **تئودر کالوزا**[11] انجام شده بود، هر دو به نظر اینشتین منطقی و ابتکاری بودند و باعث ابتکار جدید در خود او شدند. اینشتین به سرعت وارد عمل شد. او متقاعد شده بود که هر دو کوشش، عملاً نمود یک زمینه‌ی علمی هستند. سال‌ها تلاش کرد تا نتایج آن دو کوشش را در هم بیامیزد. این شروع تلاشی علمی برای **یافتن نظریه‌ی وحدت جهان** بود که تا آخر عمرش ادامه یافت.

اینشتین در مورد یگانگی ریشه‌ی علوم باوری عمیق داشت. این نکته در این بیان او مشهود است: «**هدف عالی همه‌ی علوم این است که بیش‌ترین واقعیات تجربی را به کمک استنتاج منطقی از کم‌ترین مفروضات استخراج کند.**»

زیرنویس

1. Albert Eniatein
2. Michele Besso
3. Banesh Hoffman
4. Herman
5. Haja
6. Mileua
7. Elsa
8. Maurice Solovin
9. Conrad Habicht
10. Herman Weyl
11. Theodor Kaluza

بزرگ‌ترین توان* m در n!

سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

ابتدا قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه. اگر n عددی طبیعی باشد، در تجزیهٔ عدد n! به عوامل اوّل، عدد اوّل p به صورت توانی با نمای t خواهد بود ($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد):

$$t=\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^{2}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^{3}}\right\rfloor+\cdots \qquad (1)$$

برهان. اعداد n و k را طبیعی و $p \le n$ را عددی اول فرض می‌کنیم. واضح است که عددهای دنبالهٔ $\{n\}$ که بر p^k قابل قسمت‌اند، باید به صورت sp^k باشند، که در آن s عددی است طبیعی و در شرط $sp^k \le n$ صدق می‌کند؛ به طوری که $s \le \frac{n}{p^k}$. بدیهی است که تعداد مقادیر s برابر $\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$ است.

از طرف دیگر t (توان p) که در تجزیهٔ n! به عوامل اول ظاهر می‌شود، از مجموع عددهایی که از تعداد جمله‌های دنبالهٔ $\{n\}$ که بر p یا p^2 یا p^3 یا ... و یا p^k، بخش‌پذیرند، به دست می‌آید. بنابراین، در این‌جا برقراری رابطهٔ (۱) به اثبات می‌رسد.

مثال ۱. بزرگ‌ترین توان m=15 که ۶۲! را می‌شمارد، به دست آورید.

حل: با توجه به 15=5×3 و توجه به این نکته که بزرگ‌ترین توان ۵ از بزرگ‌ترین توان ۳ که ۶۲! را می‌شمارد؛ کوچک‌تر است، کافی است بزرگ‌ترین توان ۵ که ۶۲! را می‌شمارد، تعیین کنیم:

$$t=\left\lfloor\frac{62}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{62}{5^{2}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{62}{5^{3}}\right\rfloor+\cdots$$
$$=\left\lfloor\frac{62}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{62}{25}\right\rfloor+0=12+2=14$$

بدیهی است که بزرگ‌ترین توان ۳ که ۶۲! را می‌شمارد، حداقل ۱۴ است. بنابراین بزرگ‌ترین توان ۱۵ که ۶۲! را می‌شمارد، 15^{14} است.

مثال ۲. عدد ۱۰۰! به چند صفر ختم می‌شود؟

حل: در واقع، باید بزرگ‌ترین توان عدد 10=2×5 را در ۱۰۰!، به دست آوریم. چون بزرگ‌ترین توان ۵ از بزرگ‌ترین توان ۲ که ۱۰۰! را می‌شمارد، کوچک‌تر است، تنها بزرگ‌ترین توان ۵ که ۱۰۰! را می‌شمارد، تعیین می‌کنیم:

$$t=\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{5^{2}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{5^{3}}\right\rfloor+\cdots=20+4+0=24$$

بنابراین، ۱۰۰!، به ۲۴ صفر ختم می‌شود.

مثال ۳. عدد $\frac{340!}{170!}$، به چند صفر ختم می‌شود؟

حل: بزرگ‌ترین توان ۱۰ که ۳۴۰! را می‌شمارد، چنین است:

$$t=\left\lfloor\frac{340}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{340}{5^{2}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{340}{5^{3}}\right\rfloor+\cdots=68+13+2=83$$

همچنین بزرگ‌ترین توان ۱۰ که ۱۷۰! را می‌شمارد، چنین است:

$$t'=\left\lfloor\frac{170}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{170}{5^{2}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{170}{5^{3}}\right\rfloor+\cdots=34+6+1=41$$

بنابراین عدد $\frac{۳۴۰!}{۱۷۰!}$ ، به $۸۳-۴۱=۴۲$ صفر ختم می‌شود.

مثال ۴. اعداد طبیعی n را چنان بیابید که در آن، !n به ۲۰ رقم صفر ختم شود.

حل: واضح است که عدد !n به ۲۰ رقم صفرختم می‌شود؛ اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین توان ۵ که !n را می‌شمارد، برابر $۵^{۲۰}$ باشد. به عبارت دیگر می‌خواهیم n را چنان بیابیم که داشته باشیم:

$$t=\left\lfloor\frac{n}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{۵^۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{۵^۳}\right\rfloor+\cdots=۲۰$$

اگر $n=۱۲۵$، آن‌گاه $t=۳۱$ و اگر $n=۷۵$، آن‌گاه $t=۱۸$؛ بنابراین معلوم می‌شود که $۷۵<n<۱۲۵$.

با فرض $n=۷۵+۵k+s$، می‌توان نوشت $(k,s\in\mathbb{N})$:

$$t=\left\lfloor\frac{۷۵+۵k+s}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۷۵+۵k+s}{۲۵}\right\rfloor$$

$$=۱۵+k+\left\lfloor\frac{s}{۵}\right\rfloor+۳+\left\lfloor\frac{k}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{s}{۲۵}\right\rfloor=۲۰$$

اگر $۰\le k\le ۴$ و $۰\le s\le ۴$، پس:

$$t=۱۵+k+۳=۲۰\ ;\ k=۲۰-۱۸=۲$$

بنابراین، به ازای $k=۲$ و $۰\le s\le ۴$، مقادیر n تعیین می‌شوند:

$$k=۲\ :n=۷۵+۵k+s=۷۵+۵(۲)+s=۸۵+s\ ;$$

$۰\le s\le ۴\ :n=۸۵,۸۶,۸۷,۸۸,۸۹$ (مسأله پنج جواب دارد)

مثال ۵. با فرض این‌که !n به t_k رقم صفر ختم شود، نشان دهید که t_k برای اعداد بزرگ n، نزدیک به $\frac{n}{۴}$ است.

حل: واضح است که t_k برابر بزرگ‌ترین توان ۵ است که !nرا می‌شمارد (بنابر قضیه‌ی ۱):

$$t_k=\left\lfloor\frac{n}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{۵^۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{۵^۳}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n}{۵^k}\right\rfloor+\cdots \qquad (۱)$$

بدیهی است که با فرض $۱\le\frac{n}{۵^k}>۰$ ، به دست می‌آید $k\ge\log_۵^n$ و این بدان معناست که در عبارت t_k ، بیش از $۱+\lfloor\log_۵^n\rfloor$ جمله غیر صفر وجود ندارد. در این‌جا، تصاعد هندسی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$s_k=\frac{n}{۵}+\frac{n}{۵^۲}+\frac{n}{۵^۳}+\cdots+\frac{n}{۵^k}+\cdots \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ جمله به جملهٔ دو مجموع (۱) و (۲) با هم، خواهیم داشت:

$$\left(\begin{matrix}\text{در حالت خاص:}\\ n=۵^k: s_k-t_k=۰\end{matrix}\right) ۰\le s_k-t_k<k$$

$$k=\lfloor \log_۵^n \rfloor+۱:\ ۰\le s_k-t_k<۱+\lfloor \log_۵^n\rfloor \qquad (۳)$$

حدّ مجموع بی‌نهایت جملهٔ تصاعد هندسی (۲) برابر با $s=\frac{n}{۴}$ است؛ پس با جایگزین کردن این مقدار به جای s_k، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

(در واقع اگر n بی‌نهایت بزرگ باشد، k بی‌نهایت بزرگ است.)

$$\frac{۱}{۴}-\frac{۱+\lfloor \log_۵^n\rfloor}{n}<\frac{t_k}{n}\le\frac{۱}{۴} \qquad (۴)$$

چون آهنگ تغییرات (رشد) تابع لگاریتمی، بسیار کندتر از n است، بنابراین خارج قسمت $\frac{t_k}{n}$ را اگر n را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم، می‌توانیم به $\frac{۱}{۴}$ نزدیک کنیم؛ در این صورت t_k به طور تقریبی برابر $\frac{n}{۴}$ است.

مثال۶. نشان دهید که آیا عدد !n می‌تواند به ۴۸ رقم صفر ختم شود؟

حل: واضح است که برای حل این مسأله، کافی است بزرگ‌ترین توان ۵ که ! n را می‌شمارد، تعیین شود. برای n=۲۰۰ به دست می‌آوریم:

$$t=\left\lfloor\frac{۲۰۰}{۵}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۲۰۰}{۵^۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۲۰۰}{۵^۳}\right\rfloor=۴۰+۸+۱=۴۹$$

از طرفی همین مجموع برای n=۱۹۹ برابر با ۴۷ است. بنابراین !n نمی‌تواند به ازای هیچ n طبیعی به ۴۸ صفر ختم شود.

تمرین. عدد $\binom{۲n}{n}$ به چند صفر ختم می‌شود.

مرجع

www.primenumbers formula.com



تفسیری که نیریزی بر کتاب مجسطی بطلمیوس نوشته است بهترین تفسیرهای آن کتاب دانسته شده است، تا آن جا که گاهی نیریزی را به طور مطلق «شارح مجسطی» خوانده اند و با وجود آن که عده ای دیگر نیز بر مجسطی بطلمیوس شرح و تفسیر نوشته اند وقتی بدون قید نام از «شارح مجسطی» سخن به میان آید، معلوم است که مقصود نیریزی است.

شرحی که نیریزی بر کتاب اصول اقلیدس نوشته است نیز از مهمترین و مشهورترین شرح های آن کتاب است که به زبان لاتینی ترجمه شده و مورد استفاده و توجه مورخان ریاضی است.

آثار ریاضی موجود نیریزی

۱- شرح کتاب اصول اقلیدس

این شرح را نیریزی بر ترجمه ی اصول اقلیدس توسط حجاج بن یوسف بن مطر نوشته است و از نظر تاریخ ریاضیات دوره ی اسلامی و یونانی حایز اهمیت است زیرا در آن قسمت هایی از آثار ایرن(هرون) اسکندرانی[۳] و سنبلیقیوس[۴] و اغانیس[۵] نقل شده است.

نسخه ای خطی فقط از مقالات اول تا ششم و آغاز فصل هفتم متن عربی این شرح در لیدن موجود است. متن عربی این شش مقاله و ترجمه ی لاتینی آن از سال ۱۸۹۳ به بعد به تدریج در کپنهاگ به چاپ رسید. ده مقاله ی اول این شرح را جرارد کرمونی در قرن دوازدهم میلادی به لاتینی ترجمه کرده بود و این ترجمه در سال ۱۸۹۹ میلادی به چاپ رسیده است.

هیث در تاریخ ریاضیات خود نوشته است که اهمیت فعلی این شرح به علّت قسمت هایی است که از ایرن اسکندرانی و سنبلیقیوس در آن نقل شده است. هیث خود به طور مکرر در ترجمه ی سیزده مقاله ی اصول اقلیدس، آرای ایرن اسکندرانی و سنبلیقیوس را از قول نیریزی نقل کرده است.

۲- رساله فی(بیان) المصادرة المشهوره لاقلیدس

یک نسخه از این رساله در کتابخانه ی مدرسه عالی شهید مطهری و فیلم آن به شمارهٔ ۳۵۹۸ در کتابخانه ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است و عکس آن در صفحات ۸۶ و ۸۷ کتاب« قربانی : ریاضیدانان ایرانی » به چاپ رسیده است. یک نسخه ی خطی دیگر هم از آن در برلین به شماره ی ۵۹۲۷ هست.

سوتر نوشته که ممکن است این رساله بخشی از کتاب شرح نیریزی بر اصول اقلیدس باشد.

تبصره: فهرست سایر تألیفات نیریزی را در کتاب« قربانی : ریاضیدانان ایرانی» صفحات ۷۸ تا ۸۳ خواهید یافت.

یادداشت: رساله ای موسوم به« فی استخراج کمیت الاجرام المختلفه» در کتابخانه ی گتا[۶] موجود است که مؤلف آن ابومنصور نیریزی است. معلوم نیست که آیا این ابومنصور نیریزی همان ابوالعباس نیریزی است و یا نه(بعضی از اشخاص در دوره ی اسلامی دو کنیه داشته اند).

زیرنویس:

۱. Anaritius

۲. umbra versa

۳. Heron of Alexandria ریاضی دان اسکندرانی که در حدود نیمه ی دوم سده ی اول میلادی می زیسته است.

۴. Simplicios فیلسوف یونانی از قرن ششم میلادی که شرحی بر مقاله ی اول اصول اقلیدس نوشته است.

۵. Aganius

۶. بروکلمان S_1، ص ۱۰۲۱ (ش ۴۹)، سزگین G_5، ص ۲۸۵

منبع:

زندگی نامه ریاضی دانان دوره ی اسلامی/ ابوالقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی.

مجموعه

کتاب‌های چهارده آفتاب

زیرنظرِ دفتر انتشارات کمک آموزشی
(کتاب رشد)



مجموعهٔ «چهارده آفتاب» سعی دارد با روایت شیرین و دلپذیر از زندگی چهارده معصوم علیهم السلام رازهای محبوبیت و شکوه آسمانی آنان را روشن سازد.
امید است این مجموعه با نگاه نو، گوشه هایی از زندگی چهارده انسان کامل آفرینش را بیان کند تا نوجوانان و جوانان، روح تشنه خود را با زلال وجود ایشان سیراب سازند.

علاقه‌مندان می‌توانند این کتاب‌ها را از فروشگاه‌های انتشارات مدرسهٔ تهیه نمایند.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه‌ی شهید محمود حقیقت طلب، شماره‌ی ۳۶.
○ تلفن: ۹-۸۸۸۰۰۳۲۴-۰۲۱
○ دورنویس: ۸۸۹۰۳۸۰۹-۰۲۱

karim

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

ISSN:1735-4951

رشد برهان ۵۱

دوره ی متوسطه

مجله ریاضی

فصلنامه ی آموزشی، تخلیلی، اطلاع رسانی
وره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۱
ایيز ۱۳۸۵ • بها ۳۰۰۰ ریال

www.roshdmag.org



- اتحاد و معادله
- قرینه یابی در فضا
- هندسی فکر کنیم
- مسأله ی فواره ها و زیر آب
- راهیان المپیاد های ریاضی



ابوجعفر محمدبن حسین صاغانی خراسانی خازن

ابوجعفر محمدبن حسین صاغانی خراسانی خازن، ریاضیدان و منجم ایرانی، یکی از بزرگ‌ترین رجال ریاضی و نجوم در نیمه‌ی اول قرن چهارم است. در اواخر عمر و یا در تمام عمر، در شهر ری می‌زیست و نوشته‌اند که در دستگاه رکن‌الدوله‌ی دیلمی صاحب مقام و عزت بوده است. عمر طولانی یافت و بین سال‌های ۳۵۰ و ۳۶۰ درگذشت.

ابوجعفر خازن علاوه بر مقام بلندی که در نجوم و ریاضیات داشت، در ساختن آلات نجومی و به کار بردن آن‌ها مهارت کامل داشت و در زمان خود در این فن مشهور بود، به طوری که ریاضیدانان بزرگ مانند **ابونصر عراق**، **ابوریحان بیرونی**، **ابوالجود**، **عمر خیام** و **نصیرالدین طوسی**، بارها در نوشته‌های خود از وی و آثارش گفت‌وگو کرده‌اند. **ابوزید احمدبن سهل بلخی**، کتاب «شرح صدر کتاب السماء و العالم ارسطو» را به نام وی تألیف کرده است.

بیرونی در کتاب «تحدید نهایات الاماکن»، از رصدی که **ابوالفضل هروی** با حضور ابوجعفر خازن در سال ۳۴۸ در شهر ری انجام داده گفت‌وگو کرده است. هم او در کتاب «استخراج الاوتار»، استدلالی از ابوجعفر خازن برای یک قضیه‌ی هندسی ذکر کرده است. همچنین، در قانون مسعودی از کتاب «فی الابعاد والاجرام» و در آثارالباقیه از کتاب «المدخل الکبیر الی علم النجوم» که هر دو از تألیفات ابوجعفر خازن هستند و به ظاهر از بین رفته‌اند، مطالبی نقل کرده است. همچنین بیرونی، در کتاب «مقالید علم الهیئة» از تفسیری که ابوجعفر خازن بر کتاب مجسطی نوشته، گفت‌وگو کرده است.

عمر خیام در کتاب جبر و مقابله‌ی خود نوشته است، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + a = cx^2$ را که ماهانی نتوانسته بود حل کند و آن را ممتنع انگاشته بود، ابوجعفر خازن به وسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد.

معادله‌ی بالا مربوط است به مسأله‌ی ارشمیدس؛ یعنی: تقسیم کره به دو جزء به وسیله‌ی یک صفحه به قسمی که حجم‌های آن‌ها به نسبت معینی باشد.

آثار ریاضی موجود وی

۱. تفسیر صدرالمقالة العاشرة من کتاب اقلیدس؛

۲. رسالة فی البرهان علی انه لایمکن ان یکون ضلعا عددین مربعین یکون مجموعهما مربعا فردین بل یکونان زوجین او احدهما زوج والاخر فرد؛ موضوع این رساله اثبات حکم زیر است:

«مجموع مربعات دو عدد که هر دو فرد باشند، نمی‌تواند مربع کامل باشد، بلکه باید هر دو عدد زوج و یا یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد تا مجموع مربعات آن‌ها مربع کامل شود».

۳. رسالة فی انشاء المثلثات القائمة الزوایا المنطقة الاضلاع؛ موضوع این رساله عبارت است از یافتن عددهای صحیحی که ریشه‌ی یکی از معادلات $x^2 + y^2 = z^2$ یا $x^2 + (y^2)^2 = z^2$ یا $x^2 + y^2 = (z^2)^2$ باشند و نیز یافتن عدد منطق (گویا) x به وجهی که $x^2 + k$ مربع یک عدد منطق باشد.

۴. فی استخراج خطین بین خطین متوالیة متناسبة من طریق الهندسة الثابته؛ موضوع این رساله ترسیم دو واسطه‌ی هندسی است بین دو پاره‌خط مفروض.

۵. اصلاح کتاب المخروطات؛ فقط قسمتی از این کتاب، درباره‌ی مسأله‌ی تثلیث زاویه، موجود است.

آثار ریاضی مفقود وی

۱. کتاب المسائل العددیة؛

۲. کتاب فی میل الاجزاء؛

۳. تفسیر المجسطی؛

۴. زیج الصفایح.

برگرفته از کتاب زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی / ابوالقاسم قربانی

بسم الله الرحمن الرحیم

۵۱

رشد برهان

دوره‌ی متوسطه

مجله‌ی ریاضی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی،اطلاع رسانی

www.roshdmag.org

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

◆ دوره‌ی شانزدهم ◆ شماره‌ی۱ ◆پاییز ۱۳۸۵ ◆شمارگان: ۱۳۰۰۰ نسخه

ISSN 1606 - 9099

رشد برهان متوسطه‌تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند.

■ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
■ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
■ طرح معماهای ریاضی
■ نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶ داخلی ۳۹۷ تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱

یادداشت سردبیر

ما و پیامبر اعظم(ص)

سال تحصیلی ۸۶ـ۸۵ را در شرایطی آغاز می‌کنیم که مزین به نام مبارک پیامبر اعظم(ص) است؛ پیامبر رحمت، رحمت پایان‌ناپذیر خداوند. پیامبری که بنابر کلام خدا، اسوه‌ی حسنه می‌باشد و ما همواره در تمامی مراحل زندگی می‌توانیم با تأسی به سیره و اخلاق ایشان حرکت خود را به سمت تعالی و آینده‌ای روشن، جهت بخشیم و پیرو دستورات این پیامبر عظیم‌الشأن باشیم.

پیامبر بزرگ اسلام(ص) برای تمامی اقشار جامعه الگوها و نمونه‌هایی بارز و قابل اجرا در جهت رشد و تکامل بر جای گذاشته‌اند که عمل به هریک از آن‌ها برای ما خیر دنیا و آخرت را به همراه خواهد داشت. ایشان در طول ۲۳ سال که رهبری امت اسلامی را به‌عهده داشتند، برای هر سن و سالی و هر صنفی از جامعه، دستوراتی باقی نهاده، و با سیره‌ی عملی و بیان شیوای خود چنان تأثیری بر جامعه‌ی زمان خود و نیز جوامع پس از خود گذاشته‌اند که بررسی این تأثیرات به تحقیق و مطالعات فراوان نیاز دارد.

اما آنچه برای ما و شما دانش‌آموزان عزیز بسیار اهمیت دارد، آن قسمت از سیره و فرمایشاتی است که پیامبر اعظم(ص) در ارتباط با علم و علم‌آموزی برای ما به ارمغان آورده و به جای گذاشته‌اند. احادیث و روایات نبوی در زمینه‌ی دانش و دانش‌آموزی بسیار فراوانند و هریک از آن‌ها، از دریچه‌ای و نگاهی مجزا از بقیه، به این موضوع مهم می‌نگرد. وقتی می‌خوانیم که پیامبر اعظم(ص) فرمودند: «علم را بیابید، اگرچه در چین باشد»، به اهمیت علم‌آموزی پی می‌بریم و این که برای یافتن آن هرقدر زحمت بکشیم، جا دارد و نیز به این که علم را از غیر مسلمان نیز می‌توان فراگرفت.

زمانی که به حدیث نبوی اطلبوا العلم من المهد الی اللحد «ز گهواره تا گور دانش بجوی» می‌رسیم، به این نکته‌ی مهم پی می‌بریم که فراگرفتن علم به سن و سال و خلاصه به زمان خاصی وابسته نیست، و وقتی این دو حدیث شریف را در کنار هم قرار دهیم، به این نکته‌ی مهم می‌رسیم که فراگرفتن علم، به زمان خاص و مکان خاصی وابسته نیست. از پیامبر عظیم‌الشأن اسلام(ص) احادیث فراوانی در زمینه‌ی وظیفه‌شناسی و احساس مسؤولیت در قبال جامعه وجود دارد که اگر شما بخواهید آن‌ها را الگو و سرمشق خود قرار دهید، در درجه‌ی اول می‌باید به وظایف خود آشنا باشید و در مرحله دوم به نحو احسن به آن‌ها عمل کنید تا سهم خود را نسبت به پیشرفت جامعه‌ی اسلامی که در آن زندگی می‌کنید، ادا کرده باشید.

شما دانش‌آموز هستید. وظایف دانش‌آموز چیست؟ و چگونه باید به این وظایف عمل کرد؟ پاسخ به سؤال اول بسیار ساده است. وظیفه‌ی دانش‌آموزان، دانش آموختن است (که البته اگر در این راه سختی هم بکشند، جا دارد). اما چگونگی عمل به این وظیفه و شرایط استفاده از این آموخته‌ها، حرف دیگری است.

شما دانش‌آموز عزیز، آیا به وظیفه‌ی اصلی خود که همانا دانش آموختن است، به نحو احسن عمل می‌کنید؟ آیا شرایط کافی از طرف جامعه و خانواده برای عمل به این وظیفه برای شما فراهم است؟ آیا تاکنون به روایات بسیاری با این مضمون که علم خالی از عمل، خالی از فایده است، برخورد کرده‌اید؟ به نظر شما، عمل به علمِ حاصل، اشاره به چه نوع عملی است؟ اگر نگاه دقیق‌تر و عمیق‌تری به روایات در زمینه‌ی علم و علم‌آموزی داشته باشیم، قطعاً به جواب‌های صحیح و مطمئنی برای سؤال‌های فوق دست خواهیم یافت و این نیز جزو حرکت‌های شماست که با مطالعه، بررسی و تحقیق روی چنین روایاتی، و از همه مهم‌تر به کار بستن و الگو قرار دادن سیره‌ی عملی پیامبر اعظم(ص)، به وظایف خود پی ببرید و شرایط عمل به این وظایف را دریابید.

والسلام ـ سردبیر

۴

یادهای آموزشی

تاریخ دانش، خود دانش است

پرویز شهریاری

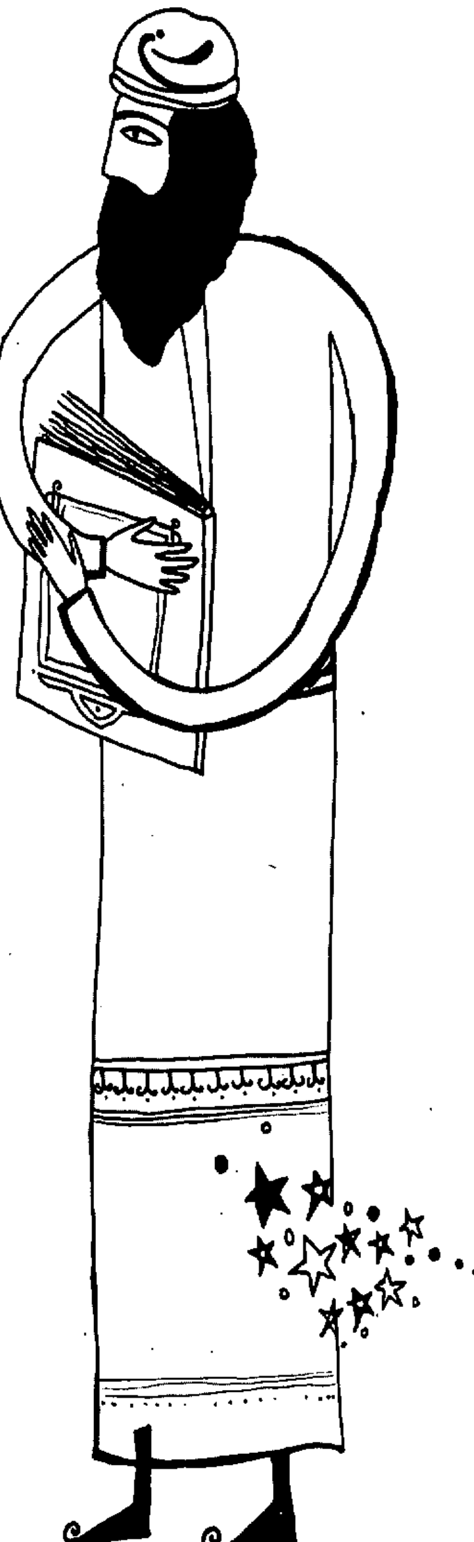
۱

«مسأله‌ی زیر توسط محمد ابوموسی‌الخوارزمی مطرح شده است. الخوارزمی، اولین نویسنده‌ی مشهور ریاضی در میان عرب‌ها بود. یکی از کتاب‌های او، اولین کتابی بود که واژه‌ی الجبر[1] در عنوانش آمده بود. بنابراین، واژه‌ی جبر کنونی از او گرفته شده است.»

این چند سطر «یادداشت تاریخی» را از صفحه‌ی ۱۸۸ کتاب درسی ریاضیات ۱ و ۲ که از سوی وزارت آموزش و پرورش، برای سال اول نظام جدید آموزش متوسطه در سال تحصیلی ۱۳۷۳ چاپ شده است، برداشته‌ایم.

باید گفت: نام او «محمدابوموسی الخوارزمی» نیست، بلکه محمد، فرزند موسی، مشهور به خوارزمی است. موسی پدر خوارزمی است، نه کنیه‌ی او یا فرزند او. شهرت به خوارزمی دارد، یعنی اهل خوارزم در «فرارود» (ماوراءالنهر) بوده است و «اَل» حرف تعریفی است که در زبان عربی به آن اضافه شده است. جالب است که در «یادداشت تاریخی»، برعکس روی جلد کتاب خوارزمی که به وسیله‌ی زنده‌یاد خدیوجم برگردانده و چاپ شده، نوشته شده است: «محمدبن موسی خوارزمی». اما جمله‌ی بعدی این «یادداشت تاریخی» جالب‌تر است. نویسندگان کتاب کشف کرده‌اند: «الخوارزمی، اولین نویسنده‌ی مشهور ریاضی درمیان عرب‌ها بود.»

دیده‌ایم و می‌بینیم که قبطیان شمال آفریقا و بربرهای شمال شرقی آفریقا را «عرب» می‌دانند و این به خاطر آن است که این قوم‌ها، هم زبان خود را فراموش کرده‌اند و به زبان «عربی» صحبت



می‌کنند، و هم با قوم عرب در آمیخته‌اند. ولی تا کنون نشنیده بودیم که مردم خوارزم و «فرارود»، آن هم در سده‌ی سوم هجری قمری (پایان سده‌ی هشتم میلادی) عرب بوده‌اند. بحث بر سر قوم و نژاد و ملت نیست، همه‌ی قوم‌ها، همه‌ی ملت‌ها و همه‌ی نژادها در ساختن تمدن و فرهنگ کنونی، کم یا زیاد، سهم داشته‌اند و هیچ ملت و نژادی را نمی‌توان برتر یا فروتر از دیگران دانست. این کار نظریه‌پردازان جهان استکباری است که برای توجیه غارتگری‌های خود، بیهوده تلاش می‌کنند، ملت‌های جهان را به دو گروه «متمدن» و «وحشی» تقسیم کنند. بحث ما بر سر حقیقت تاریخی و درستی یا نادرستی نوشته‌ای است برای دانش‌آموزان ایرانی تا آن‌ها به یاد بسپارند و بیاموزند.

اگر نویسندگان کتاب درسی می‌نوشتند که خوارزمی کتاب‌های خود و از جمله کتاب جبر خود را («جبر» و نه «الجبر») به زبان عربی و به احتمال زیاد در بغداد نوشته است، ایرادی وارد نبود؛ نه این که جمله را طوری تنظیم کنند که این تصور را به وجود آورد که خوارزمی «عرب» بوده است.

خوارزمی در پیش‌گفتار کتاب جبر خود، دانشمندان و پژوهشگران را به سه گونه بخش کرده است: «... یا مردی است که برای نخستین بار، دانشی ناشناخته را می‌شناسد... یا مردی است که نوشته‌های باقی‌مانده‌ی پیشینیان را شرح و تفسیر می‌کند... و یا مردی است که در برخی از کتاب‌ها به نادرستی و آشفتگی بر می‌خورد، پس نادرستی‌ها را اصلاح می‌کند و آشفتگی‌ها را سامان می‌بخشد...»

۲

شنبه ۷ مرداد ۱۳۷۴، شب‌هنگام، در برنامه‌ی «شب‌های تابستان» که از سیما پخش می‌شد، از دختر جوان با استعدادی که در المپیاد جهانی ریاضیات درخشیده و مدال زرین المپیاد را گرفته بود، پرسیدند: «آیا شما **جمشید کاشانی** را می‌شناسید؟» و او پاسخ داد: «چیزهایی درباره‌ی او شنیده‌ام.» مصاحبه کننده توضیح می‌دهد: «جمشید کاشانی عدد پی را کشف کرد.»

جمشید کاشانی کاشف عدد پی نبود، بلکه او توانست عدد پی را تا ۱۶ رقم بعد از ممیز محاسبه کند. حتی روش محاسبه‌ی او، در اساس، با روش ارشمیدس تفاوتی نداشت و تنها، کار او بسیار جلوتر از کار ارشمیدس رفت. در «تورات» هم به گونه‌ای، از عدد پی یاد شده است و آن را برابر ۳ دانسته‌اند.

درست است که جمشید کاشانی در محاسبه‌های خود بسیار دقیق بود و با هوشمندی کار می‌کرد، ولی افتخار جمشید کاشانی را بیش‌تر باید در جاهای دیگری جست و جو کرد. او برای پیدا کردن روشی که مقدار سینوس یک درجه را به ما می‌دهد، راه حل جبری معادله‌ی درجه‌ی سوم را پیدا کرد. او نخستین کسی است که عددنویسی دهدهی (اعشاری) را معمول کرد؛ چیزی که به نادرستی، در کتاب‌های تاریخ ریاضیات غالباً به نام **ستەوَن** (سیمون، ۱۶۲۰ - ۱۵۴۸) هلندی که ده‌ها سال بعد از مرگ کاشانی می‌زیسته، ثبت شده است.

۳

پنجشنبه ۱۲ مرداد ۱۳۷۴ در برنامه‌ی رادیوی سراسری در ساعتی بین ۴:۳۰ و ۵، در معرفی دانشمندان گذشته، کشف لگاریتم را به خوارزمی نسبت دادند.

لگاریتم را نه خوارزمی کشف کرد و نه هیچ ایرانی دیگری. لگاریتم را جان نپر (۱۶۱۷ ـ ۱۵۵۰)، ریاضیدان اسکاتلندی کشف کرد. ولی چرا این اشتباه پیش آمده است؟ خوارزمی کتابی داشته است به نام «حساب هندی». این کتاب بعدها به زبان لاتین برگردانده می‌شود. برگرداننده یا برگردانندگان کتاب، لاتینی شده‌ی اسم خوارزمی را روی کتاب می‌گذارند: «الخوارزمی» می‌شود «الگوریتموس». چون حرف «خ» نداشتند، به جای آن حرف «گ» می‌گذارند، حرف تعریف «اَل» را هم نگه دارند و «اوس» هم به آخر آن اضافه می‌کنند. تا مدت‌ها در اروپای غربی و جنوبی آن را به معنای «حساب» و «محاسبه» می‌گرفتند. این که به جای کتاب، نام مؤلف را روی کتاب بگذارند، بسیار معمول بود. همین چند سال پیش هم کتابی به فارسی برگردانده شد که مربوط به دانش طبیعت بود، ولی برگرداننده‌ی کتاب (آقای تدین)، نام کتاب را گذاشته بود: «تاریخ طبیعی یا پُلبر فارسی».

پُلبر نام نویسنده‌ی فرانسوی این کتاب بود و چون کتاب مدت درازی کتاب درسی بود، دانش‌آموزان آن را با نام «کتاب پُلبر» می‌شناختند.

به هر حال در اروپای غربی و جنوبی به تدریج متوجه شدند، الگوریتموس نام نویسنده‌ی کتاب است، نه موضوع کتاب. بعدها، برای حرمت گذاشتن به خوارزمی و پاسداری از کارهای او، که برای نخستین بار روش‌های کلی را برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم آورده بود، هر گونه روش کلی حل را در ریاضیات

«الگوریتم» نامیدند که هنوز هم در «منطق ریاضی» به کار می‌رود. الگوریتم (در واقع یعنی الخوارزمی)، به معنای روش یا دستور کلی برای حل گروه بزرگی از مسأله‌ها، مثل الگوریتم ضرب که مشخص کننده‌ی راه ضرب عددهای چند رقمی در یکدیگر است و با لگاریتم هیچ نسبتی ندارد.

۴

شنبه بیست و پنجم مهر ماه ۱۳۷۴، بین ساعت‌های ۱۹ و ۲۰، شبکه‌ی دوم سیما به مناسبت خورشید گرفتگی دوم آبان برنامه‌ای داشت که ضمن آن، جمله‌ای به این مضمون گفته شد: «آل بیرونی هم در نیشابور کسوفی را رصد کرد.»

با شگفتی، در کتاب‌های مرجع به جست و جوی «آل بیرونی» رفتم. گوینده‌ی سیما هیچ اشاره‌ای به تاریخ رصد نکرد یا شناسه‌ی دیگری از این اخترشناس، که نام یک خاندان یا یک قوم را برخود داشت، نیاورد.

«آل» واژه‌ای عربی و به معنای خاندان است (البته به جز آلِ افسانه‌ای که گمان می‌کنند، شب ششم تولد فرزند، به سراغ مادر او می‌رود تا جگرش را بدرد و بخورد). آل‌های زیادی در تاریخ داریم و خیلی از تاریخ‌نویسان ما هم، عادت دارند بگویند، آل طاهر (به جای طاهریان)، آل صفار (به جای صفاریان)، آل بویه (به جای دیلمیان)، آل اسحاق (به جای سلجوقیان) و ... تا بخواهید در کتاب‌های تاریخ به این «آل»ها بر می‌خوریم.

ولی این «آل بیرونی» با همه‌ی آن‌ها فرق دارد، چرا که یک خاندان یا یک دودمان نیست؛ یک نفر است، اخترشناس است و در نیشابور «خورشید گرفتگی» را رصد کرده است.

روشن است که نویسنده‌ی مطلب، «اَلْ بیرونی» نوشته و گوینده آن را «آل بیرونی» خوانده است. ولی نمی‌دانم چرا حرف تعریف «اَل» را که مربوط به نام‌های عربی است، بر سر واژه‌ی فارسی «بیرونی» باید گذاشت. **ابوریحان بیرونی** اهل خوارزم بوده است و در «بیرون» خوارزم به دنیا آمده است؛ از این جهت او را بیرونی و گاهی بیرونی خوارزمی می‌نامند. چرا باید بگوییم «اَلْ بیرونی»؟ مگر اگر کسی اهل بوشهر است، او را «اَل بوشهری» می‌نامیم؟ به جز این، من تردید دارم که ابوریحان در طول زندگی خود، به نیشابور رفته باشد تا چه رسد که در آن‌جا «خورشید گرفتگی» را هم رصد کرده باشد.

تا آن‌جا که می‌دانیم، ابوریحان بیرونی پیش از اسیر شدن به دست لشکریان **محمود غزنوی**، سه بار ماه‌گرفتگی (و نه خورشید گرفتگی) را برای اصلاح قانون‌هایی که تا آن زمان برای حرکت ماه می‌شناختند، رصد کرد و در یک مورد، ضمن مکاتبه با **ابوالوفای بوزجانی** (بوزجان نزدیک تربت جام) که در رصد خانه‌ی «بیت الحکمه»ی بغداد، به سرپرستی **سهل کوهی** کار می‌کرد، قرار گذاشت نتیجه‌ی رصدهای خود را درباره‌ی ماه گرفتگی، برای یکدیگر بفرستند تا بتوان به نتیجه‌های دقیق‌تری رسید. ابوالوفا دربغداد بود و ابوریحان در خوارزم؛ یک همکاری پژوهشی بسیار جالب و بی‌سابقه. کاش نویسنده‌ی مقاله‌ای که در سیما خوانده شد، روشن کرده بود که این آقای «آل بیرونی» چه زمانی در نیشابور بوده و کدام «خورشید گرفتگی» را رصد کرده است.

۵

حتی یک کتاب بزرگ هم، برای شناخت ابوریحان بیرونی کافی نیست. اوج فعالیت بیرونی در سال‌های نزدیک به سال هزار میلادی بود؛ زمانی که بر اساس پیش‌بینی کلیسا، سال هزار میلادی باید پایان جهان باشد. **استفان تسوایک** (۱۹۴۲ ـ ۱۸۸۷)، زندگی‌نامه‌نویس و داستان‌نویس اتریشی، در کتاب خود به نام «سرگذشت یک اشتباه تاریخی»، درباره‌ی نتیجه‌ی این پیش‌بینی می‌نویسد: «مردمی که عقل خود را از دست داده بودند، با لباس‌های پاره و شمع به دست، در دسته‌های عظیمی در هم می‌لولیدند. دهقانان زمین‌های خود را ترک می‌کردند. کالاها و محصول خود را می‌بخشیدند و به تاراج می‌دادند. آخر فردا [روز اول ژانویه‌ی سال ۱۰۰۱ میلادی] آن‌ها می‌آیند. سواران شیطان که بر اسب‌های سفید سوارند. روز رستاخیز بزرگ نزدیک می‌شود... دسته‌های هزاران نفری از راه می‌رسیدند، زانوها را خم می‌کردند، می‌خواستند آخرین شب زندگی خود را در کلیسا بگذرانند و در انتظار سیاهی ابدی باشند...»

ولی در این گوشه از جهان، بزرگ مردی فعالیت می‌کرد که می‌توان او را یکی از بزرگ‌ترین‌ها، در تمام روزگاران دانست. ابوریحان بیرونی، ریاضیدان، اخترشناس، فیلسوف، تاریخ‌نویس، پژوهشگر و بالاتر از همه، یک انسان بود. به ایران و ایرانی بودن خود افتخار می‌کرد و وقتی برای فرار از دست لشکریان محمود غزنوی، پیشنهاد رفتن به بغداد را به او دادند، نپذیرفت. در «آثارالباقیه»ی خود نوشت: «... اهل

خوارزم، شاخه‌ای از ایرانیانند و جوانه‌ای از درخت برومند آن ...»

همیشه کار می‌کرد. حتی وقتی محمود در لشکرکشی به هندوستان او را همراه خود برد، به جمع دانشمندان هندی پیوست، به آنان آموخت و خود از آنان یاد گرفت. همیشه بی‌وقفه کار می‌کرد.

ابوریحان بیرونی در زادگاه خود که «مامونیان» بر آن حکومت می‌کردند، کارهای علمی خود را آغاز کرد. چندی به دربار **شمس‌المعالی قابوس وشمگیر** رفت و «آثار الباقیه» را در آن‌جا نوشت. دوباره به خوارزم برگشت و در لشکرکشی محمود به خوارزم، همراه استاد خود، **ابونصر منصور**، فرزند علی، معروف به «ابن عراق»، ریاضیدان و اخترشناس ایرانی که در نیمه‌ی دوم سده‌ی چهارم و آغاز سده‌ی پنجم هجری در خوارزم می‌زیست، به دست محمود غزنوی دستگیر شد. استادش را کشتند و خود او را به غزنه (دربار محمود) بردند. در زمان مسعود توانست به زادگاه خود برود و در غزنه در سن ۷۷ سالگی مرد. با بزرگان زمان خود، همچون **پورسینا** و ابوالوفای بوزجانی مکاتبه داشت ... کارها و نوشته‌هایش چنان ژرف و جالبند که هنوز بعد از هزار سال در بسیاری موضوع‌ها، تازگی و درستی خود را از دست نداده‌اند.

آن وقت ما او را نمی‌شناسیم و به نام «آل بیرونی» از او یاد می‌کنیم.

گفته‌ام و باز هم می‌گویم، **تاریخ دانش، خوددانش است**. بدون درک حرکت اندیشه‌ی بشر در گذشته، نمی‌توان دانش امروز و مسیر آینده‌ی آن را شناخت. دست‌کم به دانشمندان گذشته‌ی سرزمین خود توجه بیش‌تری داشته باشیم. همه‌جا کوپرنیک و نظریه‌ی او را آغاز اخترشناسی نو می‌دانند، ولی من در این راه، ابوریحان بیرونی را پیشگام می‌دانم.

آیا می‌توان امیدوار بود، روزی برسد که دست کم، ترجمه‌ی پاکیزه‌ای از نوشته‌های دانشمندان خود به زبان فارسی، در اختیار داشته باشیم؟

۶

نویسنده‌ی محترم کتاب «هدایت طلاب به دانش استرلاب» (چاپ ۱۳۷۲، کتابی که از دیدگاه بررسی‌های تاریخی سودمند است)، آرزو می‌کند، به زمان ابوریحان بیرونی برگردیم و با صرف‌نظر کردن از رایانه و دوربین اخترشناسی و ما هواره، به استفاده از استرلاب رو آوریم. بخوانید:

«جای بسی تأسف است که در قرون اخیر، در نتیجه‌ی اختراعات مدرن و ساخت تلسکوپ‌های قوی و نیز بر اثر بی‌توجهی به هنرهای دستی و از میان رفتن علما و هنرمندان قدیمی، این دستگاه عظیم [یعنی استرلاب] به فراموشی سپرده شود و ده‌ها کتاب مربوط به این دانش و فن، آن هم به صورت خطی، در کنج کتابخانه‌ها، متروک و بلااستفاده بماند و استرلاب‌های مانده نیز، در پشت ویترین‌های موزه‌ها قرار گیرند و بینندگان نیز، بدون اطلاع از ماهیت و کارایی آن‌ها ... گاهی [آن‌ها را] با رمل مترادف و مشتبه گیرند. اخیراً به لطف باری تعالی، امر اخترشناسی و استخراج تقویم ... کار قدما را آسان‌تر از کار متجددان یافتم ... و در تعقیب آن مطلع شدم که دانش استرلاب باید احیا شود.»

۷

نه در دبیرستان‌ها و نه در دانشگاه‌های ما، روزنه‌ای برای آشنایی با «تاریخ دانش» وجود ندارد. در کتاب‌های تاریخ عمومی هم، درباره‌ی همه‌ی رویدادهای واقعی و غیر واقعی صحبت می‌شود، ولی درباره‌ی زیباترین تجلی اندیشه‌ی آدمی، یعنی دانش، سکوت شده است.

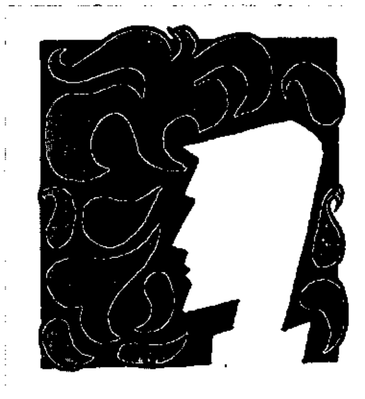
اجازه بدهید نمونه‌ای بیاورم تا ببینیم در جاهای دیگر با یک پژوهشگر تاریخی چگونه رفتار می‌کنند.

آنکتیل دوپه‌رون فرانسوی (۱۸۰۵-۱۷۳۱)، وقتی که جوان بود، با صفحه‌هایی از یک قطعه‌ی اوستا که در آکسفورد انگلستان نگهداری می‌شد، آشنا شد. نه خط آن را می‌شناخت و نه معنای آن را می‌فهمید و نه از سرچشمه‌ی آن آگاهی داشت. تصمیم گرفت به هند برود تا به یاری پارسیان در این باره آگاهی‌هایی به دست آورد، ولی چگونه؟ رفتن به هند در نیمه‌ی سده‌ی ۱۸ ساده نبود. مطلع شد که قرار است، گروهی سرباز فرانسوی به هند اعزام شود. داوطلب شد و وارد گروهان موزیک سربازان شد (سال ۱۷۵۴ میلادی). ولی دولت فرانسه از نیت او مطلع شد. بلافاصله او را از کار در گروهان معاف کرد و امکان‌های لازم را در اختیار او گذاشت تا بتواند به هند برود و با خیال آسوده پژوهش خود را آغاز کند. آنکتیل دوپه‌رون نخستین برگرداننده‌ی اوستا به زبان‌های اروپایی است.

اوستا و اوستاشناسی ربطی به فرهنگ گذشته و حال فرانسه نداشت. تنها می‌توانست پژوهشی باشد که با معیار انسانی و جهانی ارزشمند است. با وجود این، دولت فرانسه این شانس را به دوپه‌رون داد که نخستین پژوهشگر زبان اوستایی در اروپای غربی باشد.

زیرنویس ---

1. aljebr



برای دانش‌آموزان پایه‌ی اول

تفریح اندیشه

حسین نامی ساعی

مسأله‌ی فروشنده‌ی پسته‌ی مخلوط

فروشنده‌ای دو نوع پسته دارد. نوع اول کیلویی ۵۰۰۰ تومان و نوع دوم کیلویی ۳۵۰۰ تومان است. او می‌خواهد با مخلوط کردن این دو نوع پسته، ۷۰ کیلوگرم پسته با قیمت ۴۰۰۰ تومان به دست آورد. برای این منظور، از هر نوع پسته چند کیلوگرم لازم دارد؟

حل: فرض می‌کنیم x کیلوگرم پسته از نوع اول و y کیلوگرم پسته از نوع دوم انتخاب کرده باشد. x و y مجهول‌های مسأله هستند. با استفاده از جدول زیر می‌توان یک دستگاه دو معادله دومجهولی تشکیل داد:

نوع پسته‌ها / ارزش و وزن پسته‌ها	نوع اول	نوع دوم	مخلوط
ارزش هر کیلوگرم پسته	۵۰۰۰ تومان	۳۵۰۰ تومان	۴۰۰۰ تومان
وزن	x کیلوگرم	y کیلوگرم	۷۰ کیلوگرم

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 5000x + 3500y = 4000 \times 70 \end{cases}$$

با حل دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -3500x - 3500y = -3500 \times 70 \\ 5000x + 3500y = 4000 \times 70 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1500x = 500 \times 70$$

$$\Rightarrow x = \frac{500 \times 70}{1500} = \frac{70}{3} \simeq 23/33 \text{ کیلوگرم}$$

$$x + y = 70 \Rightarrow 23/33 + y = 7$$

$$y \simeq 46/67 \text{ کیلوگرم}$$

پس باید ۲۳/۳۳ کیلوگرم پسته‌ی نوع اول و ۴۶/۶۷ کیلوگرم پسته‌ی نوع دوم را با هم مخلوط کند تا ۷۰ کیلوگرم پسته‌ی ۴۰۰۰ تومانی به دست آورد.

مطالعه تاریخ ریاضیات و نقش آن در آموزش ریاضیات

حمیدرضا امیری

مقدمه

انگیزه‌ی این که در کتاب درسی ریاضی دبیرستان یک کشور، شرح‌حال بزرگان ریاضی همچون، **خوارزمی**، **خیام**، **کاشانی** و **بیرونی** بیان می‌شود، چیست؟

بیانیه‌ی ریودوژانیرو در ششم ماه مه سال ۱۹۹۲ و اعلام سال ۲۰۰۰ به عنوان سال جهانی ریاضیات توسط **پروفسور ژاک لویی لیون**، رئیس اتحادیه‌ی بین‌المللی ریاضی (IMV) در مؤسسه‌ی ریاضیات محض و کاربردی برزیل، شاید پاسخی به این سؤال باشد. در این بیانیه، علاوه بر اعلام سال جهانی ریاضیات، به نظر می‌رسد علم ریاضی و دانشمندان گذشته و حال این شاخه از دانش بشری را متعلق به تمام جهان می‌داند.

ریاضیات به عنوان یک رشته‌ی مادر، دارای اهمیت فراوان است و بالطبع تاریخ آن و اثری که شرح حال این دانش بشری بر سال‌ها می‌گذارد نیز اهمیت دارد. تأثیرپذیری و هدایت نسل هوشمند دنیا، بر گذشته بنا نهاده شده است، زیرا تاریخ آینده براساس گذشته رقم می‌خورد و تجربه‌ی گذشته را به همراه دارد. این تأثیرپذیری دارای جنبه‌های مثبت و شگرفی است که بذر آن در نوجوانی کاشته می‌شود تا به عنوان کاربرد، انتقال و پیشبرد مرزهای دانش ریاضی آینده، به آن بنگرند و در آن تأمل کنند. کاشت این بذر به عهده‌ی شما دانش‌پژوهان و رسولان علم ریاضی است و با دست توانا و نگرش عمیق و فهیمانه‌ی شما پرورش می‌یابد.

نوجوانان امروز، دانشمندان آینده‌ی ریاضی خواهند بود که با توانمندی خود، ابزار قابل فهم بودن و به کار بستن بیش‌تر این علم را برای اغلب مردم جهان فراهم و عرضه خواهند کرد. تاریخ ریاضی از آن جهت نیز اهمیت دارد که به وسیله‌ی آن می‌توانیم، زمان گذشته‌ی علم ریاضی را دریابیم و درک کنیم که آغاز آن از کجا و چگونه بوده، توسعه، اوج و انحطاط آن کدام سرزمین، در چه زمانی و به‌وسیله‌ی چه کسانی بوده است و می‌توانیم با تمام دانشمندان گذشته، هم‌زمان و هم‌سخن شده و با کوتاهی عمر، از آزموده‌ها و یافته‌های نسل‌های متعدد بهره‌مند شویم. به طور کلی در یک جمله می‌توان گفت، ریاضیات عمدتاً مطالعه‌ی اندیشه‌هاست و فهم صحیح اندیشه‌ها بدون تحلیل سرچشمه‌های آن‌ها مقدور نیست. به طور کلی، انگیزه‌های یاددهی و یادگیری تاریخ ریاضیات را می‌توان در راستای شش محور اصلی جست‌وجو کرد:

۱. خودباوری دانش‌آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان.

۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات. (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)

۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل.

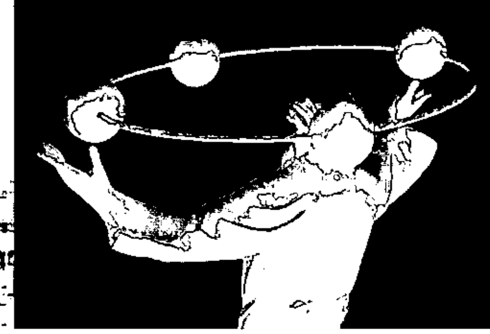
۴. اعتماد به نفس و در نظر داشتن این که ریاضیدانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند.

۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی، از نوجوانی به بعد. سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد.

۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی آن‌ها.







۱. خودباوری دانش‌آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان

۱ـ۱. جمشید غیاث‌الدین کاشانی در کتاب «مفتاح‌الحساب»، قاعده‌ای کلی برای استخراج ریشه‌های nام ارائه کرده که همان روش «روفینی‌ـ‌هورنر» است که در سده‌ی ۱۹ میلادی در اروپا ارائه شد.

۱ـ۲. شرف‌الدین تاج‌الزمان حسین بن حسن سمرقندی، ریاضیدان مسلمان ایرانی قرن سیزدهم میلادی که تاکنون در تاریخ ریاضیات کشور ما ناشناخته مانده است، در اثری با عنوان «رساله فی طریق المسایل العددیه»، روش‌های بکر و بدیعی به کار برده است که در ارتباط با سایر متون تاریخی و هم‌عصر او در اروپا، می‌توان به میزان نبوغ او پی برد.

۱ـ۳. چهارضلعی خیام که زوایای مجاور قاعده‌ی ۹۰ درجه و اضلاع قائم آن برابرند، به «چهارضلعی ساکی‌بری» معروف شده است. خیام این چهارضلعی را به خاطر اثبات اصل توازی اقلیدس، حداقل پانصد سال قبل از ساکی به‌کار برده است. به دنبال وی، ۱۵۰ سال بعد خواجه نصیر طوسی نیز همان چهارضلعی را برای اثبات اصل توازی به کار می‌برد. پنج قرن بعد که کارهای ریاضیدانان درباره‌ی اصل توازی توسط جان والیس و دیگران به دست دانشمندان اروپایی می‌رسد، ساکی‌بری، لامبرت و لباچفسکی کارهای دانشمندان مسلمان را دنبال و همین چهارضلعی را بررسی می‌کنند و زمینه‌های تولد هندسه‌های نااقلیدسی فراهم می‌شود.

درواقع، دانشمندان مسلمان از قبیل: ابن هیثم، ثابت بن قره، خیام و خواجه نصیر، پیش‌قراولان کشف هندسه‌های نااقلیدسی محسوب می‌شوند.

۱ـ۴. تاریخچه‌ی معادلات دیفرانسیل که مقادیر «بی‌نهایت کوچک» در آن نقش مهمی دارند، به زمانی برمی‌گردد که روش‌های نقشه‌برداری برای ساختن آبراه‌ها و آب‌بندها و توزیع زمین نیاز بودند. در گذشته تصور می‌رفت، در این حرکت، بابلیان، یونانیان، مصریان و چینیان پیشگام بودند و اروپاییان این بحث را تا قرن نوزدهم پرورانیده‌اند، ولی خاورشناسان اروپایی با توجه به پژوهش‌هایی گسترده درباره‌ی آثار دانشمندان مسلمان، به‌ویژه کار روی آثار ابن هیثم، با ابراز شگفتی، توانایی‌های ریاضیدانان اسلامی را در این زمینه والا شمرده‌اند.

۱ـ۵. مدل نجومی معروف خواجه نصیرالدین یا «جفت طوسی» نقش به‌سزایی در تاریخ نجوم داشته که منشأ مطالعات بسیاری در تجزیه و تحلیل این مدل بوده است. جفت طوسی اصطلاحی است که تاریخ‌نگاران جدید وضع کرده‌اند. این مدل از دو دایره‌ی مماس بر یکدیگر تشکیل یافته است، به گونه‌ای که دایره‌ی کوچک‌تر با شعاعی نصف دایره‌ی بزرگ‌تر و سرعتی دو برابر آن، مماس و درون آن حرکت می‌کند. درنتیجه، هر نقطه از دایره‌ی کوچک‌تر، در امتداد قطری از دایره‌ی بزرگ‌تر نوسان می‌کند و حرکت دورانی به حرکت خطی تبدیل می‌شود. در دهه‌های گذشته، پژوهش‌های قابل توجهی پیرامون «جفت طوسی» در غرب صورت گرفته است و در برخی از آن‌ها مسأله به شکل بسیار تخصصی و از دیدی کاملاً ریاضی بررسی شده است.

۱ـ۶. ثابت‌بن قره در قرن سوم دستوری برای یافتن دسته‌ای از عددهای متحاب بیان کرده است (دو عدد طبیعی در صورتی متحاب نامیده می‌شوند که مجموع شمارنده‌های مثبت کوچک‌تر از هر عدد، مساوی با دیگری باشد). کمال‌الدین فارسی در رساله‌ای که هدف آن اثبات درستی دستور ثابت‌بن قره بوده است، حالت کلی قضیه، یعنی حالتی که b مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد را در نظر گرفته و در این حالت نیز دستور محاسبه‌ای اجزای حاصل‌ضرب ab را بیان و اثبات کرده است.

کمال‌الدین فارسی نخستین کسی بود که در قرن هفتم و اوایل قرن هشتم ق، دستور محاسبه‌ی اجزای حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرد.



$(a, b) = 1 \Rightarrow S(ab) = S(a)b + S(b) \times a + S(a) \times S(b)$

(S(a) مجموع اجزای عدد a است .)

دکارت در حدود بیش از سیصد سال بعد از درگذشت کمال‌الدین ، همین دستور را در اروپا به دست آورد . با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی حالتی کلی که a و b نسبت به هم اول نباشند را نیز در نظر گرفته و آن را ثابت کرده بود . همچنین کمال‌الدین فارسی پس از اثبات درستی دستور ثابت‌بن قره ، آن را به کار بسته و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست آورد که متحاب بودن این دو عدد در اروپا ، نخستین‌بار توسط **فرما** ، ریاضیدان فرانسوی ، در سال ۱۶۳۶ یعنی ۳۱۸ سال پس از مرگ کمال‌الدین فارسی به دست آمد .

۱ـ۷ . غیاث‌الدین کاشانی معادله‌ی درجه سوم را به طور کامل حل کرد و سال‌ها بعد ، کاردان روش حل آن را ارائه کرد که هم‌اکنون نیز حل معادله‌ی درجه سوم (حتی در کتاب‌های ریاضی نظام قدیم) به نام فرمول کاردان ثبت شده است .

۱ـ۸ . ریاضیدانانی چون **خوارزمی** ، **ابوریحان** ، **ابوالوفای بوزجانی** ، **کوشیار گیلی** و **ابومحمد خجندی** ، باعث رشد و تکامل علم مثلثات شدند . خوارزمی جدول سینوس‌ها را درست کرد و از کلمه‌ی جیب به معنی گریبان که معادل آن سینوس می‌شود ، استفاده کرد .

۱ـ۹ . **ابونصر فارابی** با نوشتن کتاب «موسیقی الکبیر» ، در سه جمله تمامی موسیقی زمان خودش را با نت که البته به صورت عدد بود ، نوشت . از جمله ابتکارات علمی فارابی که قرن‌ها بعد از وی اروپاییان به آن دست یافتند ، تقسیم‌بندی علوم بود و او اولین کسی است که ریاضیات و موسیقی را در یک دسته قرار داد .

۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)

۲ـ۱ . افرادی چون خیام با پیمودن صدها کیلومتر مسافت ، آن هم با پای پیاده و یا با استفاده از اسب ، برای دست یافتن به یک کتاب و استفاده از آن ، و با تحمل زحمات فراوان توانستند ، به علوم زمان خود دست پیدا کنند و در زمان خود و حتی بعد از آن تأثیرگذار باشند (به دنبال لقمه‌ی آماده و حتی جویده نبودند) .

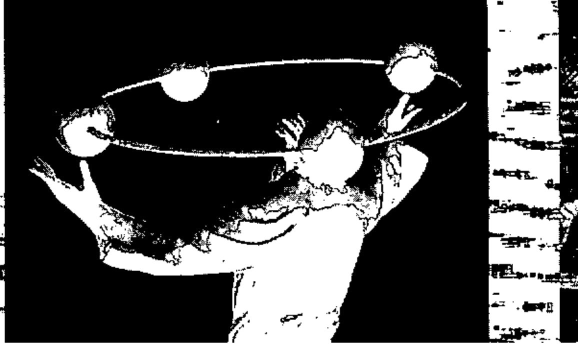
۲ـ۲ . ارج نهادن به علم ، عالم و متعلم ، از دیگر دلایل به ظهور رسیدن افرادی چون **غیاث‌الدین کاشانی** ، ابوریحان ، خیام و خوارزمی بوده است . بها دادن به علم و عالم و فراهم کردن بستر مناسب برای رشد فرهیختگان ، از عوامل مؤثر در پیدایش افرادی چون خیام بوده و هست ؛ چیزی که دین اسلام روی آن تأکید فراوان داشته و دارد .

۲ـ۳ . شاید هم‌اکنون یکی از دلایل بسیار آشکار وجود نداشتن دانشمندان ریاضی در ایران که در حد جهانی تأثیرگذار باشند ، وجود همین ایرانیان در خارج از ایران و به عنوان تبعه‌ی کشورهایی چون آمریکا ، کانادا و آلمان است ؛ همان که امروزه به فرار مغزها مشهور است . چه بسا ایرانیانی که باعث پیدایش شاخه‌ای جدید در ریاضیات شده و حتی آن را رشد داده باشند ، ولی به عنوان یک شهروند آمریکایی از آن‌ها یاد می‌شود .

۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل

۳ـ۱ . مشکل می‌توان گفت که فقط مطالعه و مشاهده‌ی ظاهری تاریخ ریاضی ، مورد علاقه‌ی ریاضیدانان باشد . آن‌ها معمولاً به این افتخار می‌کنند که علم ریاضی بیش از هر علم دیگری دقیق و کامل است و همواره ریاضیات قدیم و دستاوردهای گذشته‌ی ریاضی برای ریاضیات جدید و حال سودمند بوده و هست . شیمیدانان ممکن است گاه با لبخندی معنی‌دار به نتایج و دستاوردهای به اصطلاح کودکانه‌ی کیمیاگران و شیمیدانان قدیم بنگرند ، ولی ریاضیدانان همیشه با تعجب و حیرت به عواید و یافته‌های یونانیان در هندسه و ایرانیان و هندی‌ها در محاسبات می‌نگرند .

۳ـ۲ . غیاث‌الدین جمشید کاشانی در مسأله‌ی محیطیه‌ی خود ، گرچه ذکری از مفهوم حد نمی‌کند ، اما این مفهوم را با تسلط تمام و در شکل دقیق آن ، برای محاسبه‌ی عدد π به کار





می‌گیرد و به نوعی بحث حد و مفهوم آن را از گذشته به حال پیوند می‌دهد. او در جمله‌ی بسیار زیبایی، با زبانی ریاضی «به نام خدا» را به این شکل بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازه‌ی نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.» در این جمله به نوعی اذعان می‌دارد که انسان از فهم و محاسبه‌ی دقیق عدد π ناتوان است.

۴. اعتماد به نفس و توجه به این مطلب که ریاضیدانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند

۱ـ۴. **پی‌یر دوفرما** می‌پنداشت، اعدادی به صورت $۲^n + ۱$ که n به صورت توانی از ۲ باشد یا $(۲^{۲^n} + ۱)$، همگی اول هستند. ولی اویلر در سال ۱۷۳۲ ثابت کرد که $۲^{۳۲} + ۱$ اول نیست.

$$۲^{۳۲} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

که هر دو عدد سمت راست اول هستند.

۲ـ۴. **مرسن** در سال ۱۶۴۴ چنین حکم کرد که عدد $M_p = ۲^p - ۱$ به ازای اعداد اول ۲۵۷، ۱۲۷، ۶۷، ۳۱، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۷، ۵، ۳، ۲ اول است و به ازای سایر اعداد اول چون p که از ۲۵۷ کوچکترند، اول نیست. این حکم اشکال دارد، زیرا $M_{۶۷}$ مرکب و $M_{۶۱}$ و $M_{۸۹}$ و $M_{۱۰۷}$ اول هستند.

۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی، از نوجوانی به بعد. سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد

۱ـ۵. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در سن ۴۲ سالگی از دنیا رفته است. بنابراین یافته‌های باارزش وی در دوران جوانی او صورت گرفته و درواقع وی یک ریاضیدان جوان بوده است.

۲ـ۵. ابراهیم بن سنان که نوه‌ی ثابت بن قره بوده است، در قرن سوم هجری می‌زیسته و مورخان غربی درباره‌ی وی چنین می‌نویسند: «گرچه روزگار ابراهیم‌بن سنان بر اثر یک غده‌ی کبدی، در سال ۳۲۵ هجری قمری در ۳۷ سالگی به سر آمد، ولی آثار باقی‌مانده از او، شهرتش را به عنوان شخصیتی مهم در تاریخ ریاضیات ثبت می‌کند». روش او در یافتن مساحت یک قطعه‌ی سهموی، ساده‌ترین روشی است که از دوره‌ی پیش از رنسانس به ما رسیده است.

۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی‌های آن‌ها

باید به این نکته اشاره کنیم که اغلب مورخان دانش، حتی با انصاف‌ترین آن‌ها نتوانسته‌اند مقام ریاضیات ایرانی را، در مجموعه‌ی تاریخ ریاضیات، به‌درستی و روشنی ارزیابی کنند. اغلب آن‌ها، ریاضیدانان ایرانی را تا حد مترجمان ساده‌ی نوشته‌های یونانی پائین آورده‌اند که این ترجمه‌ها هم، به موقع خود به صاحبان اصلی، یعنی اروپاییان برگشت داده شده است. به این ترتیب، مورخان ریاضی، آغاز ریاضیات را در اروپا (یونان) می‌دانند. بعد از سقوط مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، دوران رکودی به وجود می‌آید که تا سده‌ی پانزدهم میلادی ادامه دارد و سپس با دسترسی اروپاییان به نوشته‌های یونانی (از راه ترجمه‌ی عربی آن‌ها) دوباره دنبال کار را می‌گیرند و آن را به امروز می‌رسانند. درنتیجه‌ی این نوع برخورد، همه‌ی ملت‌های جهان، به جز ساکنان اروپا، در تمامی طول تاریخ در خواب غفلت بوده‌اند و هرچه امروز دارند، نتیجه‌ی تلاش فکری و عملی مردم اروپاست. این درحالی است که ریاضیدانان ایرانی، از سده‌ی هشتم تا سده‌ی پانزدهم میلادی، پرچم‌دار ریاضیات جهان بوده‌اند؛ به نحوی که این دوره، یک دوره‌ی کامل از تاریخ ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

منابع:

۱. مقاله‌های ارائه شده در کنفرانس تاریخ ریاضیات/ دانشگاه هرمزگان

۲. زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی/ ابوالقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی

۳. تاریخ ریاضیات/ ترجمه‌ی دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل/ مرکز نشر دانشگاهی

۱ برای دانش‌آموزان پایه‌ی دوم

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری

محمدهاشم رستمی

الف) بحث در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم پارامتری

اگر مبین معادله‌ی درجه دوم یک مجهولی $ax^2 + bx + c = 0$ را Δ بنامیم، یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ باشد، می‌دانیم که:

۱. اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

۲. اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله ریشه‌ی مضاعف دارد.

۳. اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

بنابراین برای بحث در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم یک مجهولی پارامتری، کافی است، $\Delta = b^2 - 4ac$ (یا $\Delta' = b'^2 - ac$) را تعیین علامت کنیم. برای این کار Δ را برحسب پارامتر موجود در معادله (مثلاً بر حسب m) به دست می‌آوریم و علامت آن را در یک جدول که بر حسب مقدارهای صعودی پارامتر تشکیل می‌دهیم، مشخص می‌سازیم. آن‌گاه با توجه به علامت به‌دست‌آمده برای Δ، وجود ریشه‌های معادله را در هریک از بازه‌های جدول بررسی می‌کنیم.

به این مثال‌ها توجه کنید:

مثال۱. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $(2m-1)x^2 - mx + m - 3 = 0$ به‌ازای مقدارهای مختلف m بحث کنید.

حل:

Δ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = 2m-1,\ \ b = -m,\ \ c = m-3,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4(2m-1)(m-3)$$

$$= m^2 - 4(2m^2 - 7m + 3)$$

$$\Rightarrow \Delta = m^2 - 8m^2 + 28m - 12 \Rightarrow \Delta = -7m^2 + 28m - 12$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow -7m^2 + 28m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-28 \pm \sqrt{784 - 336}}{-14}$$

$$\Rightarrow m = \frac{-28 \pm \sqrt{448}}{-14} = \frac{-28 \pm 8\sqrt{7}}{-14} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{7}}{-7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-14 + 4\sqrt{7}}{-7} = \frac{14 - 4\sqrt{7}}{7} \\ m = \frac{-14 - 4\sqrt{7}}{-7} = \frac{14 + 4\sqrt{7}}{7} \end{cases}$$

m	$-\infty$	$\frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷}$		$\frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$	$+\infty$
Δ	−	۰	+	۰	−
	ریشه ندارد	معادله ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد	معادله ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد

بنابراین وقتی $\frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷} < m < \frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$ باشد، معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد. به ازای $m = \frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷}$ و $m = \frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$ معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد و هنگامی که $m < \frac{۱۴-۴\sqrt{۷}}{۷}$ یا $m > \frac{۱۴+۴\sqrt{۷}}{۷}$ باشد، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر داده شده است. به ازای مقدارهای مختلف پارامتر m، در وجود ریشه‌های این معادله بحث کنید.

$$(m-۲)x^۲ - ۲(m+۳)x + m + ۴ = ۰$$

حل:

Δ یا Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = m-۲,\ \ b = -۲(m+۳) \Rightarrow b' = \frac{b}{۲} = -(m+۳),$$

$$c = m+۴,$$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = (m+۳)^۲ - (m-۲)(m+۴)$$
$$= m^۲ + ۹ + ۶m - m^۲ - ۲m + ۸$$

$$\Rightarrow \Delta' = ۴m + ۱۷,\ \ \Delta' = ۰ \Rightarrow ۴m + ۱۷ = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۱۷}{۴}$$

m	$-\infty$	-۱	$+\infty$
Δ'	−	۰	+
R	ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد

به‌طوری که دیده می‌شود، به ازای $m < -\frac{۱۷}{۴}$ معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست، به ازای $m = -\frac{۱۷}{۴}$ معادله یک



ریشه‌ی مضاعف دارد و به ازای $m > -\frac{17}{4}$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

مثال ۳. به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m، در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر بحث کنید.

$$mx^2 + 2(m-1)x + 2 = 0$$

حل:

Δ یا Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$a = m,\ \ b = 2(m-1) \Rightarrow b' = (m-1),\ \ c = 2,$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (m-1)^2 - m \times 2 = m^2 - 2m + 1 - 2m$$

$$= m^2 + 1,$$

$$\Delta' = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0$$ ریشه ندارد

m	$-\infty$		$+\infty$
Δ'	+	+	+
R			

معادله همواره دو ریشه‌ی متمایز دارد

به طوری که دیده می‌شود، در معادله‌ی داده شده، $\Delta' = m^2 + 1$ همواره به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m مثبت است. پس این معادله به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m دو ریشه‌ی متمایز دارد.

مثال ۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر داده شده است. به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m، در وجود ریشه‌های این معادله بحث کنید.

$$2x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 1 = 0$$

حل:

Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم، داریم:

$$a = 2,\ \ b = -2(m-1) \Rightarrow b' = -(m-1),\ \ c = m^2 + 1,$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 2(m^2+1)$$

$$= m^2 - 2m + 1 - 2m^2 - 2$$

$$\Rightarrow \Delta' = -m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2,\ \ \Delta' = 0 \Rightarrow (m+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

m	$-\infty$	-1	$+\infty$
Δ'	−	0	+
R	ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد

به طوری که دیده می‌شود، این معادله فقط به ازای $m = -1$ ریشه‌ی مضاعف دارد و به ازای هیچ مقدار دیگری از m ریشه ندارد.

مثال ۵. در وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m بحث کنید.

$$(m^2 + 2)x^2 + 2mx + 3 = 0$$

حل:

Δ' را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$a = m^2 + 2,\ \ b = 2m \Rightarrow b' = m,\ \ c = 3,\ \ \Delta' = b'^2 - ac$$

$$\Rightarrow \Delta' = m^2 - (m^2 + 2) \times 3 \Rightarrow \Delta' = -2m^2 - 6,\ \ \Delta' = 0$$

$$\Rightarrow -2m^2 - 6 = 0 \Rightarrow m^2 = -3 < 0$$ ریشه ندارد

m	$-\infty$		$+\infty$
Δ'	−	−	−
R			

ریشه ندارد

به طوری که دیده می‌شود، به ازای هر مقداری از پارامتر m، مبین (Δ') معادله‌ی داده شده منفی است، پس به ازای هیچ مقداری از پارامتر m، این معادله ریشه ندارد.

نکته: بدون تشکیل جدول نیز مشخص می‌شود که در این معادله، Δ' همواره منفی است، زیرا سه جمله‌ای درجه دوم $\Delta' = -2m^2 - 6$ ریشه ندارد، پس علامت آن همواره موافق علامت ضریب m^2 (یعنی -2) است یعنی همواره $\Delta' < 0$ است.

مثال ۶. پارامتر a را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $3x^2 + 6x + a = 0$

الف) همیشه دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد؛

ب) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد؛

پ) ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

حل:

الف) باید $\Delta > 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(3)(a) > 0$$

$$\Rightarrow 36 - 12a > 0 \Rightarrow a < 3$$

ب) باید $\Delta = 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = 36 - 12a = 0 \Rightarrow 36 = 12a \Rightarrow a = 3$$

پ) باید $\Delta < 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = 36 - 12a < 0 \Rightarrow 36 < 12a \Rightarrow a > 3$$

مثال ۷. در معادله‌ی $3ax^2 + (3a+2)x - 2 = 0$ برای چه مقدارهایی از پارامتر a معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

حل:

شرط آن که معادله‌ی بالا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، آن است که $\Delta = 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (3a+2)^2 - 4(3a)(-2) = 0 \Rightarrow$$

$$9a^2 + 4 + 12a + 24a = 0 \Rightarrow 9a^2 + 36a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 36}}{9} = \frac{-18 \pm \sqrt{288}}{9} = \frac{-18 \pm 12\sqrt{2}}{9}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow a = \frac{-6 + 4\sqrt{2}}{3},\ \ a = \frac{-6 - 4\sqrt{2}}{3}$$

آزمون‌ها

۱. به ازای چه مقدارهایی از m، معادله‌ی $x^2 + mx + m = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

۱) ۲ و ۰   ۲) ۳ و ۰   ۳) ۴ و ۰   ۴) ۵ و ۰

حل:

داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{m = 0},\ \ m - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

پس گزینه‌ی (۳) درست است.

۲. برای آن که معادله‌ی $mx^2 + (2m-1)x + m + 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، حدود پارامتر m کدام است؟

۱) $m < \frac{1}{16}$ ۲) $m > \frac{1}{16}$

۳) $m = \frac{1}{16}$ ۴) $m \le \frac{1}{16}$

حل: باید $\Delta > 0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (2m-1)^2 - 4m(m+3) > 0 \Rightarrow$$

$$4m^2 + 1 - 4m - 4m^2 - 12m > 0 \Rightarrow -16m + 1 > 0 \Rightarrow$$

$$-16m > -1 \Rightarrow m < \frac{1}{16}$$

پس گزینه‌ی (۱) درست است.

۳. حدود پارامتر a برای آن که معادله‌ی زیر ریشه نداشته باشد، کدام است؟

$$x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

۱) $-2 < a < 1$ ۲) $a > -2$

۳) $-1 < a < 2$ ۴) $a < 1$

حل:

باید $\Delta < 0$ باشد. داریم:

$$a = 1,\ \ b = -2a,\ \ c = a + 2,\ \ \Delta' = b'^2 - ac < 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - (a+2) < 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 < 0$$

اکنون باید $a^2 - a - 2$ را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 2,\ \ a = -1$$

m	$-\infty$	۱-		۳	$+\infty$
Δ	+	۰	—	۰	+
R	دو ریشه‌ی متمایز دارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد

به طوری که دیده می‌شود، وقتی $-1 < a < 2$ باشد، $\Delta' < 0$ است و معادله‌ی درجه دوم داده شده ریشه ندارد. پس گزینه‌ی ۳ درست است.

۴. در کدام بازه‌ی متعلق به m، معادله‌ی زیر دارای ریشه است؟

$$x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

۱) $m \le -1,\ m \ge 2$ ۲) $[-1,\ 3[$

۳) $m < -1,\ m > 2$ ۴) $[-1, 3]$

حل:

باید $\Delta \ge 0$ باشد، داریم:

$$a = 1,\ \ b = m - 1,\ \ c = 1,\ \ \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(1)(1) \ge 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 \ge 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 3,\ \ m = -1$$

m	$-\infty$	۱-		۳	$+\infty$
Δ́	+	۰	—	۰	+
R	دو ریشه‌ی متمایز دارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	ریشه ندارد	ریشه‌ی مضاعف دارد	دو ریشه‌ی متمایز دارد

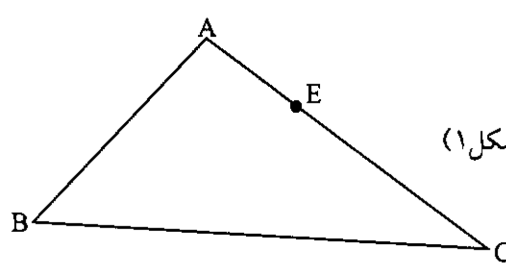
به طوری که جدول نشان می‌دهد، وقتی $m \ge 3$ یا $m \le -1$ باشد، معادله ریشه دارد، پس گزینه‌ی (۱) درست است.



محمدعلی شیخان

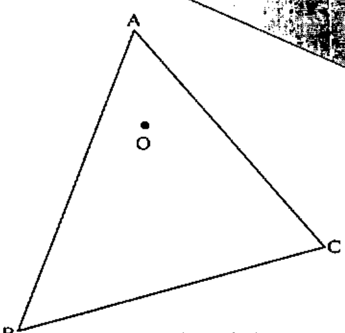
هندسی فکر کنیم

۱ . دو برادر از پدرشان مزرعه‌ای مثلثی شکل به ارث برده‌اند که چاه آبی روی یکی از اضلاع آن وجود دارد . زمین را به دو قسمت معادل چنان تقسیم کنید که خط تقسیم از مرکز دهانه‌ی چاه بگذرد . به عبارت دیگر ، چاه بین دو قطعه زمین مشترک باشد (شکل ۱) .



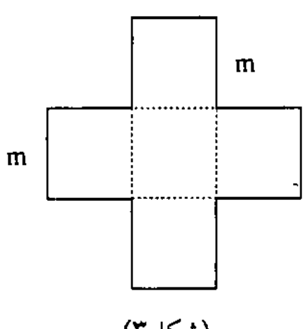
(شکل۱)

۲ . مسأله‌ی فوق را برای حالتی که چاه در داخل مثلث قرار داشته باشد ، به صورت زیر حل کنید : مثلث را بین سه برادر به قسمت‌های معادل چنان تقسیم کنید که چاه بینشان مشترک باشد (شکل ۲) .

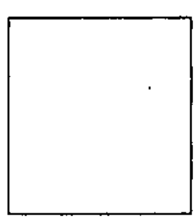


(شکل۲)

۳ . با اجتماعی از پنج مربع متساوی ، شکل ۳ تشکیل شده است . به کمک دو برش با قیچی ، آن را چنان تقسیم کنید که با اجزای به‌دست آمده بتوان ، یک مربع معادل آن ساخت (شکل ۴) . ضمناً طول ضلع مربع را برحسب m (اندازه‌ی ضلع مربع) محاسبه کنید .



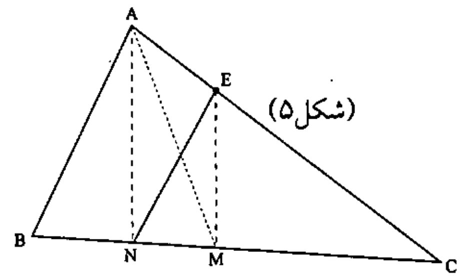
(شکل۳)


(شکل۴)

در مورد حل مسأله‌ها ، به رأس‌های کلی راه‌حل اشاره شده است ، تفصیل آن را خود بررسی کنید . ضمناً چون فرض بر آن گذاشته شده که عملاً کار تقسیم میسر است ، از بحث صرف‌نظر شد .

حل ۱:

AM میانه‌ی نظیر ضلع BC را رسم کنید. خط AN را موازی خط ME بکشید (N روی BC است). خط NE مرز مشترک دو زمین مطلوب است (شکل ۵).



(شکل۵)

حل ۲:

کافی است ابتدا مثلث مفروض ABC را به وسیله‌ی خطی که از O می‌گذرد (در (شکل۶) خط EF) طوری تقسیم کنیم که مساحت مثلث AEF مساوی نصف مساحت چهارضلعی BEFC باشد. آن‌گاه چهارضلعی اخیر را به وسیله‌ی خط OD به دو شکل معادل تقسیم می‌کنیم (O محل استقرار چاه فرض شده است).

اما رسم خط EOF ـ ابتدا بین سه طول معلوم AH (ارتفاع نظیر رأس A)، l (فاصله‌ی O از مثلاً ضلع AB) و $\frac{1}{6}BC$، طولی مانند x چنان می‌سازیم که $\frac{1}{6}BC.AH = l.x$ باشد. (در شکل $HA' = \frac{1}{6}BC$ در امتداد ارتفاع AH و l=HL روی BC انتخاب شد و دایره‌ای از سه نقطه‌ی A' و L و A گذشت، به منظور تعیین $HG' = x$). حال روی AB طول x=GA را برگزیدیم و GK و KOP را به ترتیب موازی AC و AB کشیدیم. بدیهی است، مساحت متوازی‌الاضلاع AGKP مساوی l.AG یعنی $\frac{1}{3}S_{ABC}$ است. چون مثلث قائم‌الزاویه‌ی ONK را به وتر OK و به ضلع ON=OP بسازیم و GE را در امتداد AG روی ضلع AB مساوی NK انتخاب کنیم، خط EOF خط مطلوب اولی است.

زیرا با توجه به شکل و نامگذاری‌هایی که شده است، داریم:

$$\overline{OK}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NK}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{NK}^2 \qquad (1)$$

و از تشابه مثلث‌های EGM و OKM و OPF داریم:

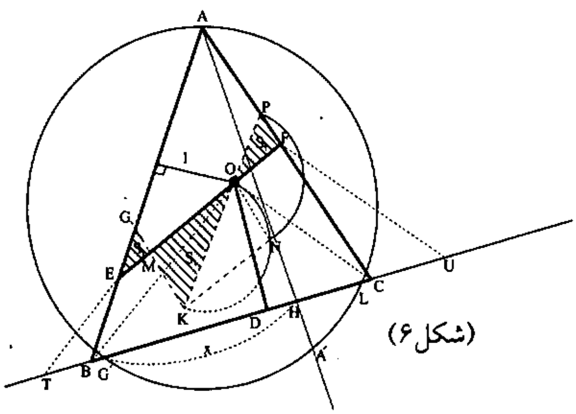
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\overline{GE}^2}{\overline{OK}^2} = \frac{\overline{NK}^2}{\overline{OK}^2} \qquad (2)$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OK}^2} \qquad (3)$$

از جمع طرفین رابطه‌های ۲ و ۳ و با در نظر گرفتن رابطه‌ی ۱ خواهیم داشت: $S_1 = S_2 + S_3$ و این یعنی: $S_{AEF} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

برای رسم OD، ابتدا OC و OB را وصل می‌کنیم آن‌گاه FU و ET را به ترتیب موازی OC و OB می‌کشیم (نقاط U و T روی ضلع BC هستند) اگر D وسط TU باشد، OD خط مطلوب است. یعنی دو شکل BEOD و DOFC معادل هم هستند (می‌توانید با رسم خط OU و OT به معادل بودن آن‌ها دست یابید).

درنتیجه $S_{AEF} = S_{BEOD} = S_{DOFC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ است و چاه بین زمین‌ها مشترک است.

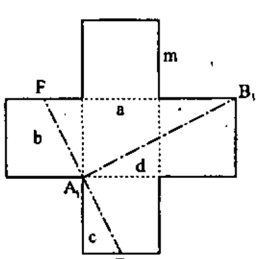


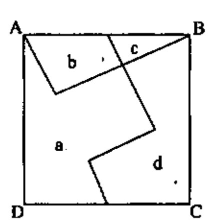
(شکل۶)

حل ۳:

دو برش در امتداد A_1B_1 و EF هستند (نقاط E و F وسط ضلع‌ها هستند).

قطعات حاصل، a و b و c و d در شکل ۲ چیده شده‌اند و مربع ABCD تشکیل شده است.





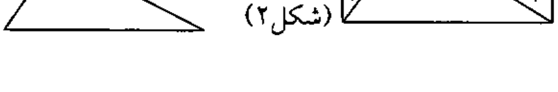
اندازه‌ی ضلع مربع حاصل $m\sqrt{5}$ است (محاسبه کنید).



ترجمه: دکتر غلامرضا یاسی پور

در هر دو رویه‌ی چندضلعی با سطح یکسان، می‌توان با بریدن اولی به تکه‌هایی به تعداد متناهی، و قرار دادن آن‌ها در رویه‌ی چندضلعی دوم، یکی را به دیگری تبدیل کرد.

این ویژگی توسط بولیایی[1] (۱۸۳۳) و گروین[2] (۱۸۳۵) به طور مستقل از هم به اثبات رسید. صورت سه‌بعدی آن، توسط هیلبرت[3] در فهرست ۲۳ مسأله‌ای قرار داده شد که او در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی‌دانان به سال ۱۹۰۰ میلادی ارائه داد. هیلبرت بیان کرد، این ویژگی در مورد چندوجهی‌ها برقرار نیست و مسأله را در مورد تغییرناپذیر کاملی مطرح کرد که مانع تبدیل یک چندوجهی به دیگری می‌شود. مسأله‌ی مزبور توسط دن[4] که تغییرناپذیر مطلوب را به دست داد، حل شد.

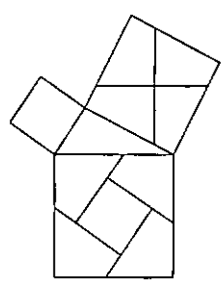


(شکل ۲)

قضیه‌ی بولیایی- گروین را اثبات می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم

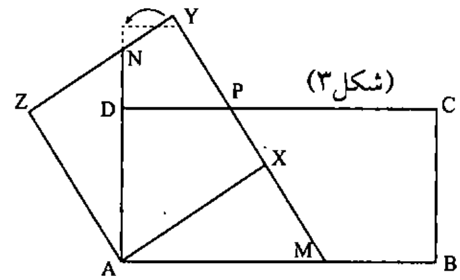
۱. تجزیه‌ی رویه‌های چندضلعی

اثبات نموداری زیر (شکل ۱) از قضیه‌ی فیثاغورس نشان می‌دهد، می‌توان دو مربع را به تکه‌هایی، به تعداد متناهی، برید و آن‌ها را برای به دست آوردن یک مربع، پهلوی هم قرار داد. در واقع، قضیه عمومی‌تر از این است.



(شکل ۱)

که با استفاده از قطرها، می‌توان هرچندضلعی را به تعدادی متناهی مثلث برید. مثلث را می‌توان، همان طور که در شکل۲ نشان داده‌ایم، به یک مستطیل تبدیل کرد. نشان دادیم که می‌توان دو مربع را برید و بریده‌ها را در یک مربع منفرد جمع کرد. به این ترتیب، کافی است نشان دهیم که از یک مستطیل می‌توان یک مربع ساخت.



(شکل۳)

فرض می‌کنیم ABCD یک مستطیل باشد. با بریدن مستطیل ABCD به مستطیل‌های کوچک‌تر و انجام ترسیم زیر در مورد هریک از آن‌ها، می‌توان فرض کرد که:

$AB/۴ < BC < AB/۲$

مربع AXYZ را با سطحی یکسان با سطح مستطیل، چنان اختیار می‌کنیم که XY، CD را در نقطه‌ی وسط آن قطع کند (شکل۳). و فرض می‌کنیم، M تقاطع AB و XY باشد و N تقاطع AD و YZ. مثلث‌های AZN و AXM هم‌نهشت هستند. بنابراین، چهارضلعی‌های MBCP و DNYP سطحی یکسان دارند. با عمل برش و پهلوی هم قرار دادن، به تبدیل چهارضلعی دوم به ذوزنقه‌ای هم‌نهشت با اولی رهنمون می‌شویم. (دو مورد مزبور هم‌نهشت هستند، زیرا:

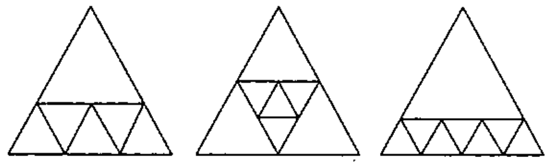
$PC = PD \ , \ \angle DPY = \angle CPM$

و هر دو سطح‌هایی یکسان دارند.)

ثابت کردیم که هر چندضلعی را می‌توان به مربعی تبدیل کرد. اما می‌توان به قهقرا، از مربع به چندضلعی نیز رفت، درنتیجه می‌توان هر چندضلعی را با کمک مربعی به عنوان واسطه، به هر چندضلعی دیگر مبدل ساخت.

مثال: نشان دهید، به ازای $n \geq ۶$، می‌توان یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به n مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه کرد.

هر مثلث متساوی‌الاضلاع را چنان‌که در شکل ۴ نشان داده شده است، می‌توان به شش، هفت و هشت مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه کرد. نتیجه‌ی مطلوب با استفاده از استدلال استقرایی، با توجه به این مطلب به دست می‌آید که اگر مثلث را بتوان به n مثلث متساوی‌الاضلاع تجزیه کرد. آن‌گاه می‌توان آن را با استفاده از تجزیه‌ی یکی از مثلث‌های تجزیه شده به چهار مثلث، به $n + ۳$ مثلث تجزیه کرد.

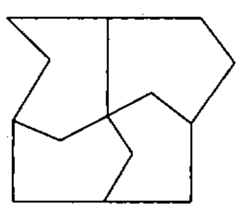

(شکل۴)

تمرین

۱. سه مربع با ضلع‌هایی برابر ۲، ۳ و ۶ مفروضند، با تنها دو برش، ۵ تکه‌ی حاصل را به مربعی با ضلع برابر ۷ تبدیل کنید (مقصود از برش، خطی است که چندضلعی را به دو تکه‌ی متصل تقسیم می‌کند).

۲. ثابت کنید هر مربع را می‌توان به ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی تقسیم کرد که مستطیل نیستند.

۳. با درنظر داشتن هشت ضلعی شکل ۵، می‌توان ملاحظه کرد که چگونه آن را به ۴ چندضلعی هم‌نهشت تقسیم می‌کنند. آیا می‌توان آن را به ۵ چندضلعی هم‌نهشت تقسیم کرد؟


(شکل۵)

۴. نشان دهید هر چهارضلعی دوری را می‌توان به ازای $n \geq ۴$، به n چهارضلعی دوری تجزیه کرد.

۵. نشان دهید هر مربع را می‌توان، به ازای هر $n \geq ۶$، به n مربع تجزیه کرد. ثابت کنید، این عمل را به ازای $n = ۵$ نمی‌توان انجام داد.

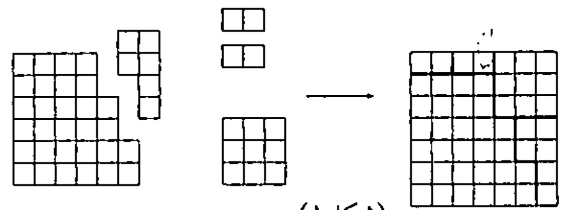
۶. نشان دهید هرمکعب را می‌توان، به ازای $n \geq ۵۵$، به n مکعب تجزیه کرد.

۷. تمام چندضلعی‌های محدبی را تعیین کنید که می‌توانند به متوازی‌الاضلاع‌هایی تجزیه شوند.

۸. ثابت کنید با معلوم بودن هر ۲n نقطه‌ی واقع در درون یک چندضلعی محدب، تجزیه‌ای از آن چندضلعی به $n + ۱$ چندضلعی محدب، چنان موجود است که ۲n نقطه‌ی مزبور بر مرزهای این چندضلعی‌ها قرار داشته باشند.

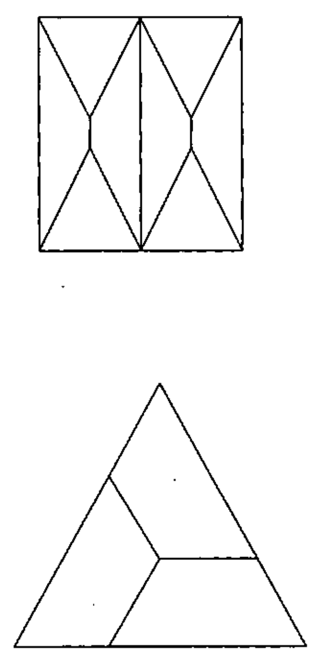
تجزیه‌ی رویه‌های چندضلعی

۱. در این‌جا یکی از چند امکان را آورده‌ایم. برش‌ها و شبیه‌ها در شکل۱ نشان داده شده‌اند.



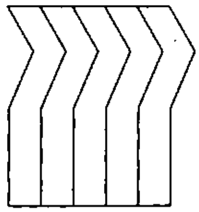
(شکل۱)

۲. شکل ۲ چگونگی تجزیه‌ی یک مربع را به ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین و مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، و نیز چگونگی تجزیه‌ی یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به سه ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین نشان می‌دهد (طرح از: kvant (Quantum), A. sivatski, v.Lev).



(شکل۲)

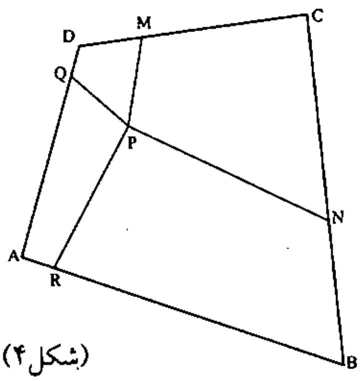
۳. پاسخ موجبه است! یک تجزیه در شکل۳ آورده شده است (P. Boychev).



(شکل۳)

۴. ثابت می‌کنیم که تجزیه‌ای به ۴ چهارضلعی دوری، با ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بودن یکی از آن‌ها، موجود است. از آن‌جا که یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین را می‌توان به تعداد دلخواهی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین برید، گزاره‌ی موردنظر در مورد هر $n \geq 4$ به اثبات می‌رسد.

فرض می‌کنیم، ABCD چهارضلعی مورد بحث باشد (شکل۴). در صورتی که این چهارضلعی مستطیل باشد، تجزیه آسان است. اما در صورتی که چنین نباشد، بدون از دست دادن عمومیت مسأله، می‌توان فرض کرد که $\hat{D}$ منفرجه است.



(شکل۴)

P را در درون، M را بر CD، و N را بر BC چنان اختیار می‌کنیم که PNCM اضلاعی موازی اضلاع ABCD داشته باشد. اگر P را به قدر کافی نزدیک به ضلع AD اختیار کنیم، آن‌گاه نقطه‌ی Qای بر AD چنان وجود دارد که PMDQ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است. توجه داشته باشید که زاویه‌ی PQA حاده است.

اگر P را به قدر کافی نزدیک به ضلع AB اختیار کنیم، آن‌گاه می‌توان نقطه‌ی R_1 ی نزدیک به A چنان یافت که:

$$P\hat{R}_1A + P\hat{Q}A > 180^\circ$$

نیز، تحت همین شرط، می‌توان نقطه‌ی R_2 ای نزدیک به B با $P\hat{R}_2A < 90^\circ$، و درنتیجه با $P\hat{Q}A + P\hat{R}_2A < 180^\circ$ یافت. استدلالی مداوم، $R \in AB$ را با

$P\hat{Q}A + P\hat{R}A = 180^\circ$ ، و درنتیجه با ARPQی دوری به دست می‌دهد.

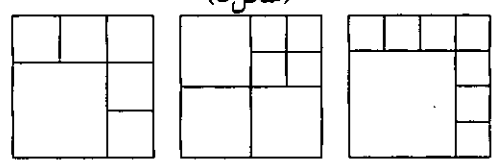
سرانجام:

$$R\hat{P}N = 360^\circ - R\hat{P}Q - Q\hat{P}M - M\hat{P}N = 360^\circ - (180^\circ - \hat{A}) - (180^\circ - \hat{D}) - (180^\circ - \hat{C}) = 180^\circ - \hat{B}$$

که نشان می‌دهد، RCNP نیز دوری است. این مطلب تجزیه‌ی مطلوب را به دست می‌دهد (چهاردهمین IMO، ۱۹۷۲).

۵. به طور استقرایی ثابت خواهیم کرد که یک مربع را می‌توان به ازای $n \geq 6$ ، به n مربع تقسیم کرد. حالت‌های $n = 6$ ، ۷ ، و ۸ را در شکل ۵ نشان داده‌ایم.

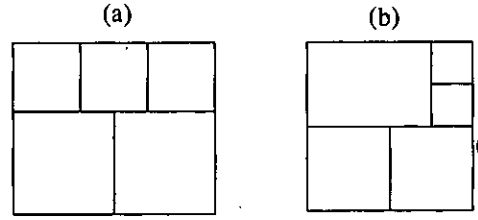
(شکل۵)



نتیجه‌ی مورد نظر، اکنون از استدلال استقرایی حاصل می‌شود؛ زیرا اگر ویژگی مورد بحث، به ازای kی خاصی برقرار باشد، آن‌گاه با تقسیم یکی از مربع‌های تجزیه به چهار مورد، سه مربع دیگر اضافه می‌کنیم. بنابراین، ویژگی مزبور، به ازای $k+3$ نیز برقرار خواهد بود.

اکنون نشان می‌دهیم که نمی‌توان یک مربع را به پنج مربع تقسیم کرد. فرض می‌کنیم، چنین تجزیه‌ای وجود دارد. در این صورت، هریک از اضلاع مربع اولیه، درست با دو مربع تجزیه مماس می‌شود، و مربع‌هایی که به یک ضلع مماس باشند، به ضلع مقابل آن مماس نمی‌شوند. درنتیجه، یک ضلع مربعمان موجود است که دقیقاً با دو مربع تجزیه مماس است. اگر این دو مربع برابر باشند، آن‌گاه بالای آن‌ها سه مربع دیگر داریم که یا برابرند، و درنتیجه، چنانچه در شکل ۶ - a نشان داده‌ایم، تا اندازه‌ای کوچک‌ترند، یا چون در شکل ۶ - b قرار می‌گیرند:

(a) (b)



(شکل۶)

در حالت اول، ضلع مربع اولیه، از یک طرف، دو برابر طول ضلع یکی از مربع‌های بزرگ است، و از طرف دیگر، برابر مجموع طول‌های اضلاع یک مربع کوچک و یک مربع بزرگ می‌شود که غیرممکن است.

حالت دوم، به وضعیتی تحویل می‌شود که در آن، دو مربع با اندازه‌های متفاوت، به یک ضلع مماس می‌شوند. این دو مربع تکه‌ای L شکل را به‌جا می‌گذارند که تنها می‌تواند با دو مربع برابر با مربع کوچک‌تر، و یک مربع برابر با مربع بزرگ‌تر پوشیده شود، و بار دیگر با توجه به شکل ۶ - a ، با ترکیبی غیرممکن مواجه می‌شویم.

۶. این مسأله مشابه مسأله‌ی پیشین است. مکعب C را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم P(n) این گزاره باشد که C می‌تواند به n مکعب افراز شود.

اگر P(k) به ازای kای راست باشد، آن‌گاه با تقسیم یکی از مکعب‌های افراز به هشت مکعب با صفحاتی که موازی وجوه آن هستند و از مرکزش می‌گذرند، نتیجه می‌شود که $P(k+7)$ نیز راست است. در این صورت، مسأله به بررسی حالات زیر تحویل می‌شود:

P(۶۱) ، P(۶۰) ، P(۵۹) ، P(۵۸) ، P(۵۷) ، P(۵۶) و P(۵۵)

P(۵۵) : C را به ۲۷ مکعب و هریک از چهار مورد از آن‌ها را به هشت مکعب تقسیم می‌کنیم. این کار، تقسیمی از C را به ۵۵=(۴×۷)+۲۷ مکعب به دست می‌دهد.

P(۵۶) : C را به هشت مکعب، و هریک از چهار مورد از آن‌ها را، با تعیین مربعی بر وجه Fای از C، به ۲۷ مکعب تقسیم می‌کنیم. سپس هشت مکعب (از نه مورد) دارای یک نهم F به عنوان قاعده، تشکیل شده از اتصال هشت مکعب کوچک به یک مکعب منفرد، را در نظر می‌گیریم. در این صورت، C را به ۵۶=(۸×۷)-(۴×۲۶)+۸ مکعب تقسیم کرده‌ایم.

P(۵۷) : C را به ۶۴ مکعب تقسیم می‌کنیم. آن‌گاه هشت مورد از آن‌ها را وصل می‌کنیم تا مکعبی جدید تشکیل شود. این عمل ۵۷=۷-۶۴ مکعب به دست می‌دهد.

P(۵۸) : C را به ۲۷ مکعب تقسیم می‌کنیم و هشت مورد از آن‌ها را، برای تشکیل مکعبی جدید، متصل می‌کنیم. سپس همین کار را با دو مکعب افراز انجام می‌دهیم. این عمل ۵۸=(۷-۲۶)×۲+۷-۲۷ مکعب به دست می‌دهد.

P(۵۹) : C را به ۶۴ مکعب تقسیم، و ۲۷ مورد از آن‌ها را، برای تشکیل مکعبی جدید، به هم وصل می‌کنیم. سپس هریک از مکعب‌های باقیمانده را به هشت مکعب تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب، C را به ۵۹=(۳×۷)+۲۶-۶۴ مکعب تقسیم کرده‌ایم.

(۶۰)C : P را به هشت مکعب، و سپس هریک از دو مورد از آن‌ها را به ۲۷ مکعب، تقسیم می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

۸+(۲×۲۶)=۶۰

(۶۱)C : P را به ۲۷ مکعب تقسیم، و هشت مکعب از آن‌ها را، برای تشکیل مکعبی جدید، متصل می‌کنیم. سپس چهار مورد از مکعب‌های باقیمانده را در نظر می‌گیریم که در قسمتی از یک وجه C مشترکند. این قسمت را P می‌نامیم، و هریک از آن‌ها را به ۲۷ مکعب تقسیم می‌کنیم.

۹ مکعبی را در نظر می‌گیریم که نهمین قسمت P را به عنوان یک وجه دارند و از وصل هشت مکعب کوچک به مکعبی منفرد به دست آمده‌اند. در این صورت، Cرا به ۶۱ مکعب تقسیم کرده‌ایم؛ زیرا:

۲۷-۷+(۴×۲۶)-(۹×۷)=۶۱

از آن‌جا که (۵۵)P ، (۵۶)P ، ... و (۶۱)P راست هستند، با استفاده از استدلال استقرایی و مرحله‌ی ۷ درمی‌یابیم که P(k)، به ازای هر k ≥ ۵۵ ، راست است (امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۸).

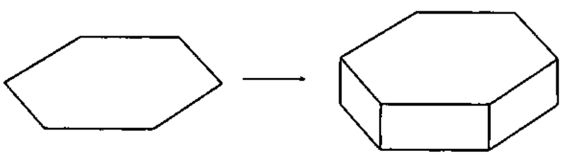
۷. ثابت می‌کنیم که تنها چندضلعی دارای مرکز تقارن، این شرط را برقرار می‌کند. برای رسیدن به این مقصود، فرض می‌کنیم P یک چندضلعی باشد که بتواند به متوازی‌الاضلاع‌هایی تجزیه شود، و L یکی از ضلع‌های آن باشد.

لایه‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها را در نظر می‌گیریم که دارای یک ضلع واقع بر L هستند. لایه‌ی بعدی متوازی‌الاضلاع‌ها، با اضلاعی واقع بر ضلع‌هایی از متوازی‌الاضلاع‌های لایه‌ی اولی که موازی L هستند، دارای مجموع طول‌های اضلاعی موازی با L و برابر با طول L است.

با ادامه‌ی این طریق، سرانجام به لایه‌ای از متوازی‌الاضلاع‌ها برمی‌خوریم که جمیع اضلاعشان بر ضلع دیگری از P واقعند (برای دقت بیش‌تر، توجه داشته باشید که بعضی از متوازی‌الاضلاع‌های لایه‌ی آخری می‌توانند، به قطعه خط‌هایی تباهیده شوند). درنتیجه، P دارای ضلعی موازی L و به همان اندازه‌ی آن است.

این استدلال نشان می‌دهد که اضلاع P، دو به دو موازی و هم‌نهشت هستند، و این موضوع حاکی از آن است که P دارای اضلاعی به تعداد زوج است، و بنا به محدب بودن، اضلاع مقابل آن، اضلاعی اند که موازی و هم‌نهشت هستند. درنتیجه، P دارای مرکز تقارن (وسط قطرهای بزرگ آن) است.

برعکس، با استفاده از استقرا اثبات می‌کنیم که هر چندضلعی دارای مرکز تقارن را می‌توان به موازی‌الاضلاع‌هایی تجزیه کرد. این مطلب، در مورد یک چهارضلعی (یعنی، یک متوازی‌الاضلاع) آشکار است، و مرحله‌ی استقرایی را در شکل ۷ مشخص کرده‌ایم. (kvant (Quantum))



(شکل ۷)

۸. در این‌جا اثباتی با استفاده از استقرا بر n به دست می‌دهیم. به ازای n = ۱ تجزیه‌ای را انتخاب می‌کنیم که توسط خط گذرنده، از دو نقطه‌ی مورد نظر گذشته است.

اکنون فرض می‌کنیم این ویژگی، به ازای جمیع چندضلعی‌های دارای ۲(n − ۱) نقطه‌ی درونی برقرار است، و آن را در مورد یک چندضلعی با ۲n نقطه اثبات می‌کنیم. خط dای را در نظر می‌گیریم که این چندضلعی را قطع نکند. فرض می‌کنیم، A نزدیک‌ترین نقطه به d باشد و B را در میان نقاط باقیمانده چنان اختیار می‌کنیم که زاویه‌ی حاصل از خطوط AB و d مینیمال باشد (این زاویه می‌تواند سرانجام صفر شود).

خط AB چندضلعی را به دو چندضلعی محدب P_1 و P_2 چنان تقسیم می‌کند که P_1 در درون خود شامل هیچ‌یک از ۲n نقطه نباشد و P_2 در درون خود، دارای حداکثر ۲ − ۲n نقطه از این نقاط باشد.

با به کار بردن فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که P_2 می‌تواند به n چندضلعی تقسیم شود که شامل ۲ − ۲n نقطه‌ی باقیمانده بر مرزهای خود باشند. این چندضلعی‌ها، همراه با P_1 تجزیه‌ی مطلوب را به دست می‌دهند.

زیرنویس

1. F. Bolyai
2. Gerwin
3. Hilbert
4. M. Dehn

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم

۴ معادله‌ی درجه دوم

رابطه‌ی Sها در معادله‌ی درجه دوم

احمد قندهاری

اشاره:

در قسمت اول معادله‌ی درجه دوم، پس از بررسی حالت‌های ناقص معادله و اثبات فرمول‌های حل آن، چند نکته‌ی مفید نیز مطرح شد. در قسمت دوم، تجزیه و تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و بحث در تعداد و علامت ریشه‌ها آمد. در قسمت سوم، روابط بین ضریب‌ها و ریشه‌ها و تشکیل معادله در حالت‌های گوناگون بررسی شد و اینک قسمت چهارم.

فرض می‌کنیم:

$S_1 = x' + x''$

$S_2 = x'^2 + x''^2$

$S_3 = x'^3 + x''^3$

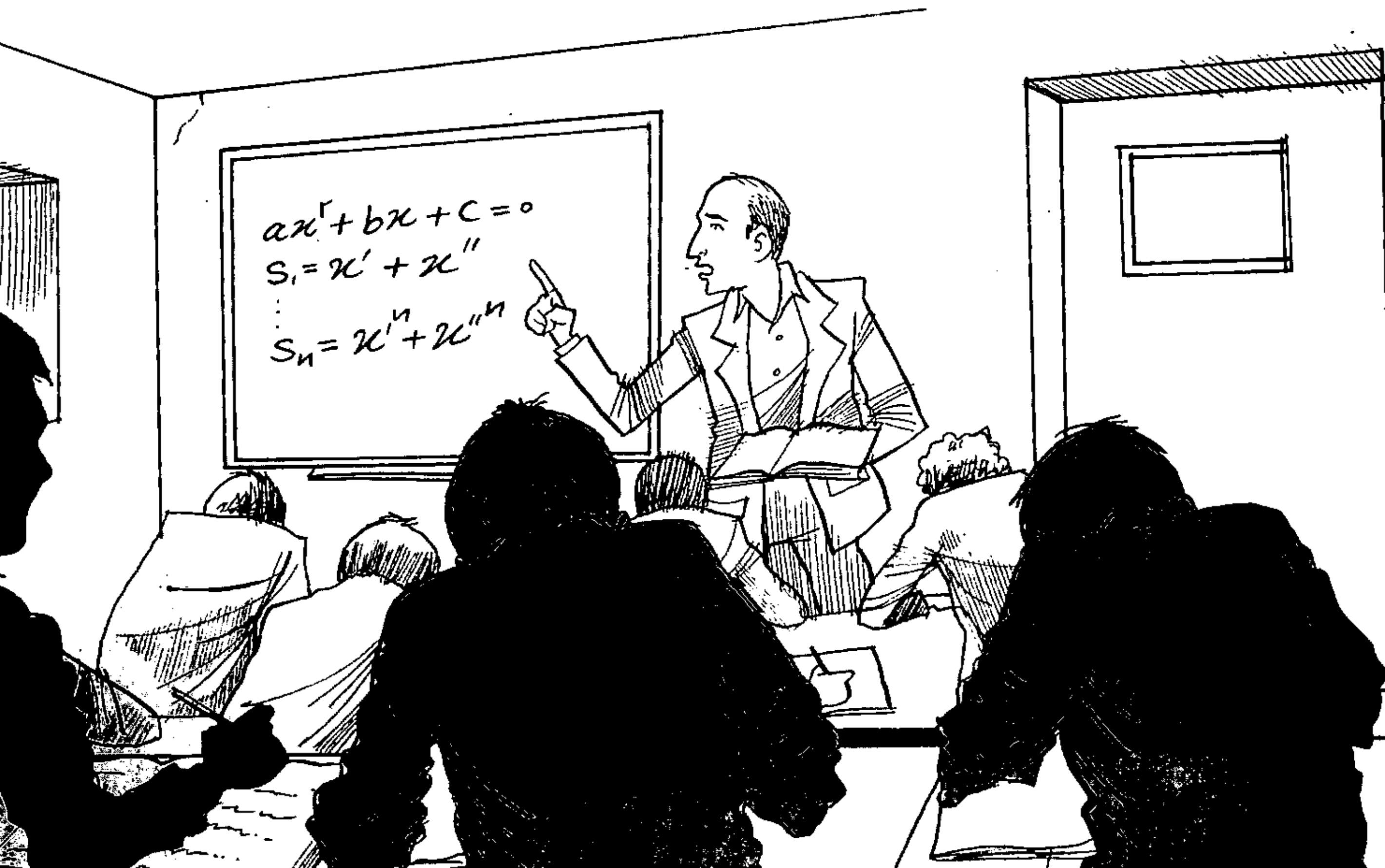
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$S_n = x'^n + x''^n$

دو طرف معادله‌ی درجه‌ی دوم را در x^{n-2} ضرب می‌کنیم $(n \in N)$:

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = 0$



حال در این معادله، یک بار به جای x، x' و یک بار به جای x، x'' را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ax'^{n} + bx'^{n-۱} + cx'^{n-۲} = ۰ \\ ax''^{n} + bx''^{n-۱} + cx''^{n-۲} = ۰ \end{cases}$$

این دو معادله را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$a(x'^{n} + x''^{n}) + b(x'^{n-۱} + x''^{n-۱}) + c(x'^{n-۲} + x''^{n-۲}) = ۰$$

با مفروضات اولیه می‌توان نوشت:

$$\boxed{aS_n + bS_{n-۱} + cS_{n-۲} = ۰}$$

که به آن رابطه‌ی Sها در معادله‌ی درجه دوم می‌گوییم. $S_{۲۰۰}$

مسأله‌ی ۱: در معادله‌ی $x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ مطلوب است محاسبه‌ی $S_۵ = x'^۵ + x''^۵$

حل: رابطه‌ی S ها را برای این معادله می‌نویسم:

$$S_n - ۲S_{n-۱} - S_{n-۲} = ۰$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} S_۱ = ۲ \\ S_۰ = x'^۰ + x''^۰ = ۱ + ۱ = ۲ \end{cases}$$

$$n = ۲ \Rightarrow S_۲ - ۲S_۱ - S_۰ = ۰$$
$$S_۲ - ۲(۲) - ۲ = ۰ \Rightarrow S_۲ = ۶$$

$$n = ۳ \Rightarrow S_۳ - ۲S_۲ - S_۱ = ۰$$
$$S_۳ - ۲(۶) - ۲ = ۰ \Rightarrow S_۳ = ۱۴$$

$$n = ۴ \Rightarrow S_۴ - ۲S_۳ - S_۲ = ۰$$
$$S_۴ - ۲(۱۴) - ۶ = ۰ \Rightarrow S_۴ = ۳۴$$

$$n = ۵ \Rightarrow S_۵ - ۲S_۴ - S_۳ = ۰$$
$$S_۵ - ۲(۳۴) - ۱۴ = ۰ \Rightarrow S_۵ = ۸۲$$

مسأله‌ی ۲. در معادله‌ی $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ اگر $S_{۱۰۰} = K$، آن‌گاه $S_{۳۰۰}$ را بیابید.

حل:

$$S_{۱۰۰} = K$$

$$x'^{۱۰۰} + x''^{۱۰۰} = K$$

فرض می‌کنیم: $a = x'^{۱۰۰}$ و $b = x''^{۱۰۰}$ پس: $a + b = K$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$a^۳ + b^۳ + ۳ab(a + b) = K^۳$$

$$a^۳ + b^۳ + ۳ab(K) = K^۳$$

$$\underbrace{x'^{۳۰۰} + x''^{۳۰۰}}_{S_{۳۰۰}} + ۳(x'^{۱۰۰})(x''^{۱۰۰})(K) = K^۳$$

$$S_{۳۰۰} + ۳K(x'x'')^{۱۰۰} = K^۳$$

$$S_{۳۰۰} + ۳K(-۱)^{۱۰۰} = K^۳$$

$$S_{۳۰۰} + ۳K = K^۳ \Rightarrow S_{۳۰۰} = K^۳ - ۳K$$

چند مسأله درباره‌ی معادله‌های درجه دوم

مسأله‌ی ۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ باشند، آن‌گاه حاصل $K = (\alpha^۳ + \alpha^۲ + \alpha + \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\alpha^۳})$ را بیابید.

حل:

$$\alpha.\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha.\beta = ۱ \Rightarrow \beta = \frac{۱}{\alpha}$$

$$K = \alpha^۳ + \alpha^۲ + \alpha + \beta + \beta^۲ + \beta^۳$$
$$= (\alpha^۳ + \beta^۳) + (\alpha^۲ + \beta^۲) + (\alpha + \beta)$$

$$K = (S^۳ - ۳PS) + (S^۲ - ۲P) + (S)$$

داریم:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = ۳ \\ P = \frac{c}{a} = ۱ \end{cases}$$

$$K = (۲۷ - ۹) + (۹ - ۲) + ۳ = ۱۸ + ۷ + ۳ = ۲۸$$

مسأله‌ی ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ باشند، با فرض $\alpha > \beta$ حاصل $K = ۵\alpha^۲ + ۳\beta^۲ - ۵\sqrt{۱۷}$ را بیابید.

حل:

$$K = ۵\alpha^۲ + ۳\beta^۲ - ۵\sqrt{۱۷}$$

$$K = ۴\alpha^۲ + \alpha^۲ + ۴\beta^۲ - \beta^۲ - ۵\sqrt{۱۷}$$

$$K = ۴(\alpha^۲ + \beta^۲) + (\alpha^۲ - \beta^۲) - ۵\sqrt{۱۷}$$

$$K = ۴(\alpha^۲ + \beta^۲) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - ۵\sqrt{۱۷}$$

$$K = ۴(S^۲ - ۲P) + \frac{\sqrt{\Delta}}{a}(S) - ۵\sqrt{۱۷}$$

داریم:

$$\begin{cases} S = ۵ \\ P = ۲ \end{cases}$$

$$K = ۴(۲۵ - ۴) + \frac{\sqrt{۲۵ - ۸}}{۱}(۵) - ۵\sqrt{۱۷}$$

$$K = ۴(۲۱) + ۵\sqrt{۱۷} - ۵\sqrt{۱۷} \Rightarrow K = ۸۴$$

مسأله‌ی ۳: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $K = \alpha^۳ + ۳\beta^۲ + \beta$ را بیابید.

حل:

$$x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۳x + ۱$$

$$x = \beta \Rightarrow \beta^۲ = ۳\beta + ۱ \qquad (۱)$$

$$K = \alpha^۳ + ۳\beta^۲ + \beta = \alpha^۳ + \beta(۳\beta + ۱)$$

$$K = \alpha^۳ + \beta(\beta^۲) = \alpha^۳ + \beta^۳$$

داریم:

$$\begin{cases} S = ۳ \\ P = -۱ \end{cases}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a}\Rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha=۴\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=۴$$

$$\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=۴\Rightarrow \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=۴\Rightarrow ۴\sin\alpha.\cos\alpha=۱$$

$$\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin ۲\alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos^۲ ۲\alpha=۱-\sin^۲ ۲\alpha=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos ۲\alpha=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$K=\cos^۴\alpha-\sin^۴\alpha=(\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha)(\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha)$$

$$K=(\cos ۲\alpha)(۱)=\cos ۲\alpha=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

معادلات تبدیل‌پذیر به معادله‌ی درجه دوم

الف) هر معادله‌ای که به صورت $ax^{۲n}+bx^n+c=۰$ ، $n\in Q$ باشد، با فرض $y=x^n$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شود و قابل حل است.

مثال ۱ : معادله‌ی $۱۶x^۸-۱۷x^۴+۱=۰$ را حل کنید.

حل : فرض می‌کنیم $y=x^۴$ پس:

مجموع ضریب‌های این معادله صفر است.

$$۱۶y^۲-۱۷y+۱=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_۱=۱\\ y_۲=\frac{۱}{۱۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۴=۱\Rightarrow x=\pm۱\\ x^۴=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

مثال ۲ . معادله‌ی $x^{\frac{۱}{۴}}-۴x^{\frac{۱}{۸}}-۲=۰$ را حل کنید.

حل :

$$x^{\frac{۱}{۴}}-۴x^{\frac{۱}{۸}}-۲=۰\Rightarrow \sqrt[۴]{x}-۴\sqrt[۸]{x}-۲=۰\qquad x>۰$$

$$y=x^{\frac{۱}{۸}}\Rightarrow y^۲=x^{\frac{۱}{۴}}\qquad x>۰\Rightarrow y>۰$$

$$y^۲-۴y-۲=۰$$

$$y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^۲-ac}}{a}=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۲}}{۱}=۲\pm\sqrt{۶}$$

$$y>۰\Rightarrow y=۲+\sqrt{۶}$$

$$x^{\frac{۱}{۸}}=\sqrt[۸]{x}=۲+\sqrt{۶}\Rightarrow x=(۲+\sqrt{۶})^۸$$

ب) معادلاتی که به صورت $(P(x)+m)(P(x)+n)=K$ باشند؛ با فرض $P(x)=y$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شوند.

مثال . معادله‌ی $(x^۲+x-۵)(x^۲+x-۳)=۸$ را حل کنید.

حل : فرض می‌کنیم $y=x^۲+x$ پس:

$$K=S^۳-۳PS=۲۷-۳(۳)(-۱)=۲۷+۹=۳۶$$

مسأله‌ی ۴ . اگر a یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-۳x+۱=۰$ باشد، آن‌گاه حاصل $K=a^۴+\frac{۱}{a^۴}$ را بیابید.

حل : a ریشه‌ی معادله است، پس در معادله به جای x، a قرار می‌دهیم و دو طرف را بر $a\neq۰$ تقسیم می‌کنیم.

$$a^۲-۳a+۱=۰$$

$$a-۳+\frac{۱}{a}=۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۳$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲=۹\Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۷$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲=۴۹\Rightarrow a^۴+\frac{۱}{a^۴}=۴۷\Rightarrow K=۴۷$$

مسأله‌ی ۵ . اگر a و b و c و d اعداد حقیقی مخالف صفر باشند و c و d ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ و a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+cx+d=۰$ باشند، آن‌گاه مقدار عددی $(a+b+c+d)$ را بیابید.

حل:

$$x^۲+ax+b=۰\quad\begin{cases}x'=c\\ x''=d\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'+x''=-a\Rightarrow c+d=-a\Rightarrow a+c+d=۰\qquad(۱)\\ x'.x''=b\Rightarrow c.d=b\qquad(۲)\end{cases}$$

$$x^۲+cx+d=۰\quad\begin{cases}x'=a\\ x''=b\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'+x''=-c\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow a+b+c=۰\qquad(۳)\\ x'.x''=d\Rightarrow ab=d\qquad(۴)\end{cases}$$

رابطه‌ی (۱) = رابطه‌ی (۳) $\Rightarrow a+c+d=a+b+c\Rightarrow \boxed{b=d}$

رابطه (۲) : $c.d=b$ و $b=d\Rightarrow \boxed{c=۱}$

رابطه (۴) : $ab=d$ و $b=d\Rightarrow \boxed{a=۱}$

رابطه (۱) : $a+c+d=۰\Rightarrow ۱+۱+d=۰\Rightarrow \boxed{d=-۲}$, $\boxed{b=-۲}$

$$\Rightarrow a+b+c+d=۱-۲+۱-۲=-۲$$

مسأله‌ی ۶ . اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+m-۲=۰$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$k=\cos^۴a-\sin^۴a$$

حل:

$$\begin{cases}x'=\tan\alpha\\ x''=\cot\alpha\end{cases}$$

$$(x^۲ + x - ۵)(x^۲ + x - ۳) = ۸ \Rightarrow (y - ۵)(y - ۳) = ۸ \Rightarrow$$

$$y^۲ - ۸y + ۱۵ = ۸ \Rightarrow y^۲ - ۸y + ۷ = ۰$$

مجموع ضریب‌ها صفر است

$$\Rightarrow y = ۱,\ \ y = ۷$$

الف) $y = ۱ \Rightarrow x^۲ + x = ۱ \Rightarrow x^۲ + x - ۱ = ۰ \Rightarrow$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۴}}{۲} \Rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

ب) $y = ۷ \Rightarrow x^۲ + x = ۷ \Rightarrow x^۲ + x - ۷ = ۰$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۲۸}}{۲} \Rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۲۹}}{۲}$$

ج) معادلاتی که به صورت $P(x) + \frac{m}{P(x)} = K$ باشند، با فرض $P(x) = y$ به معادله‌ی درجه دوم تبدیل می‌شوند.

مثال ۱. معادله‌ی $\frac{(x^۲ + x + ۱)^۲ + ۴}{x^۲ + x + ۱} = ۶$ را حل کنید.

حل: $x^۲ + x + ۱$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta < ۰$ و $a > ۰$

کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{(x^۲ + x + ۱)^۲}{x^۲ + x + ۱} + \frac{۴}{x^۲ + x + ۱} = ۶$$

$$x^۲ + x + ۱ + \frac{۴}{x^۲ + x + ۱} = ۶$$

فرض می‌کنیم: $y = x^۲ + x + ۱$

$$y + \frac{۴}{y} = ۶ \Rightarrow y^۲ + ۴ = ۶y \Rightarrow y^۲ - ۶y + ۴ = ۰$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۴}}{۱} = ۳ \pm \sqrt{۵}$$

الف) $y = ۳ + \sqrt{۵}$

$$x^۲ + x + ۱ = ۳ + \sqrt{۵} \Rightarrow x^۲ + x - (۲ + \sqrt{۵}) = ۰$$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۴(۲ + \sqrt{۵})}}{۲}$$

ب) $y = ۳ - \sqrt{۵}$

$$x^۲ + x + ۱ = ۳ - \sqrt{۵} \Rightarrow x^۲ + x - (۲ - \sqrt{۵}) = ۰$$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۴(۲ - \sqrt{۵})}}{۲}$$

مثال ۲. معادله‌ی $(۲ - \sqrt{۳})^{\sin x} + (۲ + \sqrt{۳})^{\sin x} = ۲$ را حل کنید.

حل:

$$۲ + \sqrt{۳} = \frac{(۲ + \sqrt{۳})(۲ - \sqrt{۳})}{۲ - \sqrt{۳}} = \frac{۴ - ۳}{۲ - \sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲ - \sqrt{۳}}$$

بنابراین داریم:

$$(۲ - \sqrt{۳})^{\sin x} + \frac{۱}{(۲ - \sqrt{۳})^{\sin x}} = ۲$$

فرض می‌شود: $y = (۲ - \sqrt{۳})^{\sin x}$ در نتیجه:

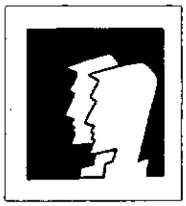
$$y + \frac{۱}{y} = ۲ \Rightarrow y^۲ + ۱ = ۲y \Rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$(y - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow y - ۱ = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$(۲ - \sqrt{۳})^{\sin x} = y$$

$$(۲ - \sqrt{۳})^{\sin x} = ۱ \Rightarrow (۲ - \sqrt{۳})^{\sin x} = (۲ - \sqrt{۳})^۰$$

$$\Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$$



معمای فکری و منطقی

۱. در میان صد نفر متقاضی برای شغل فنی خاصی، مشخص شد که ده نفر هیچ‌گاه دوره‌ی شیمی یا فیزیک را نگذرانده‌اند. هفتاد و پنج نفر دست‌کم یک دوره در شیمی گذرانده‌اند. هشتاد و سه نفر هم دست‌کم یک دوره در فیزیک گذرانده‌اند.

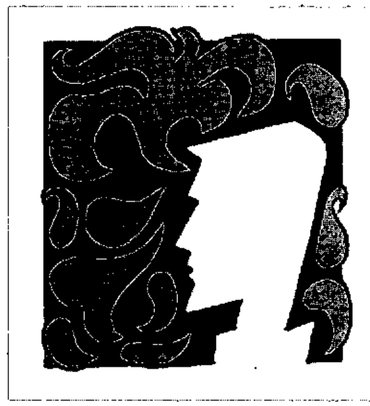
چند نفر از متقاضیان، هم در شیمی هم در فیزیک، کاری انجام داده‌اند؟

***

۲. B، H، J، و T روزی برای سرگرمی به مسابقه‌ی طناب‌کشی پرداختند. گرچه به سختی، اما H توانست B و J را با هم بکشد و H و B با هم توانستند T و J را نگهدارند و هیچ جفتی نتوانست دیگری را حرکت دهد. اما اگر J و B جایشان عوض می‌شد، آن‌وقت T و B مسابقه را نسبتاً به آسانی می‌بردند.

از این چهار، کدام یک قوی‌ترین است و به ترتیب نفرات بعدی کدامند؟

***



برای دانش‌آموزان پایه‌ی دوم

تفریح اندیشه

حسین نامی ساعی

دو چوپان با هم ۳۵ رأس گوسفند را فروختند و از فروش آن‌ها مبالغ برابر برداشت کردند. چوپان اول به چوپان دیگر گفت: «اگر من گوسفندهای تو را به قیمت گوسفندهای خودم فروخته بودم، ۴۵۰ هزار تومان به دست می‌آوردم.»

و چوپان دوم گفت: «اگر گوسفندهای تو را من به قیمت گوسفندهای خودم فروخته بودم، ۸۰۰ هزار تومان نصیبم می‌شد.»

بگویید، هر کدام چند رأس گوسفند داشتند؟

حل: فرض می‌کنیم تعداد گوسفندهای چوپان اول x باشد. در این صورت، تعداد گوسفندهای چوپان دوم $۳۵ - x$ است. اگر تعداد گوسفندهای اولی برابر تعداد گوسفندهای دومی بود، یعنی $۳۵ - x$ رأس، آن‌گاه ۴۵۰ هزار تومان به دست می‌آورد.

به عبارت دیگر، هر رأس گوسفند را به قیمت $\frac{۴۵۰}{۳۵ - x}$ هزار تومان می‌فروخت و اگر چوپان دوم به تعداد گوسفندهای چوپان اول، یعنی x رأس گوسفند داشت، آن‌گاه ۸۰۰ هزار تومان به دست می‌آورد. به عبارت دیگر، هر رأس گوسفند را به قیمت $\frac{۸۰۰}{x}$ هزار تومان می‌فروخت. بنابراین، چوپان اول؛ $x \times \frac{۴۵۰}{۳۵ - x}$ هزار تومان و چوپان دوم؛ $(۳۵ - x) \times \frac{۸۰۰}{x}$ هزار تومان کسب کرده‌اند و چون پول به دست آمده برای هر دو یکسان بوده است، می‌توان نوشت:

$$(۳۵ - x) \times \frac{۸۰۰}{x} = x \times \frac{۴۵۰}{۳۵ - x}$$

$$۰/۳۵x^۲ - ۵۶x + ۹۸۰ = ۰$$

درنتیجه داریم:

$$\Delta = (-۵۶)^۲ - ۴ \times ۰/۳۵ \times ۹۸۰ = ۱۷۶۴$$

$$x = \frac{۵۶ \pm \sqrt{۱۷۶۴}}{۲ \times ۰/۳۵}$$

$$x_۱ = ۱۴۰$$

$$x_۲ = ۲۰$$

اگر تعداد گوسفندهای چوپان اول ۱۴۰ رأس باشد، تعداد گوسفندهای چوپان دوم $۳۵ - ۱۴۰ = -۱۰۵$ است که قابل قبول نیست. پس $x_۱ = ۱۴۰$ قابل قبول نیست.

اگر تعداد گوسفندهای چوپان اول ۲۰ باشد، تعداد گوسفندهای چوپان دوم $۳۵ - ۲۰ = ۱۵$ است که جواب $x_۲ = ۲۰$ قابل قبول است.

بنابراین، چوپان اول ۲۰ رأس گوسفند و چوپان دوم ۱۵ رأس گوسفند داشته است.

مسأله‌ی فواره‌ها و زیر آب

اشاره:

همکار گرامی، آقای دکتر شرف‌الدین، اثری تحت عنوان «تاریخ ریاضیات در ایران از عهد صفوی تا تأسیس مدرسه‌ی دارالفنون» شامل ۱۱۰ صفحه، در کتاب «علوم محضه از صفویه تا تأسیس دارالفنون» عرضه کرده‌اند. کتاب یاد شده بیش از ۴۵۰ صفحه دارد که به تازگی از طرف «انجمن آثار و مفاخر فرهنگی ایران» منتشر شده است. ما در این جا یک مطلب از اثر آقای شرف‌الدین را نقل می‌کنیم. این مطلب درباره مسأله‌ای است که با عنوان «مسأله‌ی فواره‌ها و زیرآب»، سال‌ها در ایران تدریس می‌شد و سپس چند سالی مورد انتقاد بعضی قرار گرفت.

آقای شرف‌الدین در کتاب خود درباره‌ی این مسأله توضیحاتی داده‌اند. ایشان در ابتدای مطلب اظهار داشته‌اند که این مسأله در کتاب‌های قدیم از جمله «کشکول» شیخ بهایی آمده است. سپس نظر خود را درباره‌ی آن اظهار داشته‌اند.

«حوضی است که سه فواره دارد. یکی از آن دو فواره، آن را در یک چهارم روز پر می‌کند و فواره‌ی دوم در یک ششم روز و سومی در یک هفتم و حوض را فاضلابی است که در یک هشتم روز حوض را تخلیه می‌کند. تعیین کنید، با باز کردن هر سه فواره و فاضلاب، حوض در چه زمان پر می‌شود؟

راه حل آن است که بدانیم، هر سه فواره در یک روز چند برابر حوض را پر می‌کنند. تا روی هم هفده حوض را پر کنند. فاضلاب نیز در یک روز، هشت برابر حوض را خالی می‌کند. بنابراین با کسر کردن این از آن، حاصل نه می‌ماند. پس حوض در یک نهم روز پر خواهد شد.[۱]»

بازبینی ارزش مسأله

هنگامی که دانش‌آموز بودم، در درس حساب، مسائلی مانند مسأله‌ی بالا داده می‌شد؛ مسأله‌ای فکری و لذت‌بخش. از این رو، دانش‌آموزان باهوش را جذب می‌کرد. البته، مسائلی که در حساب داده می‌شد، کاملاً متنوع بود و این مسأله تنها یکی از آن‌ها بود که به منظور تقویت استدلال دانش‌آموز داده می‌شد. چند سالی گذشت و مسأله‌ی یاد شده مورد انتقاد و اعتراض قرار گرفت. بعضی از معترضان حتی می‌گفتند:



این مسأله بیهوده است. منظور آن‌ها این بود که هیچ‌کس فواره‌ها و فاضلاب یک حوض را با هم باز نمی‌کند. بنابراین چرا باید چنین مسأله‌ای به دانش‌آموزان داده شود.

من از خود می‌پرسم، چرا باید مسأله‌ای که قرن‌ها مطرح بوده است (در زمان شیخ‌بهایی و پیش و بعد از او) بیهوده نامیده شود؟ بنابراین کاملاً لازم می‌دانم، درباره‌ی ارزش آن توضیح بدهم:

اکنون سه مسأله در زمینه‌ی بحثی که داریم، ذکر می‌کنم.

۱. حوضی دارای دو فواره است. اگر یکی از آن‌ها به تنهایی باز باشد، حوض در مدت سه ساعت پر می‌شود و اگر فواره‌ی دیگر، به تنهایی باز باشد، حوض در مدت چهار ساعت پر می‌شود. تعیین کنید اگر دو فواره با هم باز باشند، حوض در چه مدتی پر می‌شود؟

حل:

چون فواره‌ی اول در سه ساعت حوض را پر می‌کند، پس این فواره در مدت یک ساعت، یک سوم حوض را پر می‌کند. با دلیل مشابه می‌گوییم، فواره‌ی دوم در مدت یک ساعت، یک چهارم حوض را پر می‌کند. پس اگر دو فواره با هم باز باشند، در مدت یک ساعت، هفت دوازدهم حوض پر می‌شود. بنابراین اگر دو فواره با هم باز باشند، حوض در مدت $\frac{12}{7}$ ساعت پر می‌شود.

۲. حوضی دارای دو فواره‌ی A, B و یک فاضلاب C است. اگر فواره‌ی A به تنهایی باز باشد، حوض در مدت ۳ ساعت پر می‌شود. اگر فواره‌ی B به تنهایی باز باشد، حوض در مدت ۴ ساعت پر می‌شود. اگر حوض پر باشد، فاضلاب در مدت ۲ ساعت حوض را تخلیه می‌کند. تعیین کنید، اگر حوض پر از آب باشد و دو فواره و فاضلاب با هم باز شوند، حوض در چه مدتی تخلیه می‌شود؟

حل:

در مدت یک ساعت، $\frac{33}{60}$ حوض تخلیه می‌شود. پس حوض در مدت $\frac{60}{33}$ ساعت تخلیه می‌شود.

۳. حوضی دارای دو فواره‌ی A،B و یک فاضلاب C است. فواره‌ی A در مدت سه ساعت و فواره‌ی B در مدت ۴ ساعت حوض را پر می‌کنند. اگر حوض پر باشد، فاضلاب در مدت ۲ ساعت حوض را تخلیه می‌کند. اگر آب حوض تا نیمه باشد، آن‌گاه دو فواره و فاضلاب را باز کنیم، حوض در چه مدت تخلیه می‌شود؟

حل این مسأله مانند حل مسأله‌ی ۲ است.

اهمیت استدلالی که در حل مسأله‌ی فواره‌ها به کار گرفته شد

روش استدلالی که در حل این سه مسأله به کار بردیم، در حل تعداد زیادی از مسائل ریاضی به کار می‌رود. در سطرهای بعد، چند مسأله را مطرح می‌کنیم که با همین شیوه‌ی استدلالی حل می‌شوند.

باید توجه داشت، روش‌های استدلال بسیار مهم هستند، چرا که به کمک آن‌ها می‌توان، بسیاری از قضیه‌ها را اثبات کرد. برای مثال، از برهان خلف و روش استقراء یاد می‌کنیم که به کمک آن‌ها می‌توان قضیه‌های زیادی را اثبات کرد.

الف) مثال۱: شبکه‌ی الکتریکی متشکل از مولد G و دو مقاومت موازی R_1، R_2 را در نظر می‌گیریم. مقاومت معادل این دو مقاومت را R می‌نامیم. مقدار R چه‌قدر است؟

راه حلی که در اکثریت قریب به اتفاق کتاب‌های فیزیک مشروح است، مبتنی بر به کارگیری فرمول $i=\frac{V}{R}$ است که ما از ذکر آن خودداری می‌کنیم.

روشی که اکنون برای حل مسأله شرح می‌دهیم، همان روشی است که در حل مسأله‌ی فواره‌ها (مسأله‌ی ۱) به کار گرفته شد. می‌گوییم، چون در شبکه‌ی الکتریکی مورد نظر، در مقابل جریان الکتریسیتهٔ بین دو نقطه‌ی A و B، مقاومت R_1 وجود دارد، پس برای عبور جریان الکتریسیته بین دو نقطه‌ی A و B، پذیرایی $\frac{1}{R_1}$ وجود دارد. همچنین

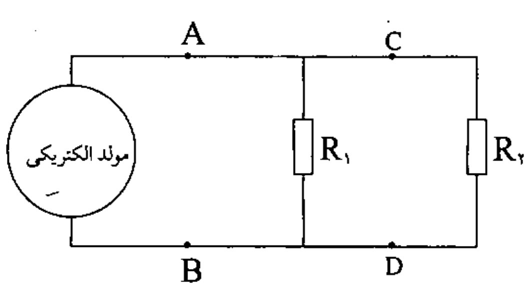
چون در مقابل عبور جریان الکتریسیته بین دو نقطه‌ی C و D، مقاومت R_2 وجود دارد، پس برای عبور جریان الکتریسیته بین دو نقطه‌ی C و D پذیرایی $\frac{1}{R_2}$ وجود دارد.

بنابراین، پذیرایی قسمتی از مدار که از دو مقاومت موازی R_1 و R_2 تشکیل شده است، عبارت است از $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. حال اگر دو مقاومت R_1 و R_2 را برداریم و به جای آن‌ها مقاومت معادل R را بگذاریم، بین دو نقطه‌ی M و N، برای جریان الکتریسیته، پذیرایی $\frac{1}{R}$ وجود دارد، بنابراین چنین داریم:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

توجه می‌کنید که در این جا نیز همان روش استدلالی حل مسأله فواره‌ها به کار آمد.

ب) مثال ۲: دو تراکتور را در نظر می‌گیریم. یکی از آن‌ها در مدت سه روز زمینی را شخم می‌زند و دیگری در مدت چهار روز. اگر هر دو با هم کار کنند، زمین در چه مدت شخم زده می‌شود.



این مسأله را نیز با همان روشی که برای حل مسأله‌ی فواره‌ها گفتیم، می‌توان حل کرد.

توضیح درباره‌ی اعتبار مسأله‌ی یاد شده

مسأله‌ای که درباره‌ی اعتبار آن اعتراض‌هایی می‌شد، به چند دلیل با ارزش است:

نخست آن که مسأله‌ی یاد شده مسأله‌ای فکری است که برای تقویت استدلال و تشخیص استعداد دانش‌آموزان مناسب است.

دوم این که مسأله‌ی فوق فقط در همان زمان اعتراض‌هایی داشته و پیش از آن و پس از آن به کار می‌رفته است. در این مورد توضیح می‌دهیم:

اگر بخواهیم یک زمین زراعتی را با جوی آبی که آبدهی[2] آن اندک است و زمین در دوردست واقع است، آب دهیم، یا جریان آب به علت نفوذ در زمین، به مقصد نمی‌رسد یا مقدار اندکی از آن به مقصد می‌رسد. برای رفع این مشکل، آب جوی را در استخری وارد می‌کنند و پس از آن که آب استخر به مقدار کافی انباشته شد، زیر آب استخر را می‌زنند. بدین ترتیب، آب استخر را با دبی کافی به مقصد می‌رسانند.

مسأله‌ی زیر همانند مسأله‌ی حوض با فواره و زیر آب مذکور در شماره‌ی (۲) است، اما به طور مناسب‌تر طرح شده است:

استخری دارای مجرای آبی است که آن را در دو روز پر می‌کند و زیر آبی که آن را در چهار ساعت تخلیه می‌کند. به فرض آن که آب در استخر تا نیمه باشد و مجرای آب باز باشد، اگر زیر آب استخر را باز کنیم، استخر در چه مدت تخلیه می‌شود؟

زیرنویس

۱. نقل از کتاب کشکول شیخ بهایی

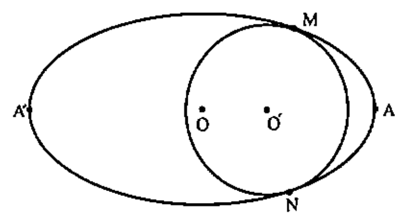
2. Debit

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

دایره‌های محاط در بیضی

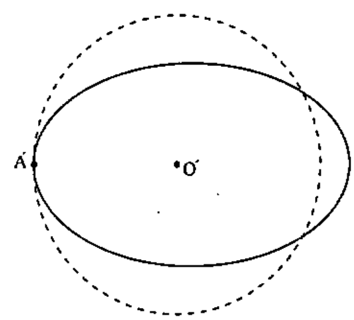
حسین کریمی

مسأله. بیضی با خروج از مرکز e مفروض است. مطلوب است، احتمال پیدا کردن نقطه‌ای بین دو رأس کانونی که بتوان دایره‌ای به مرکز آن نقطه رسم کرد تا بر بیضی در دو نقطه مماس باشد. (شکل۱)



(شکل۱)

پیش‌نیاز: برای حل مسأله یادآوری چهار مطلب لازم است. اما قبل از بیان آن‌ها ضرورت دارد، به این نکته توجه کنیم که اگر می‌خواستیم دایره در حداقل یک نقطه و یا حداکثر دو نقطه بر بیضی مماس باشد، هر نقطه بین دو رأس کانونی را می‌توانستیم به عنوان مرکز دایره فرض کنیم. زیرا اگر O' نقطه‌ای غیر از مرکز بیضی و بین دو رأس کانونی A و A' باشد، آن‌گاه دایره‌هایی به مرکز O' و به شعاع‌های $O'A$ و $O'A'$ دایره‌هایی بودند که بر بیضی در یک نقطه مماس می‌شوند. در این صورت، احتمال مورد نظر برابر ۱ می‌شد. (شکل‌های ۲، ۳ و ۴)



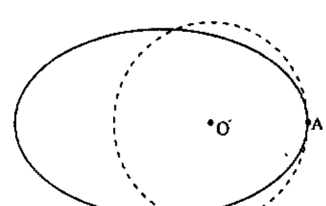
(شکل۲)

۱. زاویه‌ی بین دو منحنی، زاویه‌ای است که بین خطوط مماس بر دو منحنی در نقطه‌ی تماس حاصل می‌شود. بدین ترتیب، دو منحنی را مماس بر هم گوییم، هرگاه در نقطه‌ی تماس، دارای خط مماس مشترک باشند. (شکل‌های ۵ و ۶)

۲. اگر M نقطه‌ای از بیضی به کانون‌های F و F' باشد، خطوط مماس و قائم که بر بیضی از نقطه‌ی M رسم شده‌اند، به ترتیب نیمساز زاویه خارجی و داخلی $F'\hat{M}F$ خواهند بود (خاصیت انعکاسی در بیضی). (شکل۷)

۳. در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. (شکل۸)

$$\frac{F'O'}{O'F} = \frac{MF'}{MF}$$

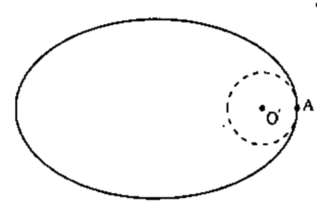


(شکل۳)

۴. اگر M نقطه‌ای از بیضی به کانون F باشد، در این صورت: $MF \geq a - c$ و $MF \leq a + c$.

با توجه به مطالب گفته شده به حل مسأله می‌پردازیم.

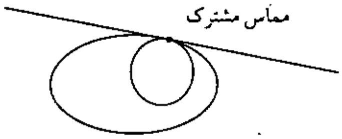
حل: فرض کنیم دایره‌ی $C(O', R)$ بر بیضی در دو نقطه‌ی M و N مماس است که در آن، O' (مرکز دایره) نقطه‌ای از قطر اصلی بیضی (بین دو رأس کانونی) است.



(شکل۴)

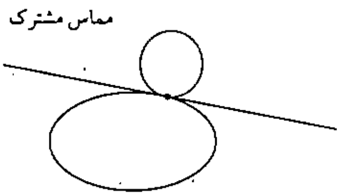
با توجه به پیش‌نیاز۱ ، خط Δ در نقطه‌ی M بر هر دو منحنی مماس و خط Δ' در آن نقطه بر هر دو منحنی قائم است. همچنین، با توجه به پیش‌نیاز۲ ، Δ' نیمساز زاویه‌ی $F'\hat{M}F$ است و با توجه به پیش‌نیاز۳ داریم: $\frac{MF'}{MF}=\frac{F'O'}{O'F}$ (شکل۹)

حال اگر فاصله‌ی O' را تا O (مرکز بیضی) برابر با x، و فاصله‌ی هر کانون را از مرکز بیضی، c در نظر بگیریم، داریم:



(شکل۵)

$$\begin{cases} F'O' = c + a \\ O'F = c - x \end{cases}$$



(شکل۶)

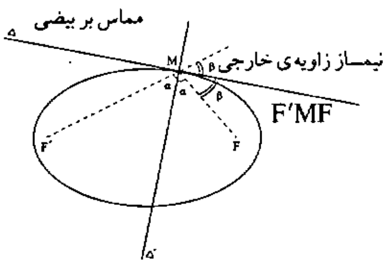
پس:

$$\frac{F'O'}{O'F}=\frac{MF'}{MF}\Rightarrow\frac{c+x}{c-x}=\frac{MF'}{MF}\Rightarrow\frac{c+x+c-x}{c-x}=\frac{MF'+MF}{MF}$$

با توجه به این‌که M نقطه‌ای از بیضی است، بنابراین:

$$MF' + MF = ۲a$$

نیمساز سازویه‌ی F'MF



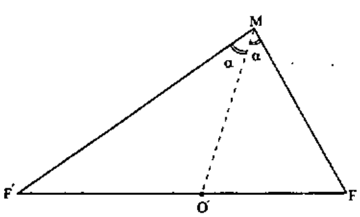
(شکل۷)

$$\Rightarrow\frac{۲c}{c-x}=\frac{۲a}{MF}\Rightarrow ac-ax=c.MF\Rightarrow a-\frac{a}{c}x=MF$$

که با توجه به پیش‌نیاز۴ داریم:

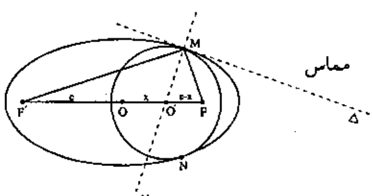
$$a-\frac{a}{c}x\ge a-c\Rightarrow x\le\frac{c^۲}{a}$$

و این نشان می‌دهد که فاصله‌ی O' (مرکز دایره) از O (مرکز بیضی) حداکثر برابر $\frac{c^۲}{a}$ است. توجه شود که برای مثال، هرگز نمی‌توان دایره‌ای به مرکز کانون بیضی رسم کرد که بر بیضی در دو نقطه مماس باشد. پس اگر احتمال مورد نظر مسأله را با P نشان دهیم و بدون آن‌که خللی به کلیت مسأله وارد شود، فرض کنیم محور طول‌ها، محور کانونی و مبدأ مختصات، مرکز بیضی باشد که با توجه به: $|OO'| = x \le \frac{c^۲}{a}$


(شکل۸)

داریم: $\frac{-c^۲}{a}\le\overline{OO'}\le\frac{c^۲}{a}$ ، پس خواهیم داشت:

$$P=\frac{\text{طول بازه‌ی ساعد}}{\text{طول بازه‌ی ممکن}}=\frac{\left|\left[\frac{-c^۲}{a},\frac{c^۲}{a}\right]\right|}{|[-a,a]|}=\frac{\frac{۲c^۲}{a}}{۲a}=\frac{c^۲}{a^۲}=e^۲.$$



(شکل۹)

تذکر: بدیهی است، اگر می‌خواستیم O' بین دو کانون F و F' انتخاب شود، در آن صورت احتمال برابر با e می‌شد؛ زیرا: $P=\frac{\left|\left[-\frac{c^۲}{a},\frac{c^۲}{a}\right]\right|}{|[-c,c]|}=\frac{\frac{۲c^۲}{a}}{۲c}=\frac{c}{a}=e$.

سلسله درس‌هایی از ریاضیات گسسته ۵



سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

می‌دانیم که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد، توزیع اعداد اول در مجموعه‌ی اعداد طبیعی بسیار پر رمز و راز است و به ظاهر هیچ قاعده و قانونی ندارد. آن‌ها مانند علف‌های هرز در میان اعداد طبیعی رشد می‌کنند و هیچ کس نمی‌تواند پیش‌بینی کند، عدد اول بعدی کجا سبز خواهد شد. چاپ مقاله‌ای با عنوان «نخستین ۵۰ میلیون عدد اول»[1]، دید اندیشمندان و محققان ریاضی را به کلی عوض کرد و نظر فعلی آن‌ها چنین است: «اعداد اول از نظم حیرت‌آوری پیروی می‌کنند. قوانینی بر چگونگی رفتار آن‌ها حکمفرماست و این اعداد، تقریباً با انضباطی نظامی از این قوانین تبعیت می‌کنند.»

می‌دانیم که به جز نخستین دو عدد اول، یعنی ۲ و ۳، هیچ دو عدد اولی متوالی نیستند؛ زیرا همه‌ی اعداد اول غیر از ۲، فردند. بنابراین، اختلاف دو عدد اول متوالی حداقل برابر ۲ است. برای بیان این حالت، تعریف زیر را می‌آوریم:

تعریف: دو عدد اول متوالی که اختلاف آن‌ها برابر ۲ باشد را در اصطلاح «جفت دوقلو» می‌نامیم. برای مثال، جفت‌های دوقلوی «۵ و ۷»، «۱۱ و ۱۳»، «۱۷ و ۱۹»، «۲۹ و ۳۱» و «$۱۰^{۱۲}+۶۱$ و $۱۰^{۱۲}+۶۳$» نمونه‌هایی از جفت اعداد دوقلو هستند.

تاکنون در مورد نامتناهی یا متناهی بودن جفت‌های دوقلو به نتیجه‌ای دست نیافته‌اند. با استفاده از محاسبه‌گرها، تعداد ۱۵۲۹۸۲ جفت دوقلوی کوچک‌تر از ۳×۱۰^{۷} و بین $۱۰^{۱۲}$ و $۱۰^{۱۲}+۱۰۰۰۰$، ۲۰ جفت عدد دوقلو یافته‌اند که این واقعیت نشانگر رشد افزایشی ولی بسیار کند این اعداد در مجموعه‌ی

اعداد طبیعی است. به‌علاوه، نشان می‌دهند که اعداد اول تا چه حد می‌توانند نزدیک به هم باشند.

از طرف دیگر، در میان اعداد اول شکاف‌های پهناوری وجود دارند؛ شکاف‌هایی به اندازه‌ی دلخواه بزرگ در مجموعه‌ی اعداد اول. به بیان دیگر، برای هر عدد طبیعی n، به تعداد n عدد متوالی وجود دارند که همگی مرکبند؛ زیرا n عدد متوالی زیر همگی مرکبند:

$$(n+1)!+2 = 1\times 2\times 3\times\ldots\times(n+1)+2 = 2k_1+2 = 2(k_1+1)$$
$$(n+1)!+3 = 1\times 2\times 3\times\ldots\times(n+1)+3 = 3k_2+3 = 3(k_2+1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)!+(n+1) = 1\times 2\times 3\times\ldots\times(n+1)+(n+1) = (n+1)k_n+(n+1) = (n+1)(k_n+1)$$

بنابراین، در این‌جا ثابت شد که به ازای هر k با شرط $2 \le k \le n+1$، عدد $(n+1)!+k$ مرکب و بر k بخش‌پذیر است. پس برای مثال، اگر بخواهیم ۴۰ عدد متوالی نشان دهیم که در میان آن‌ها هیچ عدد اولی موجود نباشد، به‌راحتی می‌توان ۴۰ عدد: $41!+2$، $41!+3$، ... و $41!+41$، را پیشنهاد داد. با مشاهده‌ی جدول‌های اعداد اول می‌توان پذیرفت که هیچ دلیل روشنی برای این که چرا عددی اول است و عدد دیگری مرکب، وجود ندارد.

با مشاهده‌ی این اعداد، انسان خود را در برابر یکی از رازهای غیرقابل توضیح آفرینش می‌بیند. تلاش پیگیر ریاضیدانان هم سالیان سال است که نتوانسته است رمز و راز این اعداد مرموز را بشکافد. ریاضیدانان به دنبال اعداد اولی هستند که از اعداد اول شناخته شده‌ی قبلی بزرگ‌تر باشد. برای مثال، در سال ۱۸۷۶، لوکاس ثابت کرد که عدد $(2^{127}-1)$ اول است. مدت ۷۵ سال، این عدد بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده بود. دیدن این عدد ممکن است، این واقعه‌ی تاریخی را برای ما ملموس‌تر کند؛ زیرا این عدد، یک عدد ۳۹ رقمی است:

$$2^{127}-1=\overbrace{170141183460\ldots\ldots\ldots 7}^{39\ \text{رقم}}$$

از سال ۱۹۴۱، با ظهور ماشین‌های محاسبه‌گر الکترونیکی، اعداد اول بزرگ‌تری کشف شدند. از جمله کسانی که به عددهای اول بزرگ‌تری رسیدند، می‌توان فرید، میلر، ویلر، لمر، رابینسون، ریول، هورویتس، سلفویج، گیلیس، تاکرمن، نول، نیکل، اسلووینسکی، نلسون و دمبارت را نام برد. بزرگ‌ترین عدد اولی که تا سال ۱۹۸۵ شناخته شده بود، عددی ۶۵۰۵۰ رقمی بود که دمبارت آن را چنین $(2^{216091}-1)$ نمایش داد (برای آشنایی با اعداد بزرگ اول، به مقاله‌ی ارزشمند «نخستین ۵۰ میلیون عدد اول» از دان زاگیر رجوع کنید).

در حال حاضر (۲۰۰۶) عدد $(2^{30402457}-1)$ (یعنی مِرسن۴۳) بزرگ‌ترین عدد شناخته شده است.

توابع مولد اعداد اول

هر عدد اول فرد به یکی از صورت‌های $4k\pm 1$ یا $6n\pm 1$ و... می‌تواند ظاهر شود. در واقع، با هریک از این دستورها می‌توان، همه‌ی اعداد اول را تولید کرد. ولی مسأله‌ی اصلی در این‌جا، یافتن دستوری است که به ازای هر عدد طبیعی دلخواه، یک عدد اول تولید کند. یعنی دستوری یا قانونی ارائه دهیم که فقط عدد اول توزیع کند. می‌دانیم تا به حال انسان به چنین دستوری دست نیافته و فقط دستورهای خاصی نظیر: $f(n)=n^2+n+11$، $F(n)=n^2-n+41$ (دستور اویلر) و... را به‌دست آورده است که هیچ‌یک از این دستورها جوابگوی مسأله‌ی «تابع مولد اعداد اول» نخواهد شد. زیرا، اولین دستور به‌ازای $1\le n\le 9$، و دومین دستور به ازای $1\le n\le 40$، عددی اول است، ولی $f(10)=11^2$ و $F(41)=41^2$، اعداد اول نیستند و همین یک نمونه برای هریک از این دستورها کافی است تا آن‌ها را از درجه‌ی اعتبار ساقط کند.

دیریکله[2] ثابت کرد، اگر a و b نسبت به هم اول باشند، عبارت $ak+b$ به ازای اعداد طبیعی k، بی‌نهایت عدد اول تولید می‌کند. با این همه، تا به حال هیچ عبارتی به صورت $ak+b$، شناخته نشده است که فقط اعداد اول تولید کند.

مسأله: ثابت کنید، هیچ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود ندارد که مولد اعداد اول باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $f(n)$ چندجمله‌ای مولد اعداد اول باشد؛ یعنی به ازای هر n طبیعی، فقط اعداد اول تولید کند:

(a_iها اعداد صحیح و $a_k \neq 0$)

$$f(n)=a_k n^k+\ldots+a_1 n+a_0$$

به ازای عدد ثابتی مثل n_1، $f(n_1)$ عددی اول است:

$$f(n_1)=p$$

حال عبارت $f(n_1+pm)$ را به ازای اعداد صحیح m درنظر می‌گیریم. بنابراین:

$$f(n_1+pm)=a_k(n_1+pm)^k+\ldots+a_1(n_1+pm)+a_0$$

$$= (a_k n_1^k + ... + a_1 n_1 + a_0) + pT(m)$$
$$= p + pT(m)$$
$$= p(1 + T(m))$$

$T(m)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است. بنابراین، $f(n)$ به ازای بی‌نهایت عدد صحیح، اعداد مرکب تولید می‌کند و این با فرض مسأله تناقض دارد.

توجه: هر چندجمله‌ای از درجه‌ی k، بیش از k مرتبه (به عدد درجه‌ی خود) نمی‌تواند یک مقدار خاص را به خود اختصاص دهد. بنابراین، $f(n)$ و حالت خاص آن $f(n_1 + pm)$، به ازای همه‌ی اعداد صحیح نمی‌توانند برابر مقدار خاصی مثل صفر یا $\pm p$ شوند.

در سال‌های اخیر، ریاضیدانان به موفقیت‌هایی در زمینه‌ی توابع مولد اعداد اول دست یافته‌اند که از همه‌ی آن‌ها مهم‌تر، قضیه‌ی میلز[3] است که ثابت می‌کند، عدد حقیقی مثبتی مثل r یافت می‌شود که در دستور زیر قرار می‌گیرد و دستور زیر:

$$n \in N: \ f(n) = \left[r^{3^n} \right] \quad (\lfloor \ \rfloor : \text{قسمت درست عدد})$$

به ازای هر n طبیعی، فقط عدد اول تولید می‌کند[4]. بدیهی است که این دستور فقط وقتی ارزش دارد که عدد حقیقی r معلوم شود؛ زیرا با این دستور، حتی یک عدد اول هم نمی‌توان ساخت.

اعداد فرما

در این‌جا، نوع خاصی از اعداد را معرفی می‌کنیم که محرکی برای پژوهش و تحقیقات فراوان در زمینه‌ی اعداد اول شده است. این نوع اعداد خاص به صورت $(2^m + 1)$ هستند. ابتدا به بررسی مسأله‌ی زیر می‌پردازیم.

مسأله: در صورتی که $(2^m + 1)$ عددی اول باشد، ثابت کنید m باید به صورت توانی از ۲ باشد:

$$2^m + 1 = \text{عدد اول} \Rightarrow m = 2^n$$

اثبات: با فرض این که m توانی از ۲ نباشد، به تناقض خواهیم رسید. زیرا، اگر m دارای یک شمارنده‌ی فرد مثل $2k + 1$ $(k \geq 1)$ باشد:

$$m = (2k + 1)s$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$2^m + 1 = 2^{(2k+1)s} + 1 = (2^s)^{2k+1} + 1$$
$$= (2^s + 1)(2^{2ks} - 2^{(2k-1)s} + ... + 2^{2s} - 2^s + 1)$$

یعنی $2^m + 1$، در صورتی که m دارای شمارنده‌ی فرد باشد، دارای تجزیه‌ی نابدیهی است و این خلاف اول بودن $2^m + 1$ است.

تعریف: هر عدد به صورت $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n \geq 0)$ را «عدد فرما» گویند و اگر F_n اول باشد، آن را عدد اول فرما می‌نامند.

نکته: همه‌ی اعدادی که به صورت $(n^{n^n} + 1)$ هستند، به ازای هر $n > 1$ (طبیعی) وقتی اولند که n به صورت $2^{2^k} (k \geq 0)$ باشد. فرما، که اغلب حدس‌هایش مورد توجه ریاضیدانان بوده است، مشاهده کرد که F_n به ازای $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$، عددی اول است:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3 \ , \ F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5 \ , \ F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257 \ , \ F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

بنابراین، تصور کرد که همه‌ی F_nها اولند. فرما در نامه‌ای که به مرسن نوشت، متذکر شد که من اعدادی به صورت $2^{2^n} + 1$ یافته‌ام که همیشه اولند و ریاضیدانان سال‌های بعد درستی آن را خواهند فهمید. در سال ۱۷۳۲، اویلر نشان داد که عدد F_5 مرکب است و عدد F_5 بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

در سال‌های بعد، ثابت شد که F_6 و F_7 نیز مرکب است. در مورد عدد F_8 و عددهای بعدی[5] نیز همچنان مبارزه ادامه داشت، تا این که ثابت شد، F_8 نیز مرکب است، ولی مدت‌ها قادر به تجزیه‌ی آن نشده بودند تا سرانجام با عرضه‌ی ماشین‌های محاسبه‌گر جدید، این مشکل هم مرتفع شد.

تا امروز معلوم نشده است که آیا تعداد اعداد اول فرما محدود است یا نامحدود. در خاتمه، درباره‌ی اعداد اول فرما همین بس که تا به حال یک عدد اول بزرگ‌تر از F_4 هم یافت نشده است.

اعداد مرسن

در ریاضیات، اعداد به صورت $M_n = 2^n - 1$ را به نام کشیش فرانسوی، مارین مرسن[6] [۱۶۴۸ـ۱۵۸۸] «اعداد مرسن» نامیده‌اند؛ چرا که مرسن در زمینه‌ی اول بودن این نوع اعداد، اظهارنظری نادرست اما محرک کرده بود که سبب پژوهش‌ها و تحقیقات بسیاری در رابطه با اعداد اول شد.

تعریف: هر عدد به صورت $M_n = 2^n - 1$ که اول باشد را، عدد اول مرسن می‌نامند. در سال ۱۶۴۴، مرسن اظهار داشت که عدد $M_p = 2^p - 1$ به ازای اعداد اول زیر:

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

عددی اول و به ازای سایر اعداد $p < 257$ عدد M_p مرکب است.

ریاضیدانان معتقدند که به یقین، مرسن همه‌ی اعدادی را که ادعا کرده بود اول هستند، آزمایش نکرده بود. سال‌ها بعد، اویلر ثابت کرد که عدد $M_{31} = 2^{31} - 1$ اول است. ولی نظری روی اعداد M_{67}، M_{127} و M_{257} نداشت، زیرا این اعداد بسیار بزرگ و دور از دسترس او بودند. در حال حاضر می‌دانیم که مرسن ۵ خطا داشته است؛ یعنی M_{67} و M_{257} را به خطا تصور کرده بود اول هستند و M_{61}، M_{89} و M_{107} را از زمره‌ی اعداد اول حذف کرده بود.

در اکتبر سال ۱۹۰۳، ریاضیدانی آمریکایی به نام **نلسون کول**[7] مقاله‌ای تحت عنوان «تجزیه‌ی اعداد بزرگ» به «انجمن ریاضی آمریکا» ارایه داد. پس از آن که او را به جایگاه سخنرانی دعوت کردند، پیش چشم حاضران روی تخته‌ی سیاه، عدد ۲ را ۶۷ بار در خودش ضرب کرد و به دقت یک واحد از آن کم کرد. در واقع عدد $M_{67} = 2^{67} - 1$ را حساب کرد. سپس بدون این که کلمه‌ای بگوید در گوشه‌ی دیگر تخته‌ی سیاه، حاصل ضرب زیر را نوشت:

$$193707721 \times 761838257287$$

این حاصل ضرب به طور دقیق برابر عددی بود که از محاسبه‌ی $2^{67} - 1$ به دست آورده بود. مدت‌ها بعد، به یکی از دوستانش گفته بود که او ۲۰ سال تمام عصر یکشنبه‌های خود را صرف یافتن عوامل عدد $M_{67} = 2^{67} - 1$ کرده بود (همان طور که ثابت شد و دیدیم که اگر $2^p - 1$ اول باشد، p اول است).

مسأله: ثابت کنید که عدد $M_{237} = 2^{237} - 1$، مرکب است. سپس یکی از عامل‌های نابدیهی آن را بیابید.

اثبات: چون $3 | p = 237$، پس M_{237} عددی مرکب است. یکی از عامل‌های نابدیهی آن از تجزیه‌ی M_{237} به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} M_{237} &= 2^{237} - 1 = (2^3)^{79} - 1 \\ &= (2^3 - 1)\underbrace{\left[(2^3)^{78} + (2^3)^{77} + \ldots + (2^3) + 1\right]}_{k} \end{aligned}$$

$$M_{237} = 2^{237} - 1 = 7k \Rightarrow 7 | M_{237} = 2^{237} - 1$$

پس، عامل نابدیهی آن، عدد ۷ است.

تمرین: یکی از عامل‌های نابدیهی M_{202}، M_{91} و M_{21} را بیابید و نشان دهید M_{11} و M_{23} اولند.

زیرنویس

۱. خلاصه‌ای از این مقاله، در مجله‌ی نشر ریاضی، سال ۱، شماره‌ی ۳ آذرماه ۱۳۶۷ درج شده است.

2. Dirichlet

3. W.H.Mills

(برهان این قضیه در جلد دوم، قسمت دوم، تئوری اعداد دکتر مصاحب آمده است.)

۴. در حالت کلی قضیه برای $f(n) = \left\lfloor \theta^{c^n} \right\rfloor$، به ازای هر n طبیعی و هر $c > \frac{61}{23}$ (ناکم‌تر از ۳) برقرار است.

۵. هر مقسوم‌علیه عدد $F_n (n > 1)$ به صورت $2^{n+2}k + 1$ است (قضیه‌ی لوکا).

6. Marin Mersenne

7. Nelson Cole

8. Faber

9. Worldwide

۱۰. چنین فرمولی در تاریخ ۱۳۸۲/۵/۱۴ (سال ۲۰۰۳ میلادی) توسط مؤلف کشف شده است که نتایج بسیاری را در بر داشته است. از جمله «حل معادله‌ی زتای ریمان» است (این مسأله یکی از هفت مسأله‌ی لاینحل جهانی است) - . برای اطلاع بیشتر از این اکتشاف بزرگ قرن (مسأله لاینحل ۲۳۰۰ ساله) می‌توانید به کتابی تحت عنوان «کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن» که توسط مؤسسه (انتشاراتی) استاندارد بین‌المللی (ISI) به نام Brill/VSP کشور هلند (VSP آمریکا) به چاپ خواهد رسید، رجوع شود.

همچنین می‌توانید به سایت مؤلف نیز رجوع کنید:

www.primenumbersformula.com

سایت‌های انتشارات Brill/VSP:

www.brill.nl

www.vsppub.com

نام کتاب: (این کتاب به توسط انتشارات معراج قلم چاپ شده است).

"The discovery of prime numbers formula and its results"

(ISBN: 964-93227-7-9)

یکی از فرمول‌های اعداد اول که با توجه به قضیه‌ی ویلسن توسط مؤلف ارائه شده است را می‌آوریم:

$$H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{2m+1}{(2m)!+1} \left\lfloor \frac{(2m)!+1}{2m+1} \right\rfloor \right\rfloor}$$

$$\begin{aligned} D_H = \mathbb{N}, \quad R_H = \mathbb{P} &= \{3,5,7,2,11,13,2,17,19,\ldots\} \\ &= \{2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{N} : H(m) = 2\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\Delta_m} \right\} \end{aligned}$$

مقاله‌ای تحت عنوان «کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن» در ادامه مطالب ارائه خواهد شد و از فرمول‌های اصلی و نتایج آن که در مجله‌ی ISI به نام "Acta Applicandae Mathematicae" به چاپ خواهد رسید با اطلاع خواهید شد.

۳

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف دنیا

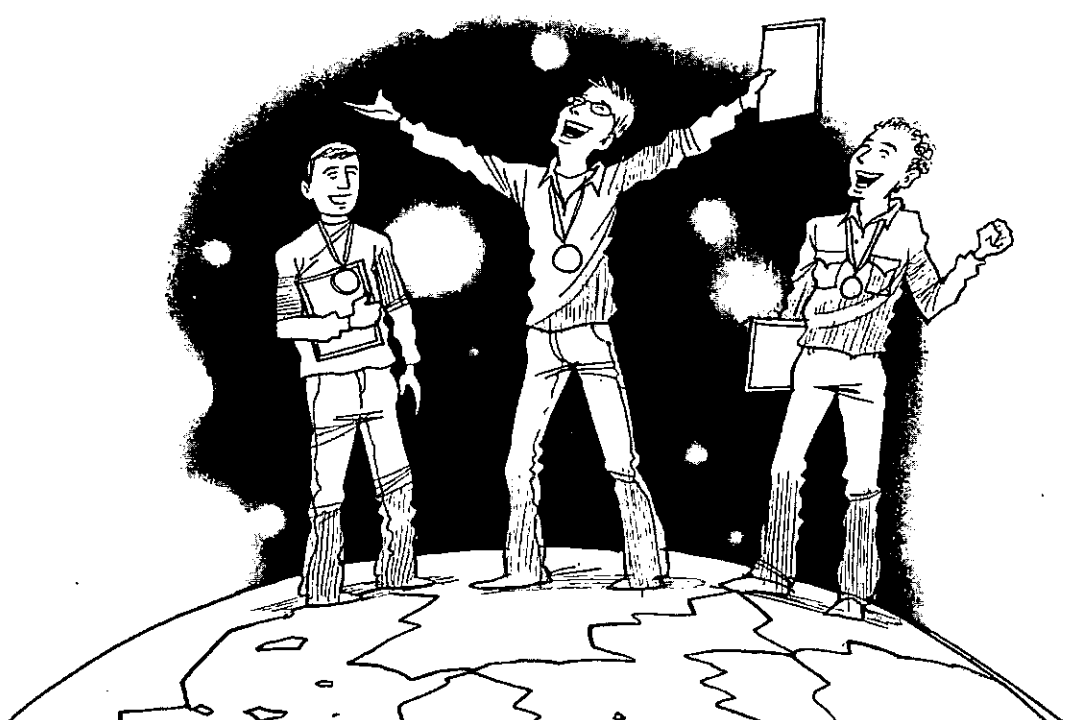
مسابقه‌ی ریاضی اسکاتلند/ رقابت ریاضی ۲۰۰۲ - ۲۰۰۱

هوشنگ شرقی

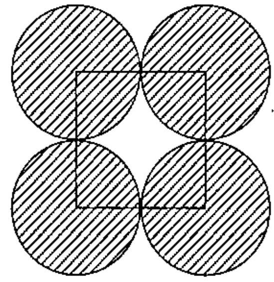
مسابقات ریاضی مدرسه‌های اسکاتلند، هر سال یک‌بار در دو سطح متفاوت برگزار می‌شوند. دانش‌آموزان به صورت انفرادی و بدون کمک و با استفاده از کتاب‌های راهنما باید در این آزمون شرکت کنند و پاسخ سؤالات باید کامل و با تشریح همراه باشد. پاسخ‌های بدون توضیح هیچ امتیازی ندارند. در این‌جا سؤالات سطح دوم را که مناسب‌تر بوده‌اند، از آزمون سال ۲۰۰۲ - ۲۰۰۱، همراه با حل تشریحی آن‌ها برای شما آورده‌ایم. سعی کنید قبل از دیدن راه‌حل‌ها به اندازه‌ی کافی با مسائل درگیر شوید!

صورت سؤال‌ها

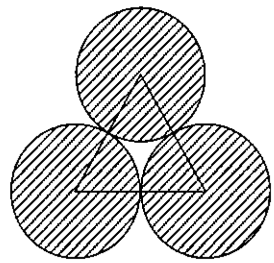
۱. دو صفحه‌ی نامتناهی، شامل قرص‌های



دایره‌ای‌شکل، مطابق شکل صفحه‌ی بعد هستند.



(شکل ۱)

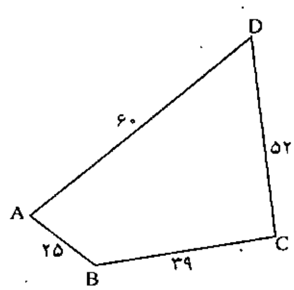


(شکل ۲)

در (شکل ۱)، مرکزهای قرص‌ها روی گوشه‌های یک مربع و در (شکل ۲) مرکزها روی گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. نسبت مساحت بخش‌هایی که هاشور زده نشده‌اند را در هر حالت، به مساحت قرص به دست آورید.

۲. عدد ۱۳، عامل هر سه عدد ۱۲۳۱۲۳ , ۵۳۶۵۳۶ و ۸۷۰۸۷۰ است. نشان دهید که عدد ۱۳، همه‌ی آن عددهای شش‌رقمی را می‌شمارد که سه رقم نخست آن‌ها با سه رقم بعدی یکسان است. آیا می‌توانید، همه‌ی اعدادی (به غیر از ۱) را بیابید که همه‌ی عددهای ۸رقمی مانند ۱۲۳۴۱۲۳۴ و ۳۷۵۲۳۷۵۲ را می‌شمارند، به طوری که چهار رقم نخست آن‌ها با چهار رقم بعدی برابر باشد؟ نظرتان راجع به عددهای چهاررقمی مانند ۱۲۱۲ و ۴۷۴۷ چیست؟

۳. در چهارضلعی ABCD مطابق شکل زیر، همه‌ی زوایای داخلی کم‌تر از °۱۸۰ هستند (یعنی چهارضلعی محدب است. مترجم) و طول اضلاع AB، BC، CD و DA به‌ترتیب مساوی ۲۵ , ۳۹, ۵۲ و ۶۰ واحد است. ثابت کنید، اگر BCD∠ کم‌تر از °۹۰ باشد، DAB∠ نیز کم‌تر از °۹۰ است.



۴. دو رقم در عدد ۹رقمی ۲۴۷ـ ـ ۳۲۱۳ مفقود شده‌اند. عددهای مفقودشده را چنان پیدا کنید که این عدد بر ۱۶۹ بخش‌پذیر باشد.

۵. شکل زیر یک مربع ۵×۵ را نشان می‌دهد:

۴	۲	۴	۰۱	۴
۲				۱
۲				۴
۵				۴
۲	۵	۳	۳	۲

مربع‌های اضلاع بیرونی با عددهایی که مشاهده می‌کنید، پر شده‌اند. ثابت کنید با پر کردن مربع‌های دیگر، فقط با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نمی‌توان این مربع را به مربع وفقی (جادویی) تبدیل کرد، به طوری که مجموع عددهای واقع بر تمام ردیف‌ها و ستون‌ها و دو قطر اصلی مربع با یکدیگر برابر باشند.

حل مسائل

۱. این یک مسأله‌ی تکراری است که بارها و بارها در کتاب‌ها، مجلات و مسابقه‌های گوناگون مطرح شده است. در هر دو مورد، با کمی دقت درمی‌یابید که طول ضلع مربع وسط و یا مثلث متساوی‌الاضلاع وسط، مساوی قطر دایره‌ها (دو برابر شعاع آن‌ها) است. بنابراین در شکل اول، مساحت مربع وسط برابر است با: $S_1 = a^2 = (2R)^2 = 4R^2$ و در شکل دوم: $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2R)^2 = \sqrt{3}R^2$.

اما در شکل اول، اگر قسمت هاشور نزده را از مربع وسط برداریم، چهار قطاع باقی می‌ماند که با هم برابر و زاویه‌های آن‌ها °۹۰ است. از کنار هم قرار دادن این چهار قطاع یک دایره‌ی کامل به وجود می‌آید (مرکزهای چهار قطاع را روی هم بگذارید و شعاع‌های آن‌ها را دوبه‌دو بر هم منطبق کنید). بنابراین، مساحت ناحیه‌ها هاشور نزده برابر است با مساحت مربع منهای مساحت یک دایره:

$$S'_1 = S_1 - \pi R^2 = 4R^2 - \pi R^2 = (4 - \pi)R^2$$

و نسبت آن به مساحت قرص برابر است با:

$$\frac{S'_۱}{S}=\frac{(۴-\pi)R^۲}{\pi R^۲}=\frac{۴-\pi}{\pi}=\frac{۴}{\pi}-۱\approx ۰/۲۷$$

و در حالت دوم، با استدلالی مشابه، سه قطاع داریم که زاویه‌ی آن‌ها °۶۰ است و اگر آن‌ها را کنار هم بگذاریم، یک نیم‌دایره حاصل می‌شود. درنتیجه داریم:

$$S'_۲=S_۲-\frac{\pi R^۲}{۲}=\sqrt{۳}R^۲-\frac{\pi R^۲}{۲}=(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})R^۲\Rightarrow$$

$$\frac{S'_۲}{S}=\frac{(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})R^۲}{\pi R^۲}=\frac{\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}}{\pi}=\frac{\sqrt{۳}}{\pi}-\frac{۱}{۲}\approx ۰/۰۵۱$$

۲. درواقع باید تمام عددهای شش‌رقمی به شکل $\overline{abcabc}$ را بیابیم که بر ۱۳ بخش‌پذیر باشند. پس می‌نویسیم:

$$\overline{abcabc}=c+۱۰b+۱۰۰a+۱۰۰۰c+۱۰۰۰۰b+۱۰۰۰۰۰a=$$
$$۱۰۰۱c+۱۰۰۱۰b+۱۰۰۱۰۰a=۱۰۰۱(۱۰۰a+۱۰b+c)=$$
$$۱۳\times ۱۱\times ۷\times \overline{abc}=۱۳k$$

یعنی همه‌ی عددهای شش‌رقمی به این صورت، بر ۱۳ بخش‌پذیرند. در مورد عددهای هشت‌رقمی داریم:

$$\overline{abcdabcd}=d+۱۰c+۱۰۰b+۱۰۰۰a+۱۰۰۰۰d+۱۰۰۰۰۰c+$$
$$۱۰۰۰۰۰۰b+۱۰۰۰۰۰۰۰a=۱۰۰۰۱۰۰۰a+۱۰۰۰۱۰۰b+$$
$$۱۰۰۰۱۰c+۱۰۰۰۱d=۱۰۰۰۱(۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d)=$$
$$۷۳\times ۱۳۷\times \overline{abcd}$$

پس می‌توان گفت، این گونه عددها همواره بر ۷۳ و ۱۳۷ بخش‌پذیرند. در مورد عددهای چهاررقمی نیز می‌توان نوشت:

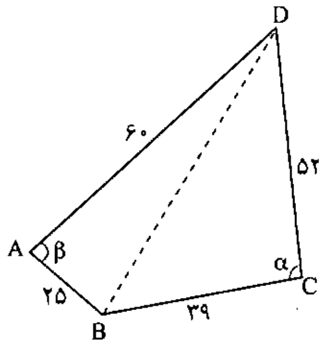
$$\overline{abab}=b+۱۰a+۱۰۰b+۱۰۰۰a=۱۰۱۰a+۱۰۱b$$
$$=۱۰۱(۱۰a+b)=۱۰۱\overline{ab}$$

و چون ۱۰۱ عددی است اول، درنتیجه می‌توان گفت، فقط این گونه اعداد همواره بر ۱۰۱ بخش‌پذیرند.

۳. مطابق شکل و به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث‌های BCD و ABD می‌توان نوشت:

$$\Delta BCD:\alpha<۹۰^\circ\Rightarrow \cos\alpha>۰$$
$$BD^۲=BC^۲+CD^۲-۲BC.CD.\cos\alpha=$$
$$۱۵۲۱+۲۷۰۴-۴۰۵۶\cos\alpha=۴۲۲۵-۴۰۵۶\cos\alpha$$
$$\Delta DAB: BD^۲=AD^۲+AB^۲-۲AD.AB\cos\beta=$$
$$۳۶۰۰+۶۲۵-۳۰۰۰\cos\beta=۴۲۲۵-۳۰۰۰\cos\beta\Rightarrow$$
$$۴۲۲۵-۴۰۵۶\cos\alpha=۴۲۲۵-۳۰۰۰\cos\beta\Rightarrow$$
$$\cos\beta=\frac{۴۰۵۶\cos\alpha}{۳۰۰۰}$$

و $\cos\alpha>۰\Rightarrow\cos\beta>۰\Rightarrow B<۹۰^\circ$



۴. در مسأله‌ی ۲، دیدیم که $۱۰۰۱=۱۳\times ۷۷$ و درنتیجه: $۱۳|۱۰۰۱$ و از آن‌جا: $۱۰۰۰\overset{۱۳}{\equiv}-۱$، و بنابراین:

$$۱۰^۶\overset{۱۳}{\equiv}۱ \text{ و } ۱۰^۵\overset{۱۳}{\equiv}۳۰\overset{۱۳}{\equiv}۴ \text{ و } ۱۰^۴\overset{۱۳}{\equiv}-۱۰\overset{۱۳}{\equiv}۳ \text{ و } ۱۰^۳\overset{۱۳}{\equiv}-۱$$
$$۱۰^۸\overset{۱۳}{\equiv}-۴ \text{ و } ۱۰^۷\overset{۱۳}{\equiv}-۳$$

و به همین ترتیب داریم:

$$۱۰^۶\overset{۱۶۹}{\equiv}۲۷ \text{ و } ۱۰^۵\overset{۱۶۹}{\equiv}-۴۸ \text{ و } ۱۰^۴\overset{۱۶۹}{\equiv}۲۹ \text{ و } ۱۰^۳\overset{۱۶۹}{\equiv}-۱۴$$
$$۱۰^۸\overset{۱۶۹}{\equiv}-۴ \text{ و } ۱۰^۷\overset{۱۶۹}{\equiv}-۶۸$$

و چون $۱۳^۲=۱۶۹$، اگر عدد نه‌رقمی فوق را مساوی a و دو زقم مفقود را به‌ترتیب x و y بنامیم (از سمت چپ)، به کمک حساب هم‌نهشتی‌ها داریم:

$$a\overset{۱۳}{\equiv}-۱۲-۶+۱+۱۲+۳x-y-۸-۱۲+۷=۳x-y-۱۸\Rightarrow$$
$$a\overset{۱۳}{\equiv}۳x-y-۵\overset{۱۳}{\equiv}۰\Rightarrow ۳x-y-۵=۱۳k\Rightarrow ۳x-y=۱۳k+۵$$

و چون x و y رقم‌های یک عددند و $۰\le x$ و $y\le ۹$، تنها $k=۰$ و ۱ قابل قبول است و از آن‌جا: $۳x-y=۵$ یا ۱۸ و برای (x و y) هفت زوج مرتب زیر به‌دست می‌آید:

(۲ و ۱) و (۳ و ۴) و (۴ و ۷) و (۶ و ۰) و (۷ و ۳) و

(۸ و ۶) و (۹ و ۹)

همچنین، با استفاده از هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۶۹ داریم:

$$a\overset{۱۶۹}{\equiv}-۱۲-۱۳۶+۲۷-۱۴۴+۲۹x-۱۴y+۲۰۰+۴۰+۷$$
$$=۲۹x-۱۴y-۱۸\Rightarrow ۲۹x-۱۴y-۱۸\overset{۱۶۹}{\equiv}۰$$
$$\Rightarrow ۲۹x-۱۴y=۱۶۹k+۱۸$$

و با امتحان کردن مقادیر بالا در این تساوی نتیجه می‌گیریم که تنها زوج مرتب (۴ و ۷) در این تساوی صدق می‌کند:

$$۲۹x-۱۴y=۲۹\times ۴-۱۴\times ۷=۱۸(k=۰)$$

درنتیجه، عدد نه‌رقمی فوق تنها می‌تواند مساوی ۳۲۱۳۴۷۲۴۷ باشد و نیز داریم:

$$۳۲۱۳۴۷۲۴۷ = ۱۶۹ \times ۱۹۰۱۴۶۳$$

۵. فرض کنید که این کار مقدور باشد و با قرار دادن عددهای $x_۱$ و $x_۲$ و... و $x_۹$ در خانه‌های جدول، مربع وفقی به‌دست آید. در این صورت طبق خاصیت مربع وفقی داریم:

۴	۱	۴	۲	۴
۱	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	۲
۴	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	۲
۴	$x_۷$	$x_۸$	$x_۹$	۵
۲	۳	۳	۵	۲

(توجه کنید که عدد اصلی مربع وفقی مساوی ۱۵ است. یعنی مجموع سطرها، ستون‌ها و قطرها مساوی ۱۵ می‌باشد.)

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۲ & (۱) \\ x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۹ & (۲) \\ x_۷ + x_۸ + x_۹ = ۶ & (۳) \\ x_۱ + x_۴ + x_۷ = ۱۱ & (۴) \\ x_۲ + x_۵ + x_۸ = ۸ & (۵) \\ x_۳ + x_۶ + x_۹ = ۸ & (۶) \\ x_۱ + x_۵ + x_۹ = ۹ & (۷) \\ x_۳ + x_۵ + x_۷ = ۹ & (۸) \end{cases}$$

اکنون ابتدا $x_۱$ را از دستگاه معادلات بالا حذف می‌کنیم. به این منظور، معادله‌ی (۱) را یک‌بار از معادله‌ی (۴) و یک‌بار از معادله‌ی (۷) کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_۲ + x_۳ - x_۴ - x_۷ = ۱ & (۱) \\ x_۲ + x_۳ - x_۵ - x_۹ = ۳ & (۲) \\ x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۹ & (۳) \\ x_۷ + x_۸ + x_۹ = ۶ & (۴) \\ x_۲ + x_۵ + x_۸ = ۸ & (۵) \\ x_۳ + x_۶ + x_۹ = ۸ & (۶) \\ x_۳ + x_۵ + x_۷ = ۹ & (۷) \end{cases}$$

حال در دستگاه جدید $x_۲$ را حذف می‌کنیم. برای این کار، معادله‌ی (۲) را یک‌بار از معادله‌ی (۱) و یک بار از معادله‌ی (۵) کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} -x_۵ - x_۹ + x_۴ + x_۷ = ۲ & (۱) \\ ۲x_۵ - x_۳ + x_۸ + x_۹ = ۵ & (۲) \\ x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۹ & (۳) \\ x_۷ + x_۸ + x_۹ = ۶ & (۴) \\ x_۳ + x_۶ + x_۹ = ۸ & (۵) \\ x_۳ + x_۵ + x_۷ = ۹ & (۶) \end{cases}$$

سپس در این دستگاه $x_۳$ را حذف می‌کنیم. به این منظور، معادله‌ی (۲) را یک‌بار با معادله‌ی (۵) و یک‌بار با معادله‌ی (۶) جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x_۵ + x_۸ + ۲x_۹ + x_۶ = ۱۴ & (۱) \\ ۳x_۵ + x_۸ + x_۹ + x_۷ = ۱۴ & (۲) \\ -x_۵ - x_۹ + x_۴ + x_۷ = ۲ & (۳) \\ x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۹ & (۴) \\ x_۷ + x_۸ + x_۹ = ۶ & (۵) \end{cases}$$

در این دستگاه، معادله‌ی (۴) را از معادله‌ی (۳) کم، و $x_۴$ را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x_۵ + x_۶ + x_۹ - x_۷ = ۷ & (۱) \\ ۲x_۵ + x_۸ + ۲x_۹ + x_۶ = ۱۳ & (۲) \\ ۳x_۵ + x_۸ + x_۹ + x_۷ = ۱۴ & (۳) \\ x_۷ + x_۸ + x_۹ = ۶ & (۴) \end{cases}$$

حال در این دستگاه، معادله‌ی (۳) را از معادله‌ی (۴) کم می‌کنیم:

$$۳x_۵ = ۸ \Rightarrow x_۵ = \frac{۸}{۳}$$

و این غیرقابل قبول است!





قرینه یابی در فضا

درس هایی از هندسه‌ی تحلیلی

۱

برای دانش آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

میرشهرام صدر

اشاره

دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، معمولاً در آزمون‌های متعددی شرکت می‌کنند و در بعضی از آن‌ها با مسائلی از درس هندسه‌ی تحلیلی روبه‌رو می‌شوند که به‌طور مستقیم از کتاب درسی طرح نشده‌اند، ولی با توجه به مطالبی که در کتاب درسی وجود دارد، می‌توانند به این‌گونه مسائل پاسخ دهند. یکی از این مباحث، قرینه‌یابی در فضاست. در این سلسله مقاله‌ها سعی می‌کنیم، قرینه‌یابی در فضا را با شرح و بسط کامل ارائه دهیم. سپس مسائل آن را هم به روش تشریحی و هم با روش کوتاه، حل خواهیم کرد.

مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط

اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ ، آن‌گاه مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB برابر است با:

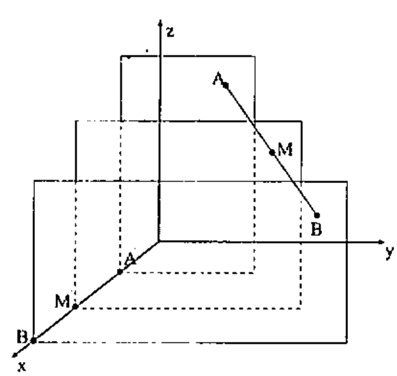
$$x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲},y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲},z_M=\frac{z_۱+z_۲}{۲}$$

اثبات ـ روش اول: از نقطه‌های A و B و M سه صفحه بر محور xها عمود می‌کنیم تا این محور را به ترتیب در A' و B' و M' قطع کنند. می‌دانیم که $x_۱=\overline{oA'}$ و $x_۲=\overline{oB'}$ و $x_M=\overline{oM'}$. بنا به قضیه‌ی تالس در فضا، چون AM=MB ، پس $A'M'=M'B'$ ، یعنی نقطه‌ی M' وسط پاره‌خط $A'B'$ است. بنابراین داریم:

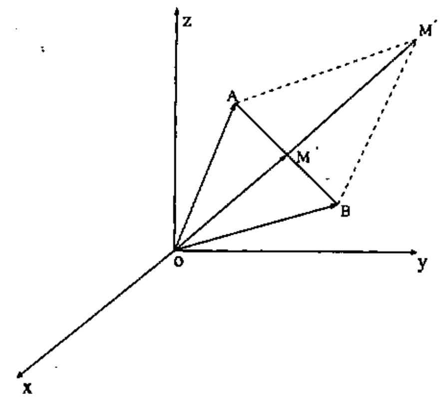
$$x_{M'}=\frac{x_{A'}+x_{B'}}{۲}\Rightarrow x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$$

به روش مشابه ثابت می‌شود که:

$$y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲},z_M=\frac{z_۱+z_۲}{۲}$$



روش دوم:



با توجه به جمع بردارها به روش متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\vec{oM'} = \vec{oA} + \vec{oB}$$

از طرف دیگر $\vec{oM'} = 2\vec{oM}$ و در نتیجه داریم:

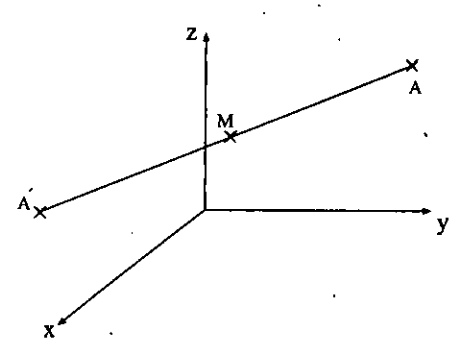
$$2\vec{oM} = \vec{oA} + \vec{oB} \Rightarrow \vec{oM} = \frac{\vec{oA} + \vec{oB}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{oM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر

برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به نقطه‌ی $M(a,b,c)$، ابتدا خطی از A به M وصل می‌کنیم. سپس از M روی همان امتداد به اندازه‌ی AM پاره‌خطی را جدا می‌کنیم تا نقطه‌ی ′A به‌دست آید. بنا به تعریف، ′A را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مرکز M می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی ′A، به این نکته توجه می‌کنیم که M وسط پاره‌خط ′AA است. در نتیجه خواهیم داشت:



$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \Rightarrow z_{A'} = 2z_M - z_A$$

بنابراین، مختصات ′A برابر است با:

$$A' \begin{vmatrix} 2a - x_0 \\ 2b - y_0 \\ 2c - z_0 \end{vmatrix}$$

مسأله‌ی ۱: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,2,3)$ نسبت به نقطه‌ی M، روی صفحه‌ای به معادله‌ی $D: x + y + z = 2$ قرار دارد. مکان هندسی نقطه‌ی M را به‌دست آورید.

حل: چنانچه $A'(x_{A'}; x_{B'}, x_{C'})$ قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,2,3)$ نسبت به نقطه‌ی $M(x_M, y_M; z_M)$ باشد، چون ′A روی صفحه‌ی D واقع است، بنابراین خواهیم داشت:

$$A' \in D \Rightarrow x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_M - 1 \\ y_{A'} = 2y_M - 2 \\ z_{A'} = 2z_M - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{A'} + y_{A'} + z_{A'} = 2(x_M + y_M + z_M) - 6 \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$x_M + y_M + z_M = 4$$

در نتیجه مکان هندسی نقطه‌ی M، صفحه‌ای به معادله‌ی $D_1: x + y + z = 4$ است.

تمرین. در مسأله‌ی ۱ سه نقطه روی صفحه‌ی D_1 در نظر بگیرید. سپس تحقیق کنید که قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به این نقاط روی صفحه‌ی D واقع است.

تصویر قائم نقطه روی خط

برای یافتن تصویر قائم نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به خط به معادله‌ی $d: \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$، از A عمودی بر d رسم می‌کنیم تا این خط را در نقطه‌ی H قطع کند. بنابه تعریف، H را تصویر قائم نقطه‌ی A روی خط d می‌گوییم. برای یافتن مختصات H کافی است این مراحل را انجام دهیم:

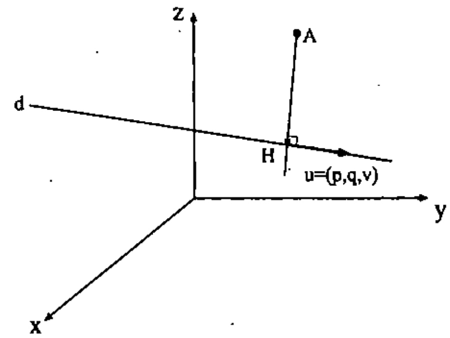
مرحله‌ی ۱: معادله‌ی پارامتری خط d را می‌نویسیم:

$$d: \begin{cases} x = pt + a \\ y = qt + b \\ z = rt + c \end{cases}$$

مرحله‌ی ۲: چون $H \in d$، بنابراین مختصات پارامتری

H را می‌نویسیم:

$$H\in d \Rightarrow \exists t'\in \mathbb{R}: H\left|\begin{array}{l} pt'+a \\ qt'+b \\ rt'+c\end{array}\right.$$



مرحله‌ی ۳: معادله‌ی برداری $\vec{AH}$ را می‌نویسیم:

$$\vec{AH}=(pt'+a-x,\ qt'+b-y,\ rt'+c-z)$$

مرحله‌ی ۴: از آن‌جا که امتداد بردار $\vec{AH}$ بر امتداد بردار هادی خط یعنی $\vec{u}=(p,q,r)$ عمود است، داریم:

$$\vec{AH}\perp\vec{u}\Rightarrow \vec{AH}.\vec{u}=0$$

از رابطه‌ی $\vec{AH}.\vec{u}=0$ مقدار پارامتری t' محاسبه می‌شود. در نتیجه مختصات نقطه‌ی H به‌دست می‌آید.

مسأله‌ی ۲: تصویر قائم نقطه‌ی $A(1,-1,2)$ را روی خط d به معادله‌ی $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$ به‌دست آورید.

حل

مرحله‌ی ۱: معادله‌ی پارامتری خط d را می‌نویسیم:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=-t+2 \\ z=2t-3\end{cases}$$

مرحله‌ی ۲: مختصات پارامتری نقطه‌ی H را می‌نویسیم:

$$H\in d \Rightarrow \exists t'\in \mathbb{R}: H\left|\begin{array}{l} t' \\ -t'+2 \\ 2t'-3\end{array}\right.$$

مرحله‌ی ۳: معادله‌ی برداری $\vec{AH}$ را می‌نویسیم:

$$\vec{AH}=(t'-1,\ -t'+2+1,\ 2t'-3-2)$$

$$\Rightarrow \vec{AH}=(t'-1,\ -t'+3,\ 2t'-5)$$

مرحله‌ی ۴:

$$\vec{AH}.u=0$$

$$\Rightarrow (t'-1,-t'+3,2t'-5).(1,-1,2)=0$$

$$\Rightarrow t'-1+t'-3+4t'-10=0$$

$$\Rightarrow t'=\frac{7}{3}$$

اکنون $t'=\frac{7}{3}$ را در مختصات پارامتری نقطه‌ی H قرار می‌دهیم در نتیجه داریم:

$$H(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$$

اکنون همین مسأله را به صورت یک تست می‌آوریم و راه‌حلی کوتاه برای آن ارائه می‌کنیم:

تست: تصویر قائم نقطه‌ی $A(1,-1,2)$ روی خط به معادله‌ی $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$ کدام است؟

۱. $H(-\frac{7}{3},\frac{13}{3},-\frac{23}{3})$ ۲. $H(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

۳. $H(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},-\frac{5}{3})$ ۴. $H(+\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. زیرا اگر H تصویر نقطه‌ی A روی خط d باشد، آن‌گاه الف) $H\in d$ (یعنی مختصات H در معادله‌ی خط d صدق می‌کند). ب) $\vec{AH}.\vec{u}=0$ و این رابطه‌ها فقط در گزینه‌ی ۲ صدق می‌کند.

الف. $H\in d$، زیرا مختصات آن در معادله‌ی خط d صدق می‌کند.

ب. $\vec{AH}=(\frac{7}{3}-1,-\frac{1}{3}+1,\frac{5}{3}-2)=(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$

$$\vec{AH}.\vec{u}=(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}).(1,-1,2)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$$

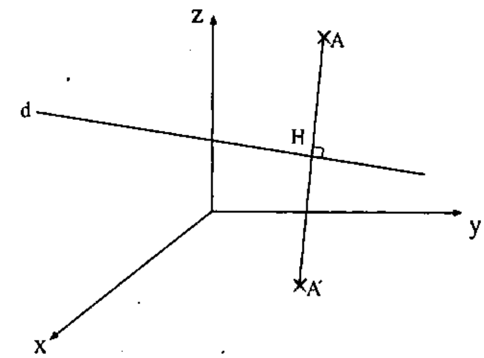
قرینه‌ی نقطه نسبت به یک خط

برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به خط به معادله‌ی $d:\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$ از A عمودی بر خط d رسم می‌کنیم تا H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی خط d به دست آید. سپس AH را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید. بنابه تعریف، A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی A' این مراحل را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱: مختصات H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی خط d را به‌دست می‌آوریم.

مرحله‌ی ۲ : چون H وسط AA' است، بنابراین با توجه به مختصات وسط پاره‌خط می‌توان مختصات A' را محاسبه کرد:

$$A'\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_0 \end{cases}$$



مسأله: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,-1,0)$ را نسبت به خط به‌معادله‌ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ به‌دست آورید.

حل:

مرحله‌ی ۱ : ابتدا مختصات تصویر نقطه‌ی A روی خط d را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

الف)
$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

ب)
$$H \in d \Rightarrow \exists t' \in Z:\ H\begin{cases} t' \\ 2t' \\ 3t' \end{cases}$$

ج)
$$\vec{AH} = (t'-1, 2t'+1, 3t')$$

د)
$$\vec{AH}.\vec{u} = 0$$
$$\Rightarrow (t'-1, 2t'+1, 3t').(1,2,3) = 0$$
$$\Rightarrow t' - 1 + 4t' + 2 + 9t' = 0 \Rightarrow t' = -\frac{1}{14}$$
$$t' = -\frac{1}{14} \Rightarrow H(-\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14})$$

مرحله‌ی ۲ : H وسط AA' است. بنابراین داریم:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = \frac{-2}{14} - 1 = \frac{-16}{14} = \frac{-8}{7}$$
$$y_{A'} = 2y_H - y_A = \frac{-4}{14} + 1 = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$
$$z_{A'} = 2z_H - z_A = \frac{-6}{14} - 0 = \frac{-3}{7}$$
$$\Rightarrow A'(\frac{-8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{-3}{7})$$

اکنون همین مسأله را به صورت تست می‌آوریم و راه‌حلی کوتاه برای آن ارائه می‌کنیم.

تست : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1,-1,0)$ نسبت به خط به معادله‌ی $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ کدام است؟

۱. $A'(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{3}{7})$ ۲. $A'(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7})$

۳. $A'(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7})$ ۴. $A'(-\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{3}{7})$

حل : گزینه‌ی ۴ صحیح است، زیرا اگر A' قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d باشد، در این صورت:

الف) بردار $\vec{AA'}$ بر خط d عمود است، یعنی $\vec{AA'}.\vec{u} = 0$. **ب)** مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H در معادله‌ی خط d صدق می‌کند. و این روابط فقط در گزینه‌ی ۴ برقرار است.

الف)
$$\vec{AA'} = (-\frac{8}{7} - 1, \frac{5}{7} + 1, -\frac{3}{7} - 0)$$
$$\Rightarrow AA' = (-\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{3}{7})$$
$$AA'.u = (-\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{3}{7}).(1,2,3) = -\frac{15}{7} + \frac{24}{7} - \frac{9}{7} = 0$$

ب) مختصات وسط AA' یعنی H را به دست می‌آوریم:

$$H\begin{cases} \dfrac{-\frac{8}{7}+1}{2} = -\frac{1}{14} \\ \dfrac{\frac{5}{7}-1}{2} = -\frac{2}{14} \\ \dfrac{-\frac{3}{7}-0}{2} = -\frac{3}{14} \end{cases}$$

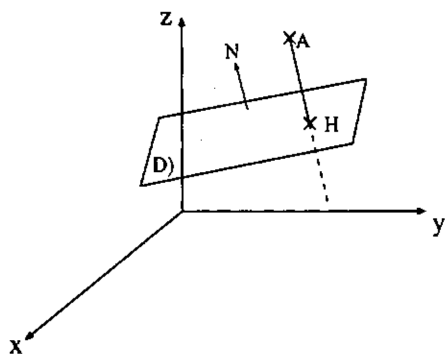
ملاحظه می‌کنیم که مختصات H در معادله‌ی خط d صدق می‌کند، زیرا:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3},\ H(-\frac{1}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14})$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{۱}{۱۴}}{۱} = \frac{-\frac{۲}{۱۴}}{۲} = \frac{-\frac{۳}{۱۴}}{۳} \Rightarrow -\frac{۱}{۱۴} = -\frac{۱}{۱۴} = -\frac{۱}{۱۴}$$

تصویر قائم نقطه روی یک صفحه

برای یافتن تصویر قائم نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ روی صفحه به معادله‌ی $D: ax + by + cz = d$ ، از A عمودی بر صفحه‌ی D رسم می‌کنیم تا این صفحه را در نقطه‌ی H قطع کند. بنابر تعریف، H را تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D می‌گوییم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی H کافی است، مراحل زیر را انجام دهیم:



مرحله‌ی ۱: بردار نرمال صفحه، یعنی $\vec{N} = (a, b, c)$ را مشخص می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲: معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر صفحه‌ی D عمود است. برای این منظور کافی است بردار هادی خط را برابر با بردار نرمال صفحه در نظر بگیریم. بنابراین داریم:

$$A(x_۰, y_۰, z_۰), \quad \vec{u} = \vec{N} = (a, b, c)$$

$$AH: \frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c}$$

مرحله‌ی ۳: از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D، مختصات نقطه‌ی H به دست می‌آید. برای این منظور، معادله‌ی خط AH را به صورت پارامتری تبدیل می‌کنیم. سپس مختصات پارامتری نقطه‌ی H را در معادله‌ی صفحه‌ی D قرار می‌دهیم تا پارامتر مورد نظر به دست آید. از آن‌جا مختصات نقطه‌ی H به دست می‌آید.

مسأله: تصویر قائم نقطه‌ی $A(۳, -۲, -۳)$ را روی صفحه به معادله‌ی $D: x - ۲y + ۴z = ۱۶$ به دست آورید.

حل:

مرحله‌ی ۱: $N = (۱, -۲, ۴)$ بردار نرمال صفحه.

مرحله‌ی ۲: معادله‌ی خط عمود بر صفحه را می‌نویسیم:

$$A(۳, -۲, -۳), \quad \vec{u} = \vec{N} = (۱, -۲, ۴)$$

$$\Rightarrow AH: \frac{x - ۳}{۱} = \frac{y + ۲}{-۲} = \frac{z + ۳}{۴}$$

مرحله‌ی ۳: از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D مختصات H به دست می‌آید:

$$AH: \begin{cases} x = t + ۳ \\ y = -۲t - ۲ \\ z = ۴t - ۳ \end{cases}$$

$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: \ H \begin{vmatrix} t' + ۳ \\ -۲t' - ۲ \\ ۴t' - ۳ \end{vmatrix}$$

$$H \in D \Rightarrow t' + ۳ - ۲(-۲t' - ۲) + ۴(۴t' - ۳) = ۱۶ \Rightarrow t' = ۱$$

$$t' = ۱ \Rightarrow H \begin{vmatrix} ۱ + ۳ \\ -۲ - ۲ \\ ۴ - ۳ \end{vmatrix} \Rightarrow H(۴, -۴, ۱)$$

اکنون همین مسأله را به صورت تست می‌آوریم و راه‌حلی کوتاه برای آن ارائه می‌کنیم:

تست: تصویر قائم نقطه‌ی $A(۳, -۲, -۳)$ روی صفحه به معادله‌ی $D: x - ۲y + ۴z = ۱۶$ کدام است؟

۱. $(۴, ۴, ۱)$ ۲. $(-۴, ۴, ۱)$

۳. $(۴, -۴, ۱)$ ۴. $(-۴, ۴, -۱)$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. اگر H تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه الف) مختصات H در معادله‌ی صفحه‌ی D صدق می‌کند. ب) بردار $\vec{AH}$ با بردار نرمال صفحه، یعنی N موازی است. و این رابطه‌ها فقط در گزینه‌ی ۳ صدق می‌کند.

الف. $H \in d$ زیرا: $۴ - ۲(۴) + ۴(۱) = ۰$

ب. $\vec{AH} = (۴ - ۳, -۴ + ۲, ۱ + ۳) = (۱, -۲, ۴) = \vec{N}$

قرینه‌ی نقطه نسبت به یک صفحه در فضا

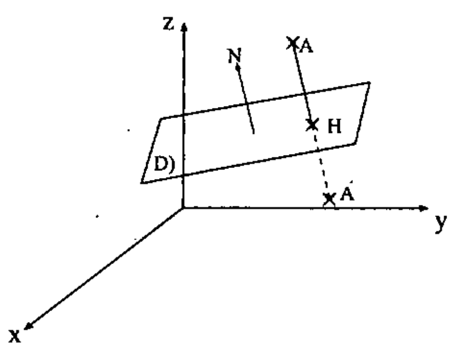
برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ نسبت به صفحه به معادله‌ی $D: ax + by + cz = d$ ، از A عمودی بر صفحه‌ی D رسم می‌کنیم تا H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی

D به دست آید. سپس AH را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید، بنا به تعریف A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D می‌نامیم. برای یافتن مختصات نقطه‌ی A' مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱: مختصات H یعنی تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D را به دست می‌آوریم.

مرحله‌ی ۲: چون H وسط AA' است، بنابراین با توجه به مختصات وسط پاره‌خط می‌توان، مختصات A' را محاسبه کرد.

$$A'\begin{cases} x_{A'} = ۲x_H - x_۰ \\ y_{A'} = ۲y_H - y_۰ \\ z_{A'} = ۲z_H - z_۰ \end{cases}$$



مسأله: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۰,-۲,۱)$ را نسبت به صفحه به معادله‌ی $D:۲x-۳y+z+۷=۰$ به دست آورید.

حل:

مرحله‌ی ۱: ابتدا مختصات تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D را به دست می‌آوریم. برای این منظور داریم:

الف) $N=(۲,-۳,۱)$ بردار نرمال صفحه.

ب) معادله‌ی خط عمود بر صفحه را می‌نویسیم:

$$A(۰,-۲,۱),\quad \vec{u}=\vec{N}=(۲,-۳,۱)$$

$$AH:\frac{x}{۲}=\frac{y+۲}{-۳}=\frac{z-۱}{۱}$$

ج) از تقاطع خط AH با صفحه‌ی D مختصات H به دست می‌آید:

$$AH:\begin{cases} x=۲t \\ y=-۳t-۲ \\ z=t+۱ \end{cases}$$

$$H\in AH \Rightarrow \exists t'\in\mathbb{R}:\ H\begin{cases} ۲t' \\ -۳t'-۲ \\ t'+۱ \end{cases}$$

$$H\in D \Rightarrow ۲(۲t')-۳(-۳t'-۲)+t'+۱+۷=۰$$
$$\Rightarrow t'=-۱$$

$$t'=-۱ \Rightarrow H\begin{cases} -۲ \\ ۳-۲ \\ -۱+۱ \end{cases} \Rightarrow H(-۲,۱,۰)$$

مرحله‌ی ۲: H وسط AA' است، بنابراین داریم:

$$x_{A'}=۲x_H-x_A=-۴-۰=-۴$$
$$y_{A'}=۲y_H-y_A=۲+۲=۴$$
$$z_{A'}=۲z_H-z_A=۰-۱=-۱$$
$$\Rightarrow A'(-۴,۴,-۱)$$

تست: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۰,-۲,۱)$ نسبت به صفحه به معادله‌ی $D:۲x-۳y+z+۷=۰$ کدام است؟

۱. $A'(-۴,۴,۱)$ ‏ ۲. $A'(-۴,۴,-۱)$

۳. $A'(۴,-۴,-۱)$ ‏ ۴. $A'(-۴,-۴,-۱)$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است، زیرا اگر A' قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D باشد، در این صورت:

الف) بردار $\vec{AA'}$ با بردار نرمال صفحه‌ی D موازی است.

ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H در معادله‌ی صفحه صدق می‌کند و این روابط فقط در گزینه‌ی ۲ برقرارند.

الف)

$$\vec{AA'}=(-۴-۰,۴+۲,-۱-۱)=(-۴,۶,-۲)$$

$$\vec{N}=(۲,-۳,۱)\Rightarrow \vec{AA'}=-۲\vec{N}\Rightarrow \vec{AA'}\parallel\vec{N}$$

ب) مختصات وسط $\vec{AA'}$ یعنی H را به دست می‌آوریم:

$$H\begin{cases} \frac{-۴+۰}{۲}=-۲ \\ \frac{۴-۲}{۲}=۱ \\ \frac{-۱+۱}{۲}=۰ \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که مختصات H در معادله‌ی صفحه‌ی D صدق می‌کند، زیرا:

$$۲x-۳y+z+۸=۰,\quad H(-۲,۱,۰)$$
$$\Rightarrow ۲(-۲)-۳(۱)+۰+۷=۰\Rightarrow -۷+۷=۰$$

ادامه دارد...

۱۰ معادله‌های مثلثاتی
اتحاد و معادله

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم



پرویز شهریاری

همان‌طور که در بحث مربوط به معادله‌های جبری دیدیم، درباره‌ی معادله‌های مثلثاتی هم، به راه‌حل‌ها و دستورهای معادله‌های ساده یا معادله‌های رسمی نمی‌پردازیم، زیرا می‌توان این دستورها را در کتاب‌های دبیرستانی یا سلسله مقاله‌های معادله‌های مثلثاتی در همین مجله پیدا کرد. گرچه در برنامه‌های درسی تازه به مثلثات اهمیت داده نشده است، ولی می‌توان با مراجعه به کتاب‌های قدیمی‌تر، رابطه‌های مربوط به آن را پیدا کرد. پرداختن به مثلثات و معادله‌های مثلثاتی، از این جهت برای هر ایرانی سودمند است که به تقریب، همه‌ی دستورها و رابطه‌های مثلثاتی در ایران سده‌های سوم تا نهم هجری خورشیدی به دست آمده است و کسانی همچون خوارزمی، ابوالوفای بوزجانی، ابوریحان بیرونی و غیاث‌الدین جمشید کاشانی در تنظیم آن‌ها دخالت داشته‌اند. ایران، در آن قرون، بعد از دوران ریاضیات نظری یونان، در دوران ریاضیات کاربردی به سر می‌برد و مثلثات را هم به خاطر نیازهای اخترشناسی پدید آورد. خواجه نصیر

توسی با نوشتن کتاب «کشف القناع» خود، در واقع نخستین کتاب مثلثات را نوشت که در آن، همه‌ی تلاش‌های ایرانیان را در زمینه‌ی مثلثات جمع کرده است. یکی از دشواری‌های مثلثات پیدا کردن سینوس یک درجه بود. تا سینوس کمان سه درجه برای آن‌ها قابل محاسبه بود (زیرا تابع‌های مثلثاتی سه درجه را از روی تابع‌های مثلثاتی ۱۸ درجه و ۱۵ درجه می‌دانستند، و لازم بود از روی سینوس سه درجه، خود را به سینوس یک درجه برسانند). جمشید کاشانی با حل جبری معادله‌ای که سینوس یک درجه را با معلوم بودن سینوس سه درجه به دست می‌داد، پیدا کرد و با این روش توانست معادله‌ی درجه سوم را سال‌ها پیش از کاردان حل کند.

در این جا به حل چند معادله‌ی مثلثاتی که تا حدی نامتعارف و غیرعادی هستند، می‌پردازیم:

مسأله اول. $\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x-2\pi}{3} = 3$

حل تابع‌های $\sin\frac{x}{4}$ و $2\cos\frac{x-2\pi}{3}$، تنها می‌توانند، بیشترین مقدار ممکن خود را، اولی برابر ۱ و دومی برابر ۲، اختیار کنند. در این صورت سمت چپ برابر ۲ + ۱، یعنی ۳ می‌شود. به این ترتیب، معادله‌ی مفروض به صورت این دستگاه درمی‌آید.

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{4} = 1 \\ \cos\frac{x-2\pi}{3} = 1 \end{cases}$$

با حل هر کدام از معادله‌های دستگاه، x به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = 2(4k+1)\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \\ x = 2(3n+1)\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \end{cases}$$

این دستگاه، تنها وقتی پاسخ دارد که معادله‌ی

$4k + 1 = 3n + 1$

جواب‌های درست داشته باشد. از این معادله $4k=3n$ نتیجه می‌شود که از آن‌جا $k = \frac{3}{4}n$. اگر $n=4t$ (t می‌تواند ۰، ۱±، ۲± و... باشد)، $k=3t$ عددی درست می‌شود و در این صورت:

$x = 2(12t+1)\pi, t = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

و این برابری شامل همه‌ی جواب‌های معادله‌ی مفروض است.

مسأله‌ی دوم. $\cos 2x - \cos\frac{x}{3} = 2$

حل. می‌دانیم $\cos 2x \le 1$ و $-\cos x \le 1$، در این صورت تنها وقتی برابری معادله برقرار است که $\cos 2x = 1$ و $-\cos\frac{x}{3} = 1$، زیرا با توجه به شرط داریم: $\cos 2x - \cos\frac{x}{3} \le 2$. به این ترتیب، معادله‌ی مفروض هم‌ارز این دستگاه است.

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ -\cos\frac{x}{3} = 1 \end{cases}$$

از آن‌جا داریم:

$$\begin{cases} x = k\pi, k = 0, \pm1, +2, \ldots \\ x = 3(2n+1)\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \end{cases}$$

که حل آن، منجر به حل معادله‌ی $k=3(2n+1)$ در مجموعه‌ی عددهای درست می‌شود. از آن‌جا که n عددی درست است، k هم عددی درست می‌شود و همه‌ی جواب‌های معادله‌ی مفروض با این دستور مشخص می‌شود:

$x = 3(2n+1)\pi, \ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

مسأله‌ی سوم. $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2} - 4\sin 2\pi x = 5$

حل. برای همه‌ی xها داریم:

$3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2} \ge 9, -4\sin 2\pi x \ge -4$

بنابراین تابع‌های سمت چپ برابری با حداقل مقدار آن‌ها برابرند؛ از آن‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2} = 9 \\ -4\sin 2\pi x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = k + \frac{1}{4} \\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \end{cases}$$

این دستگاه، در نتیجه معادله‌ی مفروض، تنها یک جواب دارد: $x = \frac{1}{4}$.

مسأله‌ی چهارم.

$$2\cos(\pi x^3) + \frac{6}{\pi}\arcsin(x^2-2) + x^2 - 2x + 6 = 0$$

حل. به سادگی می‌توان روشن کرد که برای هر

$x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}],$

$2\cos(\pi x^3) \ge -2; \frac{6}{\pi}\arcsin(x^2-2) \ge -3;$

$x^2 - 2x + 6 = (x-1)^2 + 5 \ge 5$

مجموع کمترین مقدارهای جمله‌های سمت چپ **معادله**،

برابر صفر می‌شود. بنابراین به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2\cos(\pi x^3) = -2 \\ \frac{6}{\pi}\arcsin(x^2 - 2) = -3 \\ x^2 - 2x + 5 = 5 \end{cases}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2k+1}, k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots \\ x = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

یعنی، دستگاه، تنها یک جواب دارد: $x=1$.

مسأله‌ی پنجم. $\sin^2(\pi x) + [\log_2(x^2 - 2x + 1)]^2 = 0$

حل. مجموع توان‌های دوم چند عدد حقیقی، تنها وقتی برابر صفر می‌شود که هر کدام از آن‌ها برابر صفر باشند. بنابراین به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0 \\ \log_2(x^2 - 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ x = 0, 2 \end{cases}$$

جواب‌های معادله‌ی اصلی $x_1 = 0$ ، $x_2 = 2$ است.

مسأله‌ی ششم. $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$

حل. بعد از تبدیل‌های روشن، به دست می‌آید:

$$2\cos 2x \sin x - 2\sin 2x + 3 = 0$$

در سمت چپ این معادله $\sin^2 x, \cos^2 2x + \sin^2 2x$ را یک‌بار اضافه و بار دیگر کم می‌کنیم که پس از آن، معادله‌ی مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$(\cos 2x + \sin x)^2 + (\sin 2x - 1)^2 + \cos^2 x = 0$$

از آن‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin x = 0 \\ \sin 2x - 1 = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

از معادله‌ی آخر دستگاه به دست می‌آوریم:

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, (k, عددی درست است)

این مقدار x را در معادله‌ی دوم دستگاه می‌گذاریم، به دست می‌آید: $\sin(2k\pi + \pi) - 1$ که مخالف صفر است. یعنی معادله‌های دوم و سوم دستگاه، جواب مشترکی ندارند و درنتیجه دستگاه ما بی‌جواب است، پس معادله‌ی مفروض، جوابی ندارد.

مسأله‌ی هفتم. جواب‌های حقیقی این معادله‌ی دومجهولی را پیدا کنید.

$$x^2y^4 - 16xy^3 - 4xy + x^2 + 68y^2 = 0$$

حل. روشن است که $x = y = 0$ در معادله صدق می‌کند. برای پیدا کردن جواب‌های دیگر، سمت چپ معادله را به صورت مجذورهای کامل درمی‌آوریم:

$$(xy^2 - 8y)^2 + (x - 2y)^2 = 0$$

از این‌جا، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} xy^2 - 8y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

این دستگاه، به جز جواب (۰ , ۰)، دو جواب دیگر هم دارد: (۲و۴) و (۲-و ۴-). بنابراین، معادله‌ی مفروض سه جواب دارد:

(۲-و۴-) و (۲ و ۴) و (۰ و۰)

مسأله‌ی هشتم. همه‌ی جواب‌های این معادله را پیدا کنید:

$$\cos(x - y) - 2\sin x + 2\sin y = 3$$

حل. سمت چپ معادله را به صورت مجموع توان‌های دوم، تبدیل می‌کنیم:

$$1 - \cos(x - y) + 2(\sin x - \sin y) + 2 = 0\ ;$$

$$2\sin^2\frac{x-y}{2} + 4\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + 2 = 0$$

اکنون داریم:

$$\sin^2\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2} + \sin^2\frac{x+y}{2} = 0$$

و سرانجام:

$$\left(\sin\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{x+y}{2} = 0$$

که از آن‌جا به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \sin\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} = 0 \\ \sin\frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم این دستگاه به دست می‌آید:

$$\frac{x+y}{2} = k\pi\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

این مقدار $\frac{x+y}{2}$ را در معادله‌ی اول دستگاه قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin\frac{x-y}{2}=(-1)^{k+1}\ ,\ \ k=0,\ \pm1,\pm2\ ,\ldots$$

دو حالت را درنظر می‌گیریم:

الف) $k=2n$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=2n\pi\\ \sin\frac{x-y}{2}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+y}{2}=2n\pi\\ \frac{x-y}{2}=2m\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(n+m)\pi-\frac{\pi}{2}\\ y=2(n-m)\pi+\frac{\pi}{2}\\ n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}\qquad (I)$$

ب) اگر $k=2n-1$ ، آن وقت:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=(2n-1)\pi\\ \sin\frac{x-y}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+y}{2}=(2n-1)\pi\\ \frac{x-y}{2}=2m\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(n+m)\pi-\frac{\pi}{2}\\ y=2(n-m-1)\pi+\frac{\pi}{2}\\ n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}\qquad (II)$$

دستورهای (I) و (II) را با هم مقایسه می‌کنیم. در (I) برای هر عدد درست n و m، عددهای (n+m) و (n-m) یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد؛ ولی در (II)، عددهای (n+m) و $(n-m-1)$ ، یکی زوج و دیگری فرد است. بنابراین، می‌توان دو دستور (I) و (II) را، به این ترتیب، یکی کرد:

$$\begin{cases}x=2p\pi-\frac{\pi}{2}\\ y=2q\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

که در آن‌ها، p و q عددهای درست دلخواهی هستند. اگر p و q هر دو زوج یا هر دو فرد باشند جواب‌های (I) و اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد، جواب‌های (II) به دست می‌آید. و این دستورها، تمام جواب‌های معادله را می‌دهند.

مسأله‌ی نهم. همه‌ی جواب‌های x و y را در این معادله به‌دست آورید:

$$(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2+(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2=12+\frac{1}{2}\sin y$$

حل. از آن‌جا که $-1\le\sin y\le1$ است، بنابراین

$$11\frac{1}{2}\le12+\frac{1}{2}\sin y\le12\frac{1}{2}$$

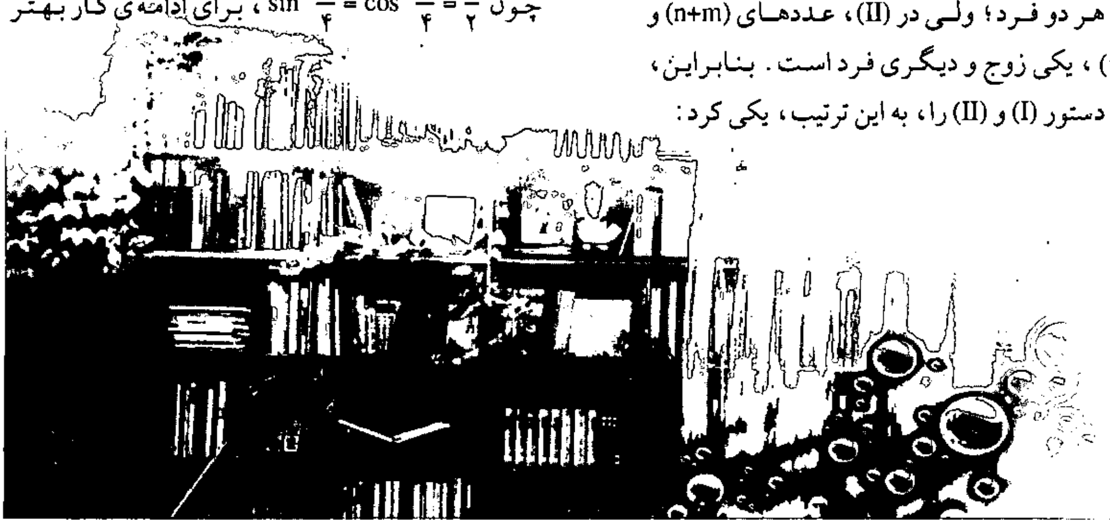
بنابراین سمت راست معادله از $12\frac{1}{2}$ بیشتر نیست، این بیشترین مقدار آن است.

برای $x=\frac{\pi}{4}$ ، سمت چپ معادله برابر $12\frac{1}{2}$ می‌شود.

اگر x به سمت $k\pi$ یا $k\pi+\frac{\pi}{2}$ میل کند (k برابر 0 ، ±1 ، ±2 ، ...)، آن‌گاه سمت چپ معادله به صورت نامحدود رشد می‌کند. ثابت می‌کنیم، برای همه‌ی xها، سمت چپ معادله از $12\frac{1}{2}$ کمتر نمی‌شود، یعنی این نابرابری را ثابت می‌کنیم:

$$(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2+(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})\ge12\frac{1}{2}\qquad(1)$$

چون $\sin^2\frac{\pi}{4}=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$ ، برای ادامه‌ی کار بهتر



است فرض کنیم: $\sin^2 x = \frac{1}{2} + \alpha$ و چون در این‌جا $0 < \sin^2 x < 1$ است، بنابراین $0 < \frac{1}{2} + \alpha < 1$ و از آن‌جا $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. به جز این $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{1}{2} - \alpha$.

در رابطه‌ی (۱) به جای $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$، برحسب α قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$(\frac{1}{2} + \alpha + \frac{1}{\frac{1}{2} + \alpha})^2 + (\frac{1}{2} - \alpha + \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha})^2 \geq 12\frac{1}{2} \quad (2)$$

سمت چپ رابطه‌ی (۲) را تبدیل می‌کنیم:

$$(\frac{1}{2} + \alpha)^2 + 2 + \frac{1}{(\frac{1}{2} + \alpha)^2} + (\frac{1}{2} - \alpha)^2 + 2 + \frac{1}{(\frac{1}{2} - \alpha)^2} =$$

$$= 4\frac{1}{2} + 2\alpha^2 + \frac{\frac{1}{2} + 2\alpha^2}{(\frac{1}{4} - \alpha^2)^2}$$

در حالت $\alpha = 0$ سمت چپ برابر $12\frac{1}{2}$ می‌شود؛ اگر $\alpha \neq 0$، آن وقت $\alpha^2 > 0$ و در این صورت روشن است که سمت چپ (۲) چنین خواهد شد:

$$4\frac{1}{2} + 2\alpha^2 + \frac{\frac{1}{2} + 2\alpha^2}{(\frac{1}{4} - \alpha^2)^2} > 4\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{4})^2} =$$
$$= 4\frac{1}{2} + 8 = 12\frac{1}{2}$$

بنابراین سمت چپ معادله‌ی مفروض از $12\frac{1}{2}$ کمتر نیست؛ این، کمترین مقدار آن است که برای $\alpha = 0$، یعنی برای

$$\sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

درست است.

چون سمت چپ معادله‌ی اصلی، کمتر و سمت راست آن بیشتر از $12\frac{1}{2}$ نیست، بنابراین برابری تنها وقتی برقرار است که هر دو طرف برابر $12\frac{1}{2}$ باشند، یعنی معادله‌ی مفروض، هم‌ارز با دستگاه زیر است.

$$\begin{cases}\cos^2 x = \frac{1}{2} \\ 12 + \frac{1}{2}\sin y = 12\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin y = 1\end{cases}$$

بنابراین $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ و $y = (4\pi + 1)\frac{\pi}{2}$، که در آن‌ها k و n می‌توانند عددهای $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ را اختیار کنند. این دستورها شامل همه‌ی جواب‌های معادله‌اند.

چند معادله در این‌جا برای تمرین آورده‌ایم. داخل کروشه، جواب را داده‌ایم (k و n همه‌جا، برابر $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ است).

تمرین

۱. $5^{|1-4x^2|} = \sin \pi x$. $[x = \frac{1}{2}]$.

۲. $3\sin^2 \frac{x}{3} + 5\sin^2 x = 8$. $[x = (3k+1)\frac{\pi}{3}]$.

۳. $2\sin(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}) - 3\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 5$.

[جواب ندارد].

۴. $4\sin 2x - \tan^2(x - \frac{\pi}{4}) = 4$. $[x = (4k+1)\frac{\pi}{4}]$.

۵. $1 + \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin^2 3x$. $[x = (2k+1)\pi]$.

۶. $\sin^6 x + \sin^4 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \sin\frac{x}{2} = 3$

$[x = (4n+1)\pi]$

۷. $2 + 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2 x + 5\sin^2\frac{x}{2} = 8\sin^2\frac{x}{2}\sin^2 5x$.

[جواب ندارد].

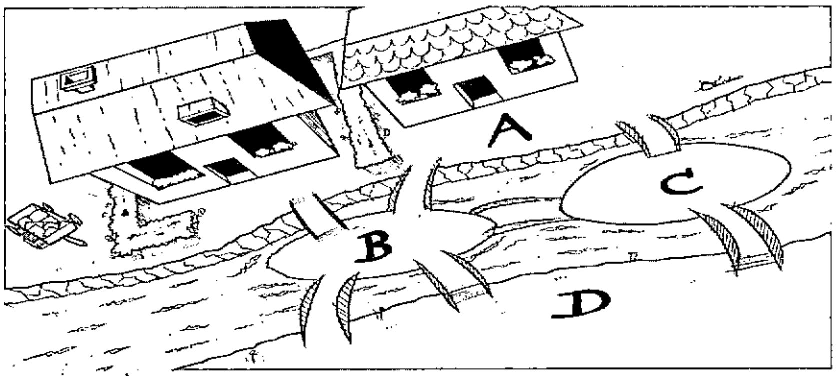
۸. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$. $[y = 2, x = 3]$

۹. $4 + \sin^2 x\cos^2 2x = 5\sin^2 x\sin^2 y$

$[y = (2n+1)\frac{\pi}{2}, x = (2k+1)\frac{\pi}{2}]$

گراف اویلری

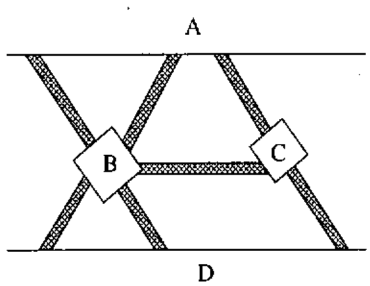
احسان یارمحمدی

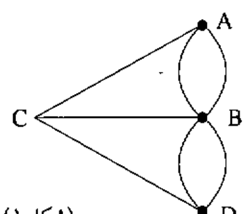


در قرن هجدهم میلادی، شهر کونیگسبرگ[۱] از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره واقع در این رودخانه تشکیل شده بود که در آن زمان، این مناطق چهارگانه به وسیله‌ی هفت پل به یکدیگر متصل بودند. این سؤال که آیا امکان دارد با شروع از یکی از این مناطق چهارگانه در شهر گشتی زد، از هر پل یک‌بار و فقط یک‌بار عبور کرد و به مکان اول بازگشت؟ سالیان متوالی ذهن اهالی این شهر به حل این مسأله معطوف شده بود. سرانجام شهردار شهر گونیگسبرگ، طبق نامه‌ای که برای لئونارد اویلر[۲] (۱۷۸۳-۱۷۰۷) ریاضیدان متولد شهر بازل[۳]، سوئیس[۴] فرستاد، او را از این مسأله آگاه ساخت و از وی خواست که برای این مسأله‌ی به ظاهر بغرنج راه‌حلی پیدا کند. اویلر جوان در سال ۱۷۳۶ میلادی توانست پاسخ مناسبی را در جواب سؤال مطرح شده ارائه دهد. لئونارد اویلر به هر یک از این مناطق چهارگانه، نقطه‌ای از صفحه‌ی دکارتی اختصاص داد و به ازای هر پل، پاره‌خطی بین دو نقطه‌ی متناظر با آن نقاط رسم کرد. در حقیقت اویلر از درک شهودی[۵] برای حل این مسأله یاری جست و با ارائه یک مدل ریاضی[۶] (شکل ۱)، بنیانگذار یک شاخه از ریاضیات محض[۷] شد که بیانگر نوعی از ریاضی تصویری[۸] است؛ که این ابداع بعدها تأثیر شایانی در علوم گوناگون مانند پزشکی، ژنتیک، باستان‌شناسی و رایانه گذاشت و آن را به دلیل تصویری بودنش، نظریه گراف[۹] نامیدند.

پاسخ اویلر منفی بود؛ بدین معنا که هیچ‌گاه نمی‌توان از یکی از مناطق چهارگانه شروع به حرکت کرد و از هر پل، یک و فقط یک‌بار عبور کرد و دوباره به مکان شروع حرکت بازگشت.

اویلر جواب خود را در قالب قضیه‌ای[۱۰] مطرح کرد که پس از بیان چند تعریف و ارائه چند مثال، آن را به تفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد.





(شکل ۱)

مسیر اویلری[۱۱]

در گراف همبند[۱۲] G=(V,E)، مسیری را که از همه‌ی یال‌های گراف عبور کند و از هر یالی بیش از یک‌بار عبور نکند، مسیر اویلری می‌نامیم.

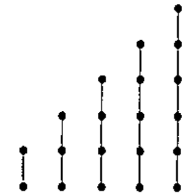
مدار اویلری[۱۳]

در گراف همبند G=(V,E)، اگر مسیر اویلری یک دور[۱۴] باشد، آن را مدار اویلری می‌نامیم.

گراف اویلری[۱۵]

گراف همبند G=(V,E)، را که شامل مدار اویلری است، گراف اویلری می‌نامیم.

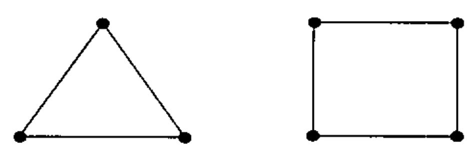
مثال. در هر گراف همبند و بدون دور[۱۶] G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q که دقیقاً دو رأس از درجه‌ی یک دارد، یک مسیر اویلری وجود دارد که طول آن برابر p−۱ است. چون گراف G همبند و بدون دور است، بنابراین درخت[۱۷] است. از طرفی چون این درخت دقیقاً دو رأس از درجه یک دارد، بنابراین دارای p−۲ رأس از درجه حداقل ۲ است. پس به ازای pهای متفاوت، می‌توان مدل‌های ریاضی متناظر با p را برای این نوع درخت‌ها به صورت زیر ارائه کرد.



T_2 T_3 T_4 T_5 T_6

با مقداری دقت در نمودار این نوع از درخت‌ها، درخواهیم یافت که هر کدام از آن‌ها دارای مسیر اویلری هستند و طول هر کدام از این مسیرهای اویلری در این نوع درخت از مرتبه‌ی p، برابر با p−۱ است.

مثال. هر یک از گراف‌های زیر دارای مدار اویلری هستند.



روشن است، برای این‌که گراف G=(V,E) دارای مدار اویلری باشد، الزاماً باید همبند باشد. از طرفی دیگر، چون مدار اویلری به تعداد دفعاتی که وارد رأسی از گراف G می‌شود، از همان رأس گراف G نیز خارج می‌شود، بنابراین لازم است که درجه‌ی تمام رئوس گراف اویلری G زوج باشد.

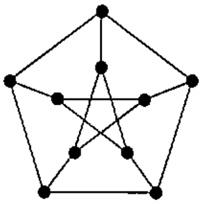
نتیجه: دو شرط لازم برای این‌که گراف G=(V,E) اویلری باشد، عبارت‌اند از:

۱. گراف G همبند باشد.

۲. همه‌ی رئوس گراف G زوج باشند.

مثال. نمودار گراف «پترسن»[۱۸] (شکل ۲) است. آیا این گراف اویلری است؟ چرا؟

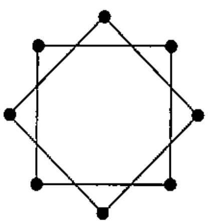
خیر؛ هرچند که گراف «پترسن» شرط اوّل اویلری بودن گراف را دارد، ولی چون درجه‌ی هر رأس آن عدد فرد ۳ است، بنابراین گراف «پترسن» اویلری نیست.



(شکل ۲)

مثال. نمودار گراف G شکل زیر است. آیا این گراف اویلری است؟ چرا؟

خیر؛ هرچند درجه‌ی تمام رئوس گراف G، عدد زوج ۲ است، ولی چون این گراف همبند نیست، بنابراین اویلری نیست.



اکنون اگر مدل ریاضی را که اویلر برای پل گونیگسبرگ[۱۹] اختصاص داده بود، در نظر بگیریم، درخواهیم یافت که آن مدل ریاضی که بیانگر گرافی از مرتبه‌ی ۴ و اندازه‌ی ۷ است، همبند بوده و از طرفی $\deg(A) = \deg(C) = \deg(D) = ۳$ و $\deg(B) = ۵$ است. بنابراین گراف مربوطه اویلری نیست و این بدان معناست که نمی‌توان از یکی از مناطق چهارگانه حرکت را آغاز کرد و از هر پل، یک‌بار و فقط یک‌بار عبور کرد و دوباره به مکان شروع حرکت بازگشت.

اکنون که با تاریخچه‌ی شکل‌گیری گراف اویلری و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف، چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱. گراف کامل[۲۱] k_p از مرتبه‌ی فرد p، اویلری است.

برهان: چون گراف k_p، کامل و از مرتبه‌ی فرد p است، بنابراین همبند و درجه‌ی هر رأس آن برابر با p−۱، که عددی زوج است؛ بنابراین گراف کامل k_p از مرتبه‌ی فرد p، اویلری است.

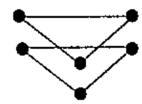
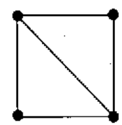
نتیجه: گراف کامل k_p از مرتبه‌ی زوج p، اویلری نیست.

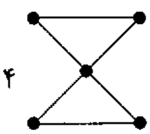
قضیه‌ی ۲. گراف همبند r ـ منتظم[22] (r زوج) از مرتبه‌ی p، اویلری است.

برهان: چون این گراف همبند و درجه‌ی هر رأس آن، برابر با r زوج است. از طرفی چون گراف r ـ منتظم از مرتبه‌ی p واندازه‌ی q است، بنابر رابطه‌ی $rp = 2q$ ، می‌تواند مرتبه‌ی گراف هر عدد طبیعی باشد.

نتیجه: گراف r ـ منتظم (r فرد) از مرتبه‌ی p، اویلری نیست.

آزمون۱ . کدام‌یک از گراف‌های زیر، گراف اویلری است؟

۱)  ۲) 

۳)  ۴) هرسه مورد

جواب. گزینه‌ی ۳ صحیح است؛ زیرا گراف گزینه‌ی ۱ ناهمبند، گراف گزینه‌ی ۲ دارای دو رأس از درجه‌ی سه است و گراف گزینه‌ی ۳ همبند و درجه‌ی تمام رئوس آن زوج است.

آزمون۲ . کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی گرافیکال[23] یک گراف اویلری است؟

۱) S:۵,۵,۵,۵,۵,۵

۲) S:۲,۲,۲,۲,۲,۲

۳) S:۲,۲,۲,۲,۱,۱

۴) S:۳,۲,۲,۱

جواب. گزینه‌ی ۲ صحیح است. زیرا، درجه‌ی رئوس هر گراف اویلری زوج است.

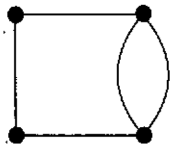
آزمون۳ . در مورد گراف شکل زیر، کدام گزینه صحیح است؟

۱) دارای دور اویلری است.

۲) دارای دور اویلری نیست.

۳) گراف اویلری است.

۴) هیچ‌کدام.



جواب: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

آزمون۴ . کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) گراف همبند و بدون دور G، مدار اویلری دارد.

۲) گراف تهی[24] K_p ، مدار اویلری دارد.

۳) گراف تهی K_p ، مسیر اویلری دارد.

۴) هر سه مورد.

جواب. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

چون گزینه‌ی ۱ درخت است و در درخت دور وجود ندارد، بنابراین مداری وجود نخواهد داشت. گزینه‌های ۲ و ۳ گراف تهی فاقدیال هستند، بنابراین دارای مسیر و دور نیستند.

زیرنویس:

1. Konigsberg City
2. Leonhard Euler
3. Basel
4. Switzerland
5. Intuitive Understanding
6. Model of Math
7. Pure Mathematics
8. The Graphic Math
9. Graph Theory
10. Theorem
11. Eulerian path
12. Connected Graph
13. Eulerian cycle
14. Cycle
15. Eulerian Graph
16. Acyclic
17. Tree
18. Petersen Graph
19. konigsberg Bridge
20. Even Vertexes
21. Complete Graph
22. r-Regular Graph
23. Graphical Sequence
24. Empty Graph

منابع

[1] M.Behzad, G.Chartrand. and L.Lesniak Foster, Graphs and Digraphs Wadsworth International Group.

[2]. O.Ore and R.G.wilson, Graphs and Their Uses The Mathematical Association of America.

۳. رالف. پ. گریمالدی؛ ریاضیات گسسته و ترکیباتی، ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی و بیژن شمس، انتشارات فاطمی.

یک قضیه و چند نتیجه

ابراهیم دارابی

قضیه‌ی اصلی: در هر مثلث مانند ABC برای هر نقطه مانند D واقع بر ضلع AB و متمایز از A و B، رابطه‌ی زیر همواره برقرار است:

$$\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}$$

اثبات: بر حسب این‌که نقطه‌ی D بین A و B و یا خارج آن باشد، دو حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول: فرض کنیم، مطابق شکل ۱ نقطه‌ی D بین A و B باشد. عمودهای AA_1 و BB_1 را بر خط شامل CD فرود می‌آوریم. در مثلث‌های AA_1C و BB_1C می‌توان نوشت:

$$\sin\angle ACD=\frac{AA_1}{AC}\ ,\ \sin\angle DCB=\frac{BB_1}{BC}$$

از تقسیم طرفین این دو تساوی بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}=\frac{AA_1}{BB_1}\cdot\frac{BC}{AC}\qquad(۱)$$

از تشابه مثلث‌های ADA_1 و BDB_1 داریم:

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{DA}{DB}\qquad(۲)$$

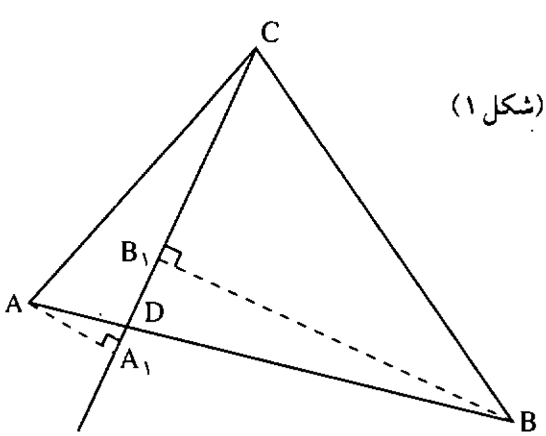
از مقایسه‌ی تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}=\frac{DA}{DB}\cdot\frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}$$

اثبات کامل است.

(شکل ۱)



در حالت خاص که نقطه‌ی D پای نیمساز باشد، داریم:

$\sin\angle ACD=\sin\angle DCB$

و از آن‌جا:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

که این تساوی، همان قضیه‌ی نیمساز در مثلث ABC است که با آن آشنایی داریم.

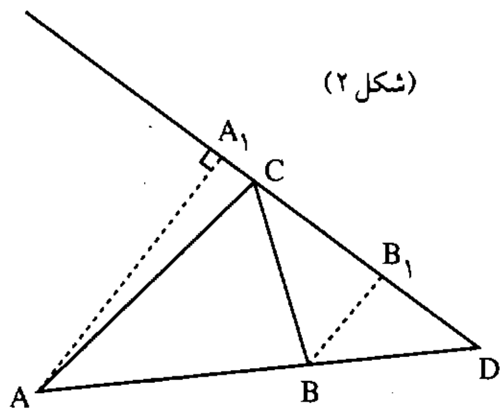
حالت دوم: فرض می‌کنیم مطابق شکل، نقطه‌ی D خارج پاره‌خط AB و در امتداد آن باشد (شکل ۲). مانند حالت اول داریم:

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AD}{BD} \qquad (1)$$

در مثلث‌های AA_1C و BB_1C می‌توان نوشت:

$$\sin\angle ACD=\sin\angle ACA_1=\frac{AA_1}{AC}$$

$$\sin\angle DCB=\frac{BB_1}{CB}$$



(شکل ۲)

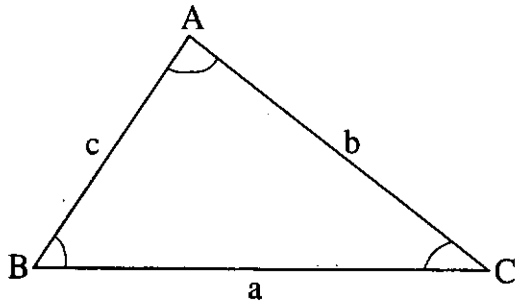
از تقسیم طرفین دو تساوی بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{CB}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}$$

دانش‌آموزان می‌دانند که سه میانه‌ی مثلث، در نقطه‌ی تقاربشان با چه نسبتی به دو قسمت تقسیم می‌شوند و با اثبات آن هم آشنایی دارند. در این جا با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها، هم تعیین می‌کنیم که میانه‌های مثلث با چه نسبتی یکدیگر را قطع می‌کنند، و هم این که هر یک از سه ارتفاع و سه نیمساز مثلث، در نقطه‌ی تقاربشان با چه نسبتی به دو قسمت تقسیم می‌شوند.

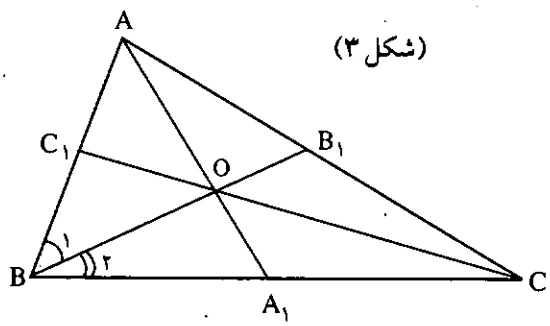
قضیه سینوس‌ها: در هر مثلث $A\hat{B}C$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



۱. هر یک از میانه‌های مثلث توسط میانه‌های دیگر به نسبت ۲ بر ۱ با شروع از راس تقسیم می‌شوند.

مطابق شکل (۳) در مثلث ABC میانه‌های AA_1 و BB_1 و CC_1 در نقطه‌ی O یکدیگر را قطع کرده‌اند. بنابر قضیه‌ی اصلی، در مثلث ABA_1 داریم:



(شکل ۳)

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB}{BA_1}\cdot\frac{\sin\angle B_1}{\sin B_2}$$

قرار می‌دهیم:

BC=a,AC=b,AB=c

از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{c}{\frac{a}{2}}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin B_2} \qquad (1)$$

بنابر قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\begin{cases}\Delta ABB_1 \Rightarrow \dfrac{\sin B_1}{\frac{b}{2}}=\dfrac{\sin A}{BB_1}\\ \Delta BCB_1 \Rightarrow \dfrac{\sin B_2}{\frac{b}{2}}=\dfrac{\sin C}{BB_1}\end{cases} \Rightarrow \frac{\sin B_1}{\sin B_2}=\frac{\sin A}{\sin C} \qquad (2)$$

از مقایسه‌ی تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{2c}{a}.\frac{\sin A}{\sin C} = 2(\frac{c}{\sin C}.\frac{\sin A}{a}) = 2$$

زیرا بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

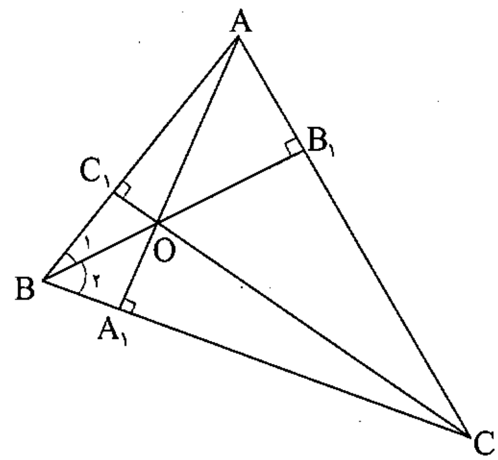
به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = 2$$

۲. هریک از ارتفاع‌های مثلث، توسط ارتفاع‌های دیگر به چه نسبتی تقسیم می‌شوند؟

برای تعیین این نسبت‌ها، مثلث ABC را مطابق شکل (۴) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، سه ارتفاع AA_1 و BB_1 و CC_1 در آن، یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده باشند. بنابر قضیه‌ی اصلی در مثلث ABA_1 می‌توان نوشت:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1}.\frac{\sin B_1}{\sin B_2} \qquad (1)$$



در مثلث ABA_1 داریم:

$BA_1 = AB.\cos B$

همچنین:

$\sin B_1 = \cos A,\ \sin B_2 = \cos C$

اگر این مقادیر را در تساوی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{\cos A}{\cos B.\cos C}$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{\cos B}{\cos A.\cos C}$$

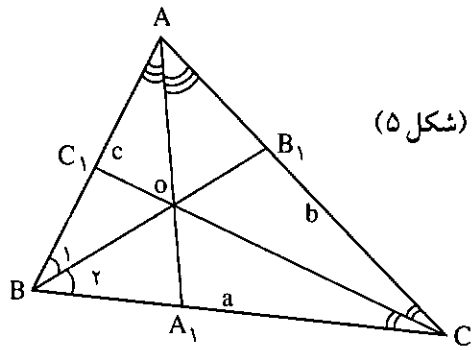
$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{\cos C}{\cos A.\cos B}$$

اگر یکی از زاویه‌های مثلث منفرجه باشد، در آن صورت در تساوی‌های بالا به جای کسینوس زاویه، قدر مطلق کسینوس آن را قرار می‌دهیم.

۳. هر یک از نیمسازهای مثلث، توسط نیمسازهای دیگر به چه نسبتی تقسیم می‌شوند؟

برای تعیین این نسبت‌ها در مثلث ABC، مطابق شکل (۵) نیمسازهای AA_1 و BB_1 و CC_1 را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم، نقطه‌ی تلاقی آن‌ها نقطه‌ی O باشد.

در مثلث ABA_1 بنابر قضیه‌ی اصلی داریم:



(شکل ۵)

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1}.\frac{\sin B_1}{\sin B_2}$$

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \sin B_1 = \sin B_2$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OA_1} = \frac{AB}{BA_1} \qquad (1)$$

بنابر خاصیت نیمساز در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BA_1}{BA_1 + A_1C} = \frac{c}{b+c}$$

$$\Rightarrow BA_1 = \frac{ac}{b+c} \qquad (2)$$

اگر در تساوی ۱ به جای BA_1 از تساوی ۲ مقدار قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$$

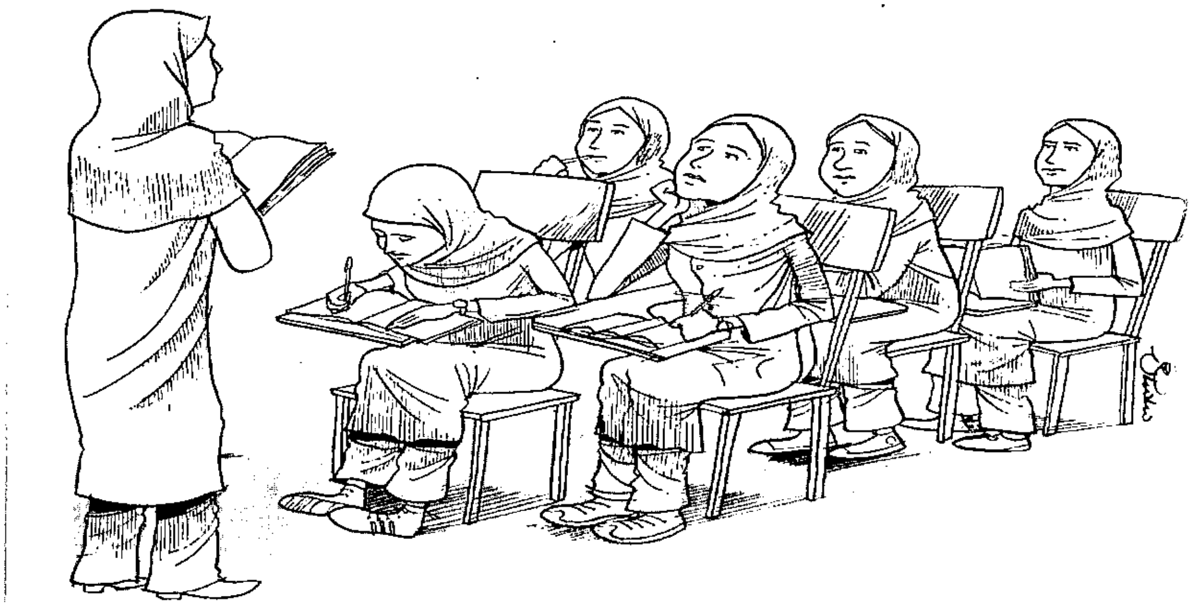
به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$$

یک مسأله‌ی ترکیبی از معادله‌ی خط در صفحه

احمد قندهاری



مسأله:

نقاط (۴ و ۰)A و (۴- و ۴)B و (۰ و ۴-)C سه رأس مثلث ABC هستند.

۱. معادله‌های ضلع‌های AB، BC و AC را بنویسید.

۲. معادله‌های میانه‌های AM (M وسط BC)، BN (N وسط AC) و CK (K وسط AB) را بنویسید.

۳. معادله‌های سه ارتفاع AH، 'BH و "CH را بنویسید.

۴. معادله‌های سه عمود منصف ضلع‌های AB، AC و BC را بنویسید.

۵. ثابت کنید سه میانه‌ی مثلث ABC در یک نقطه همرسند.

۶. ثابت کنید سه ارتفاع مثلث ABC در یک نقطه همرسند.

۷. ثابت کنید سه عمود منصف مثلث ABC در یک نقطه همرسند.

۸. اندازه‌ی مساحت مثلث ABC را بیابید.

۹. طول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC را بیابید.

۱۰. شکل را به‌طور کامل رسم کنید.

حل

۱.

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \;,\; B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right.$

معادله‌ی ضلع AB:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$y - 4 = \frac{-4-4}{4-0}(x-0) \Rightarrow y - 4 = -2x \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

(معادله‌ی ضلع AB)

$B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right. \;,\; C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$

معادله‌ی ضلع BC :

$$y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B) \Rightarrow$$

$$y + 4 = \frac{0+4}{-4-4}(x-4) \Rightarrow y + 4 = -\frac{1}{2}(x-4)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x - 2}$$

(معادله‌ی ضلع BC)

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \;,\; C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$

معادله‌ی ضلع AC :

$$y - y_A = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$y - 4 = \frac{0-4}{-4-0}(x-0) \Rightarrow y - 4 = x \Rightarrow \boxed{y = x + 4}$$

(معادله‌ی ضلع AC)

۲.

$B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right. \;,\; C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ؛ نقطه‌ی M وسط BC است،

بنابراین:

$$\left.\begin{matrix} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4-0}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M(0,-2)$$

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \;,\; C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ؛ نقطه‌ی N وسط AC است، بنابراین:

$$\left.\begin{matrix} x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0-4}{2} = -2 \\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow N(-2,2)$$

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \;,\; B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right.$ ؛ نقطه‌ی K وسط AB است، بنابراین:

$$\left.\begin{matrix} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4-4}{2} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow K(2,0)$$

الف) معادله‌ی **AM**، $A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \;,\; M\left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.$

چون دو نقطه‌ی A و M روی محور yها قرار دارند، پس معادله‌ی AM، همان معادله‌ی محور yهاست، در نتیجه:

$\boxed{x = 0}$ (معادله AM)

ب) معادله‌ی **BN**، $B\left|\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right. \;,\; N\left|\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$

$$y - y_B = \frac{y_N - y_B}{x_N - x_B}(x - x_B) \Rightarrow$$

$$y + 4 = \frac{2+4}{-2-4}(x-4) \Rightarrow y + 4 = -1(x-4) \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

(معادله BN)

توجه کنید که نقاط B و N هر دو روی خط $y = -x$ قرار دارند، زیرا طول و عرض آن‌ها قرینه‌ی یکدیگرند. پس می‌توانستیم بدون عمل بالا بگوییم، معادله‌ی BN، $y = -x$ است.

ج) معادله‌ی **CK**، $C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right. \;,\; K\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

به‌طوری که ملاحظه می‌کنید، دو نقطه‌ی C و K روی محور xها قرار دارند، پس معادله‌ی CK، همان معادله‌ی محور xهاست، در نتیجه: $\boxed{y = 0}$ (معادله‌ی CK)

۳.

الف) معادله‌ی ارتفاع AH

ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. معادله‌ی ضلع BC به

صورت $y=-\frac{1}{2}x-2$ است، پس شیب آن $-\frac{1}{2}$ می‌شود.
درنتیجه شیب ارتفاع وارد بر آن ۲ است.

$$A\Big|_{4}^{0} \quad , \quad m=2$$

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$$y-4=2(x-0)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=2x+4 \\ \text{AH معادله‌ی ارتفاع} \end{array}}$$

ب) معادله‌ی ارتفاع BH'

ارتفاع BH' بر ضلع AC عمود است. معادله‌ی ضلع AC به صورت $y=x+4$ است، پس شیب آن عدد ۱ و شیب ارتفاع وارد بر آن ۱- است.

$$B\Big|_{-4}^{4} \quad , \quad m=-1$$

$$y-y_B=m(x-x_B)$$

$$y+4=-1(x-4)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=-x \\ \text{BH' معادله‌ی ارتفاع} \end{array}}$$

سؤال: چرا معادله‌ی ارتفاع BH' با معادله‌ی BN یکی شده است؟

ج) معادله‌ی ارتفاع CH''

ارتفاع CH'' بر ضلع AB عمود است، معادله‌ی ضلع AB به صورت $y=-2x+4$ است، پس شیب آن ۲- و در نتیجه شیب ارتفاع وارد بر آن $\frac{1}{2}$ است.

$$C\Big|_{0}^{-4} \quad , \quad m=\frac{1}{2}$$

$$y-y_C=m(x-x_C)$$

$$y-0=\frac{1}{2}(x+4)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=\frac{1}{2}x+2 \\ \text{CH'' معادله‌ی ارتفاع} \end{array}}$$

۴.

الف) عمودمنصف AB

عمودمنصف AB خطی است که در وسط ضلع AB بر AB عمود شود. معادله‌ی AB به صورت $y=-2x+4$ است و شیب آن ۲-. پس شیب عمودمنصف مانند شیب ارتفاع وارد بر AB، $\frac{1}{2}$ است.

قبلاً درقسمت ۲ داشتیم $K\Big|_{0}^{2}$ وسط AB است.

$$K\Big|_{0}^{2} \quad , \quad m=\frac{1}{2}$$

$$y-y_K=m(x-x_K)\Rightarrow$$

$$y-0=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=\frac{1}{2}x-1 \\ \text{AB معادله‌ی عمودمنصف} \end{array}}$$

ب) عمودمنصف BC

عمودمنصف BC خطی است که در وسط ضلع BC بر ضلع BC عمود باشد. معادله‌ی ضلع BC به صورت $y=-\frac{1}{2}x-2$ است، پس شیب آن $-\frac{1}{2}$ و در نتیجه شیب عمودمنصف، مانند شیب ارتفاع وارد بر آن ۲ است.

قبلاً در قسمت ۲ داشتیم $M\Big|_{-2}^{0}$ وسط ضلع BC است.

$$M\Big|_{-2}^{0} \quad , \quad m=2$$

$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow$$

$$y+2=2(x-0)\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y=2x-2 \\ \text{BC معادله‌ی عمودمنصف ضلع} \end{array}}$$

ج) عمودمنصف AC

معادله‌ی عمودمنصف ضلع AC به صورت $y=-x$ است، چرا؟

۵. باید ثابت کنیم سه میانه‌ی مثلث ABC یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

AM معادله‌ی میانه‌ی : $x=0$
BN معادله‌ی میانه‌ی : $y=-x$ $\Rightarrow O\Big|_{0}^{0}$ محل تلاقی سه میانه‌ی مثلث
CK معادله‌ی میانه‌ی : $x=0$

۶. می‌خواهیم ثابت کنیم، سه ارتفاع مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

AH معادله‌ی ارتفاع : $y=2x+4$
BH' معادله‌ی ارتفاع : $y=-x$
CH'' معادله‌ی ارتفاع : $y=\frac{1}{2}x+2$

باید معادله‌ی دو ارتفاع را مانند دستگاه دو معادله‌ی دو

مجهولی با هم حل کنیم تا x و y محل تلاقی آن‌ها به دست آید. آن‌گاه مختصات این نقطه را در معادله‌ی ارتفاع سومی قرار می‌دهیم. اگر دو طرف تساوی برابر شد، آن‌گاه می‌گوییم، آن نقطه محل تلاقی سه ارتفاع است.

$$\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow 2x+4=-x \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

$$x=-\frac{4}{3},\ y=-x \Rightarrow y=\frac{4}{3} \Rightarrow P\left|\begin{matrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3}\end{matrix}\right.$$ محل تلاقی دو ارتفاع

$y=\frac{1}{2}x+2$ و $P(-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

$$\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{3}\right)+2 \Rightarrow \frac{4}{3}=\frac{-2}{3}+2 \Rightarrow \frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

چون مختصات نقطه‌ی P محل تلاقی دو ارتفاع AH و BH′ در معادله‌ی ارتفاع سومی CH″ صدق کرد، در نتیجه نقطه‌ی $P(-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ محل تلاقی سه ارتفاع است.

۷. می‌خواهیم ثابت کنیم، سه عمودمنصف مثلث ABC یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

AB معادله‌ی عمودمنصف : $y=\frac{1}{2}x-1$

BC معادله‌ی عمودمنصف : $y=2x-2$

AC معادله‌ی عمودمنصف : $y=-x$

مانند حل قسمت ۶، باید معادله‌ی دو عمودمنصف را با هم تقاطع دهیم تا مختصات نقطه‌ی تقاطع آن‌ها به دست آید. اگر مختصات این نقطه در معادله‌ی عمودمنصف سومی صدق کرد، آن‌گاه می‌گوییم سه عمودمنصف در یک نقطه متقاربند یا همرسند.

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow 2x-2=-x \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{2}{3},\ y=-x \Rightarrow y=-\frac{2}{3} \Rightarrow Q\left|\begin{matrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{matrix}\right.$$

$y=\frac{1}{2}x-1$ ، $Q(\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$

$$-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)-1 \Rightarrow -\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-1 \Rightarrow -\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$

چون مختصات نقطه‌ی Q محل تلاقی دو عمودمنصف، در معادله‌ی عمودمنصف سومی صدق کرد، بنابراین می‌گوییم سه عمودمنصف این مثلث در نقطه متقاربند.

۸. اندازه‌ی مساحت مثلث ABC

روش اول

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{\text{طول ضلع } AC \times \text{طول ارتفاع } BH}{2}$$

$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$

$$\text{طول ضلع } AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-4)^2}$$

$$\text{طول ضلع } AC=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}\ \text{واحد}$$

محاسبه‌ی طول ارتفاع BH′

$$\text{معادله‌ی ضلع } AC:\ y=x+4 \ \text{یا}\ x-y+4=0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases},\ B\left|\begin{matrix}4=x_1\\ -4=y_1\end{matrix}\right.$$

$$\text{اندازه‌ی طول ارتفاع } BH'=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4+4+4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$\text{اندازه‌ی مساحت مثلث } ABC=S_{ABC}=\frac{\text{طول ضلع } AC \times \text{طول ارتفاع } BH}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{4\sqrt{2}\times\frac{12}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{48}{2}=24\ \text{واحد مربع}$$

روش دوم

اگر $A\left|\begin{matrix}0=x_1\\4=y_1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}4=x_2\\-4=y_2\end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix}-4=x_3\\0=y_3\end{matrix}\right.$ سه رأس مثلث ABC باشند، اندازه‌ی مساحت مثلث ABC از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1|$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|0+0-16-16-16+0|$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|-48|=\frac{1}{2}\times 48=24\ \text{واحد مربع}$$

۹ . دایره‌ی محیطی مثلث ABC دایره‌ای است که از سه رأس مثلث ABC می‌گذرد . برای تعیین طول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC ، ابتدا باید مرکز دایره‌ی محیطی مثلث را پیدا کنیم . برای این کار لازم است نقطه‌ای درون مثلث ABC بیابیم که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد . این نقطه محل تلاقی سه عمودمنصف مثلث است .

در حل ۷ داشتیم $Q(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ محل تلاقی سه عمودمنصف مثلث ABC است .

برای تعیین اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی کافی است طول پاره‌خط AQ را بیابیم .

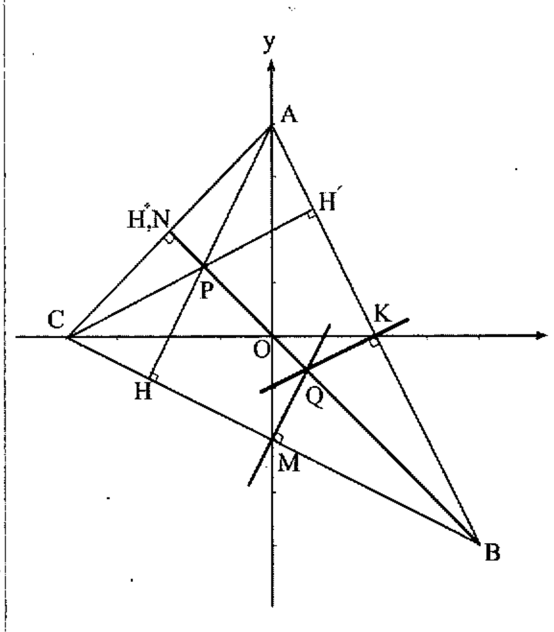
$$A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. \quad , \quad Q\left|\begin{matrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{matrix}\right.$$

$$R = AQ\ \text{اندازه‌ی} = \sqrt{(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2} = \sqrt{(0-\frac{2}{3})^2 + (4+\frac{2}{3})^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{4}{9} + (\frac{14}{3})^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{196}{9}} = \sqrt{\frac{200}{9}} = \sqrt{\frac{100 \times 2}{9}}$$

$$\boxed{R = \frac{10}{3}\sqrt{2}}$$

۱۰ .



نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.org

☎ امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۹۷۱۳ـ۱۴

☎ پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

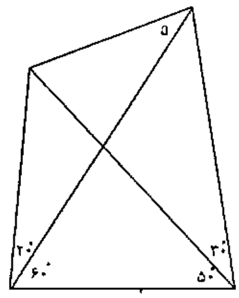
حل مسأله ی مسابقه‌ای برهان ۵۰

مسأله : زاویه مشخص شده a در شکل ۱ را پیدا کنید؟

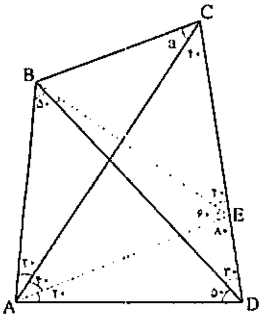
حل: چهارضلعی ABCD را درنظر بگیرید و خط AE را چنان رسم کنید که رأس A با افق زاویه‌ای 20° بسازد (شکل ۲).

زوایای $A\hat{B}D$ و $A\hat{D}B$ هر دو 50° هستند (زیرا در مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ داریم: $\hat{A} = 80^\circ$ و $\hat{D} = 50^\circ$ درنتیجه $\hat{B} = 50^\circ$) بنابراین $|AD| = |AB|$ هم‌چنین در مثلث $\overset{\triangle}{AED}$ داریم: $A\hat{D}E = 80^\circ$ و $E\hat{A}D = 20^\circ$ درنتیجه $A\hat{E}D$ برابر با 80° است، بنابراین $|AD| = |AE|$، درنتیجه $|AB| = |AE|$ و از آن‌جا مثلث $\overset{\triangle}{BAE}$ متساوی‌الاضلاع می‌شود، زاویه $\hat{A}$ در این مثلث 60° است، می‌دانیم که $\overset{\triangle}{ABE}$ نیز یک مثلث متساوی‌الاضلاع است درنتیجه $|AE| = |BE|$؛ بعلاوه از آن‌جایی که زوایای $E\hat{A}C$ و $E\hat{C}A$ هر دو 40° هستند، می‌دانیم که $|AE| = |CE|$ و بنابراین $|BE| = |CE|$ بنابراین $\overset{\triangle}{BEC}$ متساوی‌الساقین است.

همچنین می‌دانیم که زاویه $B\hat{E}C$ برابر با 40° درجه است (چون که $B\hat{E}A$ برابر با 60° است و $A\hat{E}D$ برابر با 80° است). بنابراین زوایای مجاور به قاعده مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{BEC}$ هر دو برابر با 70° هستند، درنتیجه زاویه $\hat{a} = B\hat{C}A$ برابر با 30° است.

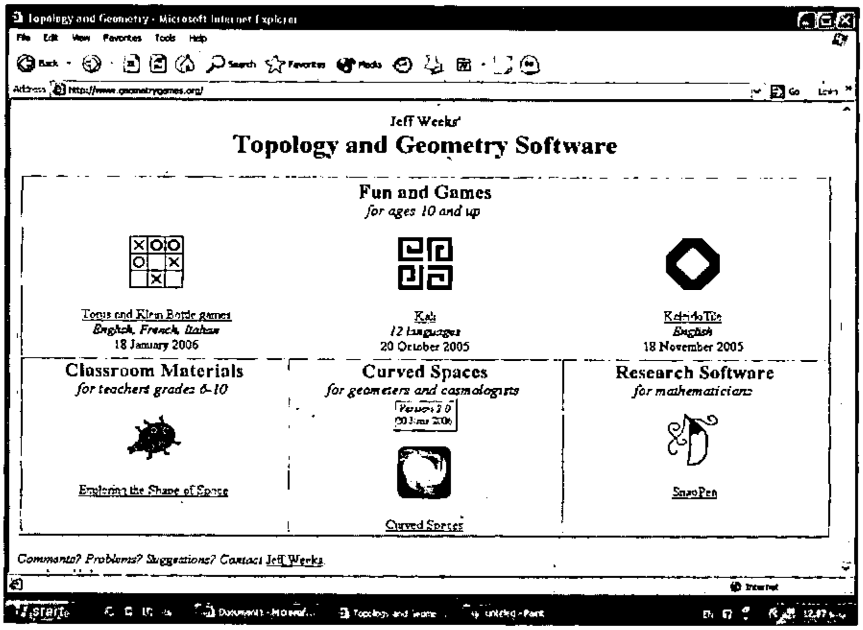


شکل ۱



شکل ۲

معرفی سایت‌های ریاضی



پرویز قراگوزلو/ احسان یارمحمدی

۱.

http://mathworld.wolfram.com

این سایت اینترنتی یکی از بزرگ‌ترین سایت‌ها به عنوان منبع در علم ریاضی محسوب می‌شود. فهرست موضوعی این سایت که هر یک از آن‌ها نیز شامل عنوان‌های گوناگونی دارد، به صورت زیر است:

- جبر (Algebra)
- ریاضیات کاربردی (Applied Mathematics)
- حساب دیفرانسیل و آنالیز (Calculus and Analysis)
- ریاضیات گسسته (Discrete Mathematics)
- اصول ریاضیات (Foundations of Mathematics)
- هندسه (Geometry)
- تاریخ و لغات تخصصی (History and Terminology)
- نظریه‌ی اعداد (Number Theory)
- احتمال و آمار (Probability and Statistics)
- ریاضیات تفریحی (Recreational Mathematics)
- توپولوژی (مکان‌شناسی) (Topology)



زبان حال
ریاضی دانان

■ کتاب بزرگ طبیعت را با علائم ریاضی نگاشته‌اند.

گالیلئو گالیله

■ کسی که هندسه نمی‌داند، از این در وارد نشود. (کتیبه‌ی سردر ورودی آکادمی افلاطون)

■ از قدیمی‌ترین دوران تاکنون، دو نوع گرایش بر پیشرفت عمومی ریاضیات حاکم بوده است که گاه کمک‌های متقابلی به یکدیگر کرده‌اند. این دو گرایش را می‌توان به اسامی **پیوسته** و **گسسته** موسوم ساخت.

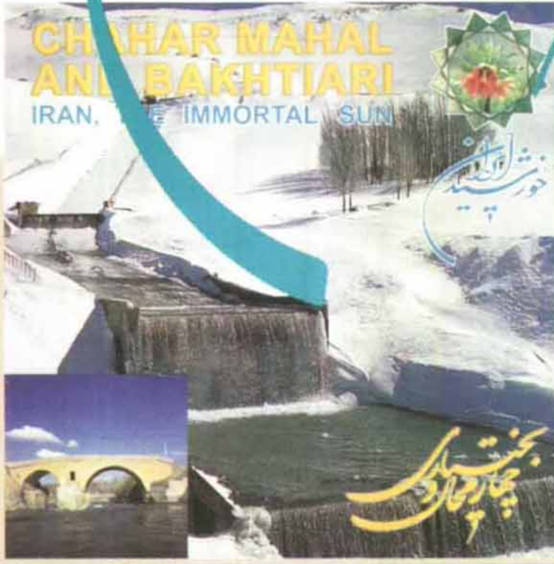
ای. تی. بل

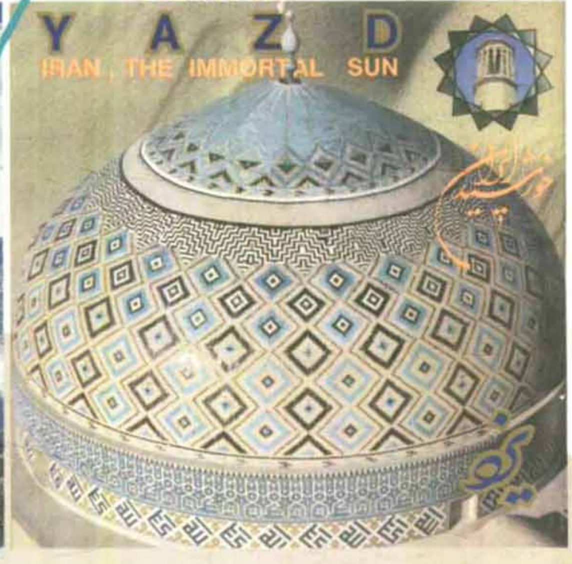
برگرفته از کتاب زبان حال ریاضی‌دانان به روایت دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

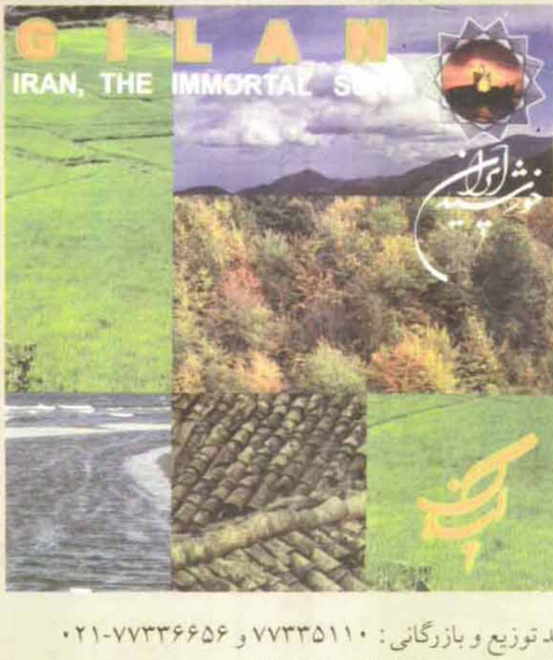
مجموعه کتاب های

خورشید ایران

زیرنظر
دفتر انتشارات کمک آموزشی (کتاب رشد)







تولید و انتشار یک دوره کتاب تصویری زیر عنوان «خورشید ایران» کاری است سترگ و حرکتی است بزرگ در جهت معرفی چهره ای کامل و مبتنی بر واقعیت استان به استان ایران که سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش مسئولیت آن را بر عهده دارد و بر آن است که به فضل الهی و با برخورداری از همکاری و تلاش یک گروه عملیاتی ممتاز و استفاده از امکانات لازم و کافی به هدف خود فعلیت بخشد.

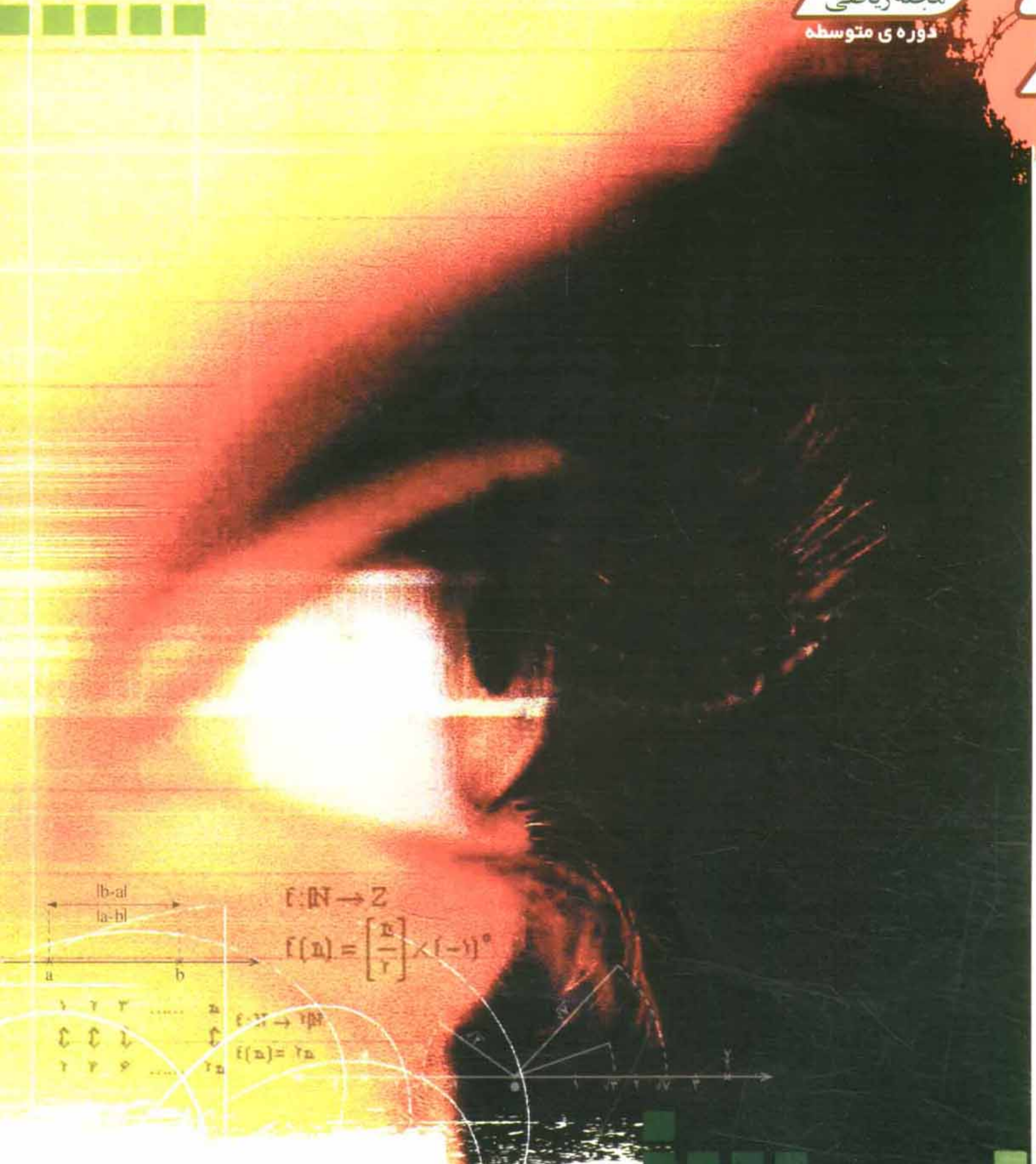
دورهٔ ی کتاب خورشید ایران برگی است از دفترقطور نعمت های بی شمار خداوند در سرزمینی که طی تاریخ چند هزار سالهٔ ی خود حامل بار عظیمی از تمدن بشری بوده و امروز چنان ویژگی های ارزشمندی یافته است که می تواند خود را بالنده و پیشرو به جهانیان معرفی کند.

این مجموعه برای کلیه ی علاقه مندان به حوزه ی «ایران شناسی» و دبیران و معلمان جغرافیا و علوم اجتماعی مفید می باشد.

علاقه مندان می توانند این کتاب ها را از «واحد توزیع و بازرگانی» دفتر انتشارات کمک آموزشی و یا فروشگاه های انتشارات مدرسه تهیه نمایند.

- تلفن واحد توزیع و بازرگانی: ۷۷۳۳۵۱۱۰ و ۷۷۳۳۶۶۵۶-۰۲۱
- تلفن انتشارات مدرسه: ۹-۸۸۸۰۰۳۲۴-۰۲۱

رشد
برهان
فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی
مجله ریاضی
دوره ی متوسطه
ISSN 1735-4951



۵۲
• دوره‌ی شانزدهم • شماره‌ی ۲
• زمستان ۱۳۸۵ • بها ۳۰۰۰ ریال

- انسان موجودی تک بعدی نیست
- مجموعه های متناهی و نا متناهی
- فرمولی در اعداد اول و نتایج آن
- مسابقه های ریاضی در کشور های گوناگون جهان

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

مشاهیر ریاضی مسلمان



خوارزمی

خوارزمی . ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی ، ریاضی دان ، منجم ، مورخ و جغرافیدان ایرانی نیمه ی دوم سده ی دوم و نیمه ی اول سده ی سوم .

وی ریاضیات و نجوم ایران پیش از اسلام و تعالیم مکتب جندی شاپور را با ریاضیات هندی درآمیخت و نخستین کتاب های حساب و جبر و نجوم را به زبان عربی نوشت . آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات ، چه در کشورهای اسلامی و چه در کشورهای اروپایی ، تأثیر فراوان داشت . کتاب حساب خوارزمی نخستین کتابی است که در دوره ی اسلامی راجع به فن حساب هندی تألیف شده است . بعضی از آثار موجود خوارزمی عبارت اند از :

۱ . مختصر من حساب الجبر و المقابلة ، که قدیمی ترین کتاب ریاضی موجود از دوره ی اسلامی است .

۲ . کتاب الجمع و التفریق ، نخستین کتابی که در دوره ی اسلامی درباره ی حساب با ارقام هندی نوشته شده است .

۳ . زیج ، که بیرونی به آن توجه داشته و در آثار خود از آن نام برده است .

اصطلاح الگوریتم که نزد اروپاییان برای فن حساب عملی ، در مقابل ارثماطیقی برای علم نظری اعداد به کار رفته ، تحریفی از نام الخوارزمی است .

سجزی

سجزی . ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی ، ریاضیدان و منجم ایرانی ، متولد حدود ۳۳۰ و متوفی حدود ۴۱۵ .

از مردم سیستان و مشاهیر ریاضی دانان و منجمان سده ی چهارم است که بیشتر عمر خود را در شیراز به سر برده است . به خصوص در هندسه بسیار زبردست بود و درباره ی تقاطع قُطوع مخروطی و مسائل دیگر ریاضی تحقیقاتی کرد . بیرونی در **«آثار الباقية»** وی را «مهندس» گفته است .

تا زمان سجزی ، ریاضی دانان مسأله ی تثلیث زاویه را با روش هندسه ی متحرک ، یعنی با حرکت دادن خط کش حل می کردند . سجزی این مسأله را با تقاطع دایره و هذلولی متساوی القطرین حل کرد و آن را روش هندسه ی ثابت نامید .

وی نخستین منجم دوره ی اسلامی بود که عملاً فرض حرکت وضعی زمین را به کار بست .

منبع : فرهنگ ریاضیات/گروه ریاضیات انتشارات مدرسه/ناشر : انتشارات مدرسه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۵۲

مجله‌ی ریاضی
دوره‌ی متوسطه
فصلنامه آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی
دوره‌ی شانزدهم /شماره‌ی ۲/ زمستان ۱۳۸۵ /شمارگان: ۲۰۰۰۰ نسخه

◆ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
◆ سردبیر: حمیدرضا امیری
◆ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
◆ طراح گرافیک: آزیتا کوثری
◆ ویراستار ادبی: کبری محمودی
◆ اعضای هیأت تحریریه: حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری،
میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی پور
و با تشکر از همکاری ارزنده‌ی
استاد پرویز شهریاری
◆ چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی عام)
◆ نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۰ داخلی ۳۹۷
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰
www.roshdmag.ir
ISSN 1735 - 4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه‌ی مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه‌ی علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش کامپیوتر و ...)

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود.
مجلّه در حکّ، اصلاح، حذف و اضافه‌ی مقاله‌ها آزاد است.
مقاله‌های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

باز این چه شورش است که در خلق عالم است

وقتی در سال ۶۱ هـ. ق، یزید نیزه‌ی ظلم و کینه‌توزی خود را به سمت گلوی اسلام ناب محمدی نشانه رفته بود و با تمام قوا قصد نابودی آن را داشت، امام حسین(ع) دیگر مدارا کردن را جایز ندانست و حیات این درخت مقدس را که هنوز نهالی بیش نبود، در معرض خطری جدی مشاهده کرد و تصمیم به قیام گرفت. عجیب است که هنوز از رحلت رسول اکرم(ص) حدود ۵۰ سال بیش‌تر نگذشته بود که این چنین قصد از ریشه برکندن این درخت را داشتند.

حرکت امام حسین(ع) از کنار جدش پیامبر اکرم(ص) و مسیری که ایشان و خانواده‌ی بزرگوارشان طی کردند تا به کربلای معلاّ رسیدند، حرکتی الهی و سراسر درس پایداری، آزادگی و سرافرازی است؛ مسیری که قدم به قدم آن با هشیاری و به نیت امر به معروف، نهی از منکر و اصلاح دین جدشان رسول‌الله(ص) پیموده شد.

اسلام با این حرکت تولد دیگری یافت. این نهال نورس، با خون سیدالشهدا و یاران باوفایش سیراب گشت و امام خمینی(ره) چه زیبا فرمودند: «این محرم و صفر است که اسلام را زنده نگه داشته است.»

آری این محرم و صفر است که حامل زنده‌ترین، به‌روزترین، خالصانه‌ترین، عمیق‌ترین و زیباترین پیام‌های اسلامی و زندگی‌ساز اسلام ناب محمدی بوده و هست. کدام طبقه از مردم جامعه یا کدام گروه سنی از افراد جامعه از این پیام‌ها بی‌نصیب و محروم مانده‌اند؟ کدام ارزش والای معنوی برای انسان‌ها در کربلا و عاشورای حسینی مصداقی عینی و واقعی ندارد؟ وفاداری، مهربانی، ایثار، احترام، بندگی، خلوص نیت، عبادت، شجاعت، پایداری، عزت‌نفس و... همه‌ی این ارزش‌های مثبت، به‌وفور در واقعه‌ی کربلا، از شروع تا عاشورا، و بعد از آن در کوفه و شام مشاهده می‌شوند. قیام امام حسین(ع) برای دشمن معادله‌ای بود با یک جواب بدیهی: شکست خاندان رسول‌الله(ص). اما درحقیقت این واقعه و قیام، معادله‌ای بود با بی‌شمار جواب غیرصفر و مثبت که هریک از آن‌ها پیامی بود برای پیروان راه آن حضرت و تیری بر قلب دشمن.

یکی از جواب‌های این معادله نماز است و اقامه‌ی آن؛ حتی در سخت‌ترین شرایط، در ظهر عاشورا و در آن هیاهوی میدان نبرد و به قیمت قربانی شدن سربازانی رشید چون حبیب‌بن مظاهر(س). دوست دانش‌آموز، اگر فقط به همین یک پیام نهضت امام حسین(ع) توجه داشته باشیم و آن را به گوش جان بخریم، به بسیاری از پیام‌های دیگر نیز پاسخ مثبت داده‌ایم و از پیروان سیدالشهدا(ع) خواهیم بود.

انسان موجودی تک‌بعدی نیست

● پرویز شهریاری

ماکسیمیلیان ماری روب‌میر (۱۷۹۳-۱۷۵۸) مشهور به «فسادناپذیر» که در آغاز زیر تأثیر اندیشه‌های ژان‌ژاک روسو بود و سرانجام با گیوتین اعدام شد، می‌گوید: «می‌خواهیم نظامی به وجود آوریم که در آن همه‌ی عاطفه‌های پست و ناهنجار به زنجیر کشیده شوند و به جای آن‌ها، عاطفه‌های شایسته و ثمربخش به وسیله‌ی قانون بیدار شوند... می‌خواهیم در کشور خود، اخلاق را به جای خودپسندی، پاکدامنی را به جای افتخار، ... نفرت از عیب را به جای نفرت از بدبختی، غرور را به جای گستاخی، بزرگی روح را به جای خودنمایی، عشق به افتخار را به جای عشق به پول، شایستگی را به جای مکر، نبوغ را به جای ذوق، حقیقت را به جای زرق و برق، عظمت سعادت را به جای کسالت شهوت، بزرگی انسان را به جای کوچکی بزرگان، ملتی نیرومند و خوشبخت را به جای ملتی بی‌نوا و سبک‌مغز، و سخن کوتاه، همه‌ی فضیلت‌ها و معجزه‌های جمهوریت را به جای رذیلت‌ها و مضحکه‌های استبداد بنشانیم.»

الف

این درست است که ضمن برخورد با فرهنگ‌های دیگر، باید آگاه بود و جلوی عنصرهای منفی و ویرانگر فرهنگ بیگانه ایستاد و جامعه‌ی خود را از تقلید کورکورانه کنار کشید. اگر فرهنگ را مجموعه رفتارهای فردی و اجتماعی یک قوم یا ملت بدانیم، طبیعی است که در این مجموعه، هم عنصرهای سالم و پذیرفتنی وجود داشته باشند و هم عنصرهای نادرست و ضدارزش. چگونه می‌توان این دو گونه‌ی متضاد را از هم جدا کرد و سره را از ناسره بازشناخت؟ به نظر من تنها راه، جست‌وجوی ریشه‌هاست. از این راه است که می‌توان سرچشمه‌ی نادرستی‌ها را یافت و راه مبارزه با آن‌ها را شناخت. مدت‌هاست که جریان‌های تفرقه‌انداز مسلط بر جهان، تا اندازه‌ی زیادی به صورت یکسویه عمل می‌کنند و جهان سوم بی‌وقفه تحت تأثیر حرکت سیل‌آسای فرهنگ جهان اول، یعنی جهان سرمایه‌داری قرار گرفته است. این امری طبیعی است، چرا که جهان سرمایه‌داری همه‌ی امکانات پیشرفته را در اختیار دارد و گمان می‌کند، می‌تواند دیدگاه‌های خود را به دیگران بپذیراند و باور دارد که قادر است و حق دارد جهان را به سمتی بکشاند که دلخواه اوست.

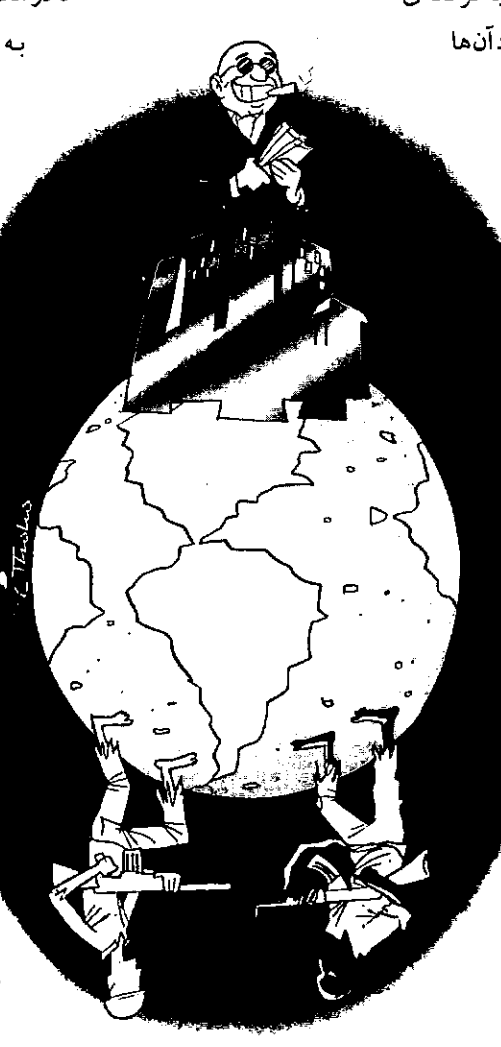
کسی در این باره تردید ندارد که دانش، صنعت و نوآوری‌های علمی غرب نه تنها زیانبار نیستند، بلکه می‌توانند شرایط زندگی بهتر و انسانی‌تری را برای سیاره‌ی کوچک ما فراهم کنند. حتی بدبین‌ترین گروه‌ها هم، در عمل از رهاوردهای دانش و فن پایان سده‌ی بیستم و آغاز سده‌ی بیست و یکم بهره می‌گیرند. همه‌ی ما از اتومبیل و هواپیما استفاده می‌کنیم، موج‌های رادیویی و تلویزیونی را به خدمت می‌گیریم، در خانه‌های خود برق، گاز، آب لوله‌کشی، یخچال، چراغ گاز و... داریم. حتی در سطح ملی جنگ‌افزارهای ساخت غرب را به خدمت گرفته‌ایم و یا از ساخت داخلی آن‌ها استفاده می‌کنیم، و می‌کوشیم با به‌کارگیری مدرن‌ترین امکان‌های چاپی و ارتباطی، دیدگاه‌های خود را بپراکنیم و زمینه را برای گسترش آن‌ها آماده کنیم. به این ترتیب همه‌ی ما پذیرفته‌ایم، ضمن نفوذ و ورود فرهنگ غرب، عنصرهایی جدی و اساسی وجود دارند که نه تنها بد نیستند، بلکه وجودشان ضروری و لازمه‌ی زندگی امروزی است.

از بین عنصرهای منفی جهان سرمایه‌داری، برخی به رفتار فردی و شخصی و برخی دیگر به روندهای اجتماعی مربوطند. در این جا تنها به گونه‌ی دوم می‌پردازیم، چرا که ریشه‌ای هستند و

می‌توانند سمت‌گیری جامعه‌ی ما را در جهت جامعه‌ای سالم و انسانی و یا برعکس، به سوی جامعه‌ای غیرانسانی معین کنند. از سطح به عمق برویم و ریشه‌ها را دریابیم. در این صورت شاخ و برگ‌ها هم نیرو می‌گیرند و از حالت خمودگی بیرون می‌آیند. پند دادن و نشان دادن راه، تنها وقتی می‌تواند اثربخش باشد که به ریشه‌ها پرداخته باشیم و مسأله‌های سطحی و فرعی را به تبع آن‌ها حل شده بدانیم. این ریشه‌ها کدامند؟

پروردن افراد جداگانه، برای تخصص‌های جداگانه و جلوگیری از رشد ذهنی این افراد، تلاشی است که در جامعه‌ی سرمایه‌داری، برای تک‌بُعدی کردن آدم‌ها انجام می‌شود

همه‌ی گرفتاری‌ها ناشی از خود نظام سرمایه‌داری است و نظام سرمایه‌داری به‌دنبال سود است؛ سود هرچه بیش‌تر و به هر طریق ممکن. سرمایه‌دار و سرمایه‌داری از هیچ ترفندی، هر قدر هم زشت و غیرانسانی، برای انباشتن سرمایه دریغ نمی‌کند و در این راه، نه اخلاق می‌شناسد و نه انسانیت. از فساد، دزدی، ریا، آدم‌کشی (حتی نسل‌کشی) هم رویگردان نیست. هر راهی که او را به سود بیش‌تر برساند، برایش «مقدس» است. ببینیم این سودجویی آزمندانه، در خود جامعه‌های پیشرفته‌ی سرمایه‌داری، حتی بر سر مردم خود آن‌ها چه آورده است؟



۱. سردمداران و گردانندگان جامعه‌ای که بر مدار سرمایه‌داری می‌گردد (یعنی صاحبان اصلی سرمایه و نمایندگان آن‌ها در دستگاه‌های حکومتی)، به انسان‌های تک‌بُعدی نیاز دارند. هرکس تخصص شخصی خودش را داشته باشد و به تخصص دیگران و کار دیگران کاری نداشته باشد. کارگر در کار خودش «وظیفه‌شناس» باشد، بیش‌تر کار کند و کم‌تر توقع داشته باشد و اگر چنین باشد، گاه به گاه جایزه هم می‌گیرد. این که محصول کار او چیست، به کجا می‌رود، چه سودی برای جامعه‌ی انسانی دارد و از «آب کردن» محصول تولیدی او، چه سودی به چه کسانی می‌رساند، به او ربطی ندارد.

در مجلسی، چند دانش‌آموخته و متخصص ایرانی که در یکی از کشورهای سرمایه‌داری درس خوانده بودند، بر سر فرهنگ عمومی و رابطه‌ی فرد و جامعه بحث می‌کردند. یکی از این عزیزان با اعتقاد کامل می‌گفت، بهترین راه برای پیشرفت جامعه این است که هر کسی تلاش کند، در کار خود به حد بالایی از کارایی و تخصص برسد و در کار دیگران دخالت نکند. او که در زمینه‌ی الکترونیک تحصیل کرده بود، روایت می‌کرد: روزی ضمن عبور از خیابان، جلوی کیوسک یک روزنامه فروشی می‌ایستد و عنوان خبرها و مقاله‌ها را از نظر می‌گذراند. یکی از هم‌کلاسی‌هایش، که با روحیه‌ی کشور متبوعش تربیت شده بود، از راه می‌رسد و به دوست ما می‌گوید: چرا این‌جا ایستاده‌ای؟ پاسخ می‌دهد که می‌خواهم از اوضاع جهان آگاه شوم... دوستش با خشم به او می‌گوید: تو به کشور ما آمده‌ای تا در الکترونیک متخصص شوی، به اوضاع جهان و به سیاست چه کار داری؟ سیاست را به متخصصان سیاست واگذار... تو که به جای درس خودت، دنبال سیاست هستی، یک احمق تمام‌عیاری!... و این یعنی آدم تک‌بُعدی.

انسان مجموعه‌ای پیچیده است. نمی‌توان بخش‌های ذهنی و جسمی او را از یکدیگر جدا کرد. انسان موجودی اجتماعی است و باید در همه‌ی ارکان جامعه‌ی خود و جامعه‌ی جهانی دخالت کند. انسانی که به دانش رو آورده است، نمی‌تواند و نباید از هنر بی‌بهره باشد. انسان تک‌بُعدی، در واقع انسان نیست، موجودی است ماشینی، یا بهتر بگوییم، پیچی یا مهره‌ای از یک ماشین. نه نقش خود را می‌شناسد و نه خدمتی به جامعه‌ی انسانی می‌کند. او تنها عامل و وسیله‌ای در دست سرمایه‌دار است

که با بهره‌گیری از او، سود بیش‌تری برای خود می‌اندوزد.

پروردن افراد جداگانه، برای تخصص‌های جداگانه و جلوگیری از رشد ذهنی این افراد، تلاشی است که در جامعه‌ی سرمایه‌داری، برای تک‌بُعدی کردن آدم‌ها انجام می‌شود. اگر دانشمند ریاضی، از جامعه‌ی خود و از جامعه‌ی جهانی غافل باشد، اگر از هنر لذت نبرد، اگر در بحث‌های جامعه‌شناسی و سیاست دخالت نکند، اگر همراه دیگران به چاره‌اندیشی برای زدودن زشتی‌هایی که چهره‌ی انسانی زمان ما را آلوده کرده است، تلاش نکند و اگر... همان انسان تک‌بُعدی دلخواه سردمداران جامعه‌ی سرمایه‌داری می‌شود. انسان جان و خرد دارد و این دو را نمی‌توان از یکدیگر جدا کرد. جان سرچشمه‌ی هنر و خرد زاینده‌ی دانش است و انسان واقعی نمی‌تواند، از هیچ کدام روگردان باشد. در واقع، داشتن تخصص به هیچ‌وجه به معنای آن نیست که انسان، انسانیت خود را فراموش کند. انسان می‌تواند از موسیقی لذت ببرد، با رفتن به نمایشگاه‌های نقاشی و مجسمه‌سازی، روح و جان خود را تلطیف کند، از اوضاع جامعه‌ی خود و جامعه‌ی جهانی آگاه شود، عاطفه داشته باشد، به بهبود زندگی انسانی بیندیشد، در مبارزه به خاطر سلامت محیط‌زیست و به خاطر زندگی انسانی‌تر شرکت کند و... و در عین حال تخصص هم داشته باشد و در راه اعتلای دانش تخصصی خود بکوشد.

یکی از بزرگ‌ترین آفت‌های فرهنگ سرمایه‌داری، تک‌بعدی شدن انسان‌هاست که البته به مبارزه‌ای جدی برای تسلیم نشدن به آن نیاز داریم.

۲. آفت دیگر جهان سرمایه‌داری این است که هرکس تنها به خود و سود خود بیندیشد. هر کسی تنها در این اندیشه باشد که گلیم خود را از آب بیرون بکشد و به دیگران کاری نداشته باشد. از این دیدگاه است که فساد، دزدی، ریا، قدرت‌طلبی، انحصارطلبی، محدود کردن آزادی دیگران، توهین به کسانی که به گونه‌ای دیگر می‌اندیشند و تحقیر آن‌ها، استفاده از فشار و تهدید، خریدن و به خدمت گرفتن نیروی فکری و عملی برخی روشنفکران ساده‌اندیش، جاسوسی، ترور فیزیکی و روحی مخالفان و بسیاری زشتی‌های دیگر، در جامعه رواج می‌یابند، فاصله‌ی بین طبقه‌ها زیادتر می‌شود و بهره‌کشی و استثمار فزونی می‌یابد و به‌تدریج، عدالت اجتماعی و عاطفه و اخلاق انسانی نابود می‌شود و تنها سودجویی هرچه بیش‌تر، آن هم از هر راه ممکن، جای آن‌ها را می‌گیرد. هر وقت دیدید در جامعه‌ای اختلاف: سن، جنس، صنف و امثال آن عمده شده است، تلاش بر این است که اختلاف نسل‌ها، جنس‌ها و صنف‌های گوناگون، جای تبادل اندیشه را بگیرد. هر وقت دیدید دزدی رواج پیدا کرد و ترور فکری و جسمی (شبیه آنچه در اسرائیل و آمریکا وجود دارد) شدت گرفت، هر وقت دیدید آزادی طبیعی انسان‌ها محدود شده و وحشت جای تبادل اندیشه را گرفته است، هر وقت دیدید برای انجام هر وظیفه‌ای که به عهده‌ی دیگران است، باید بهایی بپردازید و... مطمئن باشید که در معرض هجوم فرهنگ سودجویانه‌ی جهان سرمایه‌داری قرار گرفته‌اید؛ فرهنگی که مثل خوره به جان جامعه افتاده است و آن را به تباهی می‌کشاند.

سود و سود بیش‌تر شعار سرمایه‌داری است و رواج این اندیشه، از جنبه‌های ویرانگر بخش منفی فرهنگ غرب است.

۳. جهان سرمایه‌داری و سردمداران آن دوست دارند با انسان‌های سطحی و ساده‌اندیش سروکار داشته باشند و به این منظور، راه‌هایی اندیشیده‌اند. کتاب‌ها و فیلم‌های پلیسی و جنایی را به صورتی گسترده پخش می‌کنند، از کف‌بینی، طالع‌بینی، فال قهوه و دیگر دانش‌های دروغین برای گمراه کردن ذهن‌ها یاری می‌گیرند، دوران ما را «عصر شتاب» نام نهاده‌اند و آثار بزرگان ادب جهان، چون ویکتور هوگو، تولستوی، فاوست، آناتول فرانس و جان اشتاین بک را در چند صفحه کوتاه می‌کنند تا کسی در «عصر شتاب» رغبت به خواندن اصل آن‌ها نداشته باشد. داستان‌ها و فیلم‌های فضایی عرضه می‌کنند که در آن‌ها، همه در اندیشه‌ی نابودی، ویرانی و کشتارهای جمعی‌اند. این اعتقاد را می‌پراکنند که انسان همیشه زبون بوده است و تا آخر زبون خواهد ماند؛ زمانی به خاطر جهل و بی‌تجربگی خود، زبون در برابر نیروهای طبیعت، و امروز زبون در برابر دانش و صنعت خود. انسان‌ها به دو گروه وحشی و متمدن تقسیم شده‌اند تا برای «آقایی» خود بر جهان، محملی تراشیده باشند. اختلاف‌های قومی، ملی، اعتقادی و دینی را بزرگ می‌کنند و دامن می‌زنند و از این راه، اندیشه‌های نژادپرستانه را رواج می‌دهند و جدایی قومی و نژادی را تبلیغ می‌کنند. و همه‌ی این‌ها به خاطر آن است که مردم به ریشه‌های اصلی سیه‌روزی خود، بی‌پناهی انسان‌ها، فقر، گرسنگی، بیماری، جنگ، غارتگری سرمایه‌داری و هزاران بلای دیگر نیندیشند. به‌طور دائم به دنبال نان باشند و در اندیشه‌ی پرداخت قسط‌های وام‌های خود، سرچشمه‌ی بدبختی‌ها را در وجود قوم‌ها، ملت‌ها، نسل‌ها یا صنف‌های دیگر بدانند و راه انسانی خود را برای رسیدن به زندگی انسانی‌تر، که به ناچار راه

«نظام مصرفی» به معنای خوردن، پوشیدن، نوشتن، خواندن و در جایی زیستن نیست. نظام مصرفی به معنای مصرف بی‌رویه و بیهوده‌ی کالا و نابود کردن سرچشمه‌های طبیعی، به خاطر انباشتن سود و سرمایه است

مبارزه با ستم دنیای سرمایه‌داری است، فراموش کنند.

پ

از «جامعه‌ی مصرفی» و «زندگی مصرفی» بسیار سخن گفته‌اند. ولی کم‌تر به ریشه‌ها پرداخته‌اند و به همین جهت، ماهیت امر برای مردم ناشناخته مانده است.

در برخورد ساده‌لوحانه، اغلب به مردم توصیه می‌شود: کم‌تر غذا مصرف کنید، به لباس خود اهمیت ندهید، بچه‌ها را به قناعت عادت دهید، و از زینت‌ها، چه بر سر و روی خود و چه بر در و دیوار خانه پرهیز کنید. می‌توانید به جای چینی از بشقاب ملامین استفاده کنید. دستمال پارچه‌ای، مناسب‌تر از دستمال کاغذی است. گوشت مرض دارد، برنج آدم را بیمار می‌کند، قند و شکر و شیرینی دشمن سلامتی هستند و...

البته برخی از این سفارش‌ها درست هستند، ولی عیب کار در این جاست که این‌ها را به مردمی می‌گویند که برای سیر کردن شکم فرزندان خود درمانده‌اند و از تهیه‌ی سرپناه برای زندگی و یا تهیه‌ی مداد و خودکار و دفترچه برای مشق فرزند خود عاجزند. با این همه، جامعه‌ی مصرفی با تمام توان خود در حرکت است. این وضع نه تنها درباره‌ی جهان سوم، که درباره‌ی جهان اول هم صدق می‌کنند... منابع اصلی مورد نیاز بشر به سرعت نابود می‌شوند و ریخت و پاش ادامه دارد. در ضمن، هر روز که می‌گذرد، پولدارها پولدارتر و بی‌چیزها بی‌چیزتر می‌شوند. گیر کار در کجاست؟

در این جا، تنها به نمونه‌ای کوچک، آن هم به صورتی گذرا می‌پردازیم.

مصرف کاغذ و مقوا

برای تهیه‌ی یک کیلوگرم کاغذ یا مقوا، به جز چیزهای دیگر، باید نزدیک به هفت کیلوگرم چوب مصرف کرد. ببینیم این کاغذ و مقوا در جهان سرمایه‌داری چگونه مصرف می‌شود؟

کسانی که سری به آمریکا یا کانادا زده‌اند، می‌دانند هر روز بدون استثنا انبوهی از نشریه‌های تبلیغاتی (که تنها به تبلیغ کالاهای کمپانی‌ها یا فروشگاه‌های بزرگ یا مرکزهای تفریحی و غیر آن می‌پردازند)، جلوی هر خانه و آپارتمانی ریخته می‌شود و یکی از کارهای روزانه‌ی صاحبان خانه‌ها، جابه‌جا کردن این انبوه کاغذ (که گاهی از پنج کیلوگرم هم تجاوز می‌کند) و ریختن آن‌ها به سطل زباله است. تنها در این‌جا کار خاتمه نمی‌یابد. در بسیاری از مواقع، بیش از هفتاد درصد صفحه‌های روزنامه‌ها و مجله‌ها را آگهی‌های تبلیغاتی پر کرده‌اند و کم‌تر از سی درصد صفحه‌های آن‌ها به مطلب و مقاله اختصاص دارد (که البته بسیاری از این مقاله‌ها هم «رپورتاژ آگهی» هستند).

خب، اگر آن‌طور که نظریه‌پردازان نظام سرمایه‌داری تبلیغ می‌کنند، نظام سرمایه‌داری را بهترین نظام برای زندگی بدانیم، آن‌وقت باید تلاش کنیم تا همین رویه، در تمامی جهان و برای تمامی مردم گسترش یابد. خودتان محاسبه کنید: اگر فرض کنیم هر فرد روزانه تنها یک کیلوگرم کاغذ، به صورت تبلیغ‌های بی‌معنی به هدر دهد (یعنی هفت کیلو چوب)، آن وقت جنگل‌های سیاره‌ی ما، چند سال دوام می‌آورند؟ هم‌اکنون هم که در بخش کوچکی از جهان (یعنی جهان سرمایه‌داری) چنین ریخت و پاشی وجود دارد، هر سال جنگل‌های جهان کیلومترها عقب‌نشینی می‌کنند و جای خود را به بیابان می‌دهند. و تازه این، به قیمت گرسنگی و برهنگی بخش عمده‌ی جهان (یعنی جهان سوم) است که سردمداران سرمایه‌داری می‌توانند نظام کنونی را ادامه دهند.

«نظام مصرفی» به معنای خوردن، پوشیدن، نوشتن، خواندن و در جایی زیستن نیست، نظام مصرفی به معنای مصرف بی‌رویه و بیهوده‌ی کالا و نابود کردن سرچشمه‌های طبیعی، به خاطر انباشتن سود و سرمایه است؛ چیزی که خاص نظام سرمایه‌داری است.

نظام مصرفی سرمایه‌داری نه انسانی است و نه امکان ادامه‌ی حیات دارد. به این دلیل انسانی نیست که رفاه و دست‌ودلبازی بخش ناچیزی از جهان، به قیمت رنج و تیره‌روزی اکثریت مردم دنیا فراهم می‌شود. به این دلیل انسانی نیست که برای حفظ آن باید بخش عمده‌ای از مردم جهان، جنگ، ویرانی و گرسنگی را تحمل کنند... در واقع غرش توپ‌ها، شلیک موشک‌ها و پرواز هواپیماها، جنگی است که برای مردم جهان مرگ و قحطی، و برای سرمایه‌دار سود و رفاه می‌آورد...

نظام سرمایه‌داری، به این دلیل امکان ادامه‌ی حیات ندارد که اگر وضع به همین شکل ادامه پیدا کند، نابود شدن منابع حیاتی، امکان زندگی را از گیاه و جانور و انسان می‌گیرد... بی‌جهت نیست، «نهضت‌های سبز» که برای حفظ سرچشمه‌های طبیعی مبارزه و برای پاک نگهداشتن محیط زیست تلاش می‌کنند و بازتاب‌دهنده‌ی وجدان انسان‌های شریف و پاک در سراسر جهان هستند، تا به این اندازه مورد پشتیبانی مردم و دانشمندان و صاحبان فرهنگ، و در عین حال، مورد بغض و خشم سرمایه‌داران قرار دارند.

مردم زندگی «مصرفی» ندارند. مردم حق دارند بعد از تلاش شبانه‌روزی، به اندازه‌ی کافی غذا داشته باشند، خوب بپوشند، از سرپناهی استفاده کنند، تفریح کنند و نگران زندگی فرزندان خود نباشند. این سرمایه‌داران و غارتگران هستند که «جامعه‌ی مصرفی» را ساخته‌اند و نه تنها زندگی مردم، که به طور کلی، «زندگی» را به خطر انداخته‌اند.

مجموعه های متناهی، نامتناهی شمارا و ناشمارا

• حمیدرضا امیری

وقتی صحبت از مجموعه‌های متناهی و در مقابل آن‌ها مجموعه‌های نامتناهی می‌شود، مجموعه‌هایی چون مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی یا مجموعه‌ی اعداد فرد دو رقمی به عنوان مجموعه‌های متناهی، و مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) را می‌توان به عنوان مجموعه‌های نامتناهی درنظر گرفت. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا مجموعه‌های نامتناهی مانند $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ در یک گروه محسوب می‌شوند؟!

در این مقاله می‌کوشیم، علاوه بر معرفی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، مجموعه‌های نامتناهی را به دو دسته‌ی نامتناهیِ شمارا و نامتناهیِ ناشمارا تقسیم و با مثال‌هایی تفاوت این دو گروه از مجموعه‌های نامتناهی را مشخص کنیم.

قبل از هر چیز به تعریف مفهوم تناظر یک به یک نیاز داریم که این مفهوم را به این صورت بیان می‌کنیم:

تناظر یک به یک: اگر A و B دو مجموعه باشند و به ازای هر عضو از A یک عضو از B و به ازای هر عضو از B یک عضو از A وجود داشته باشد، می‌گوییم A و B تناظر یک به یک دارند و می‌نویسیم $A \approx B$.

برای مثال، اگر فرض کنیم $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ در این صورت واضح است که $A \approx B$ که این تناظر یک به یک را به شکل زیر ملاحظه می‌کنید:

A:	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
B:	a	b	c	d	e	f

همان‌طور که در تعریف دقت کردید، مفهوم تناظر یک به یک بین دو مجموعه‌ی A و B هیچ محدودیتی برای نامتناهی بودن این دو مجموعه ایجاد نمی‌کند و اگر این مفهوم را به دقت به کار ببریم، به سادگی و به صورت زیر می‌توان



نشان داد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعیِ زوج تناظر یک به یک دارند؛ یعنی $2\mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	....
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$2\mathbb{N}$:	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	....

(کمی جلوتر همین تناظر یک به یک بین مجموعه‌های نامتناهی را به صورتی دقیق‌تر و با تعریف تابعی دو سویی، یعنی تابعی یک به یک و پوشا بین دو مجموعه، نشان خواهیم داد.)

حال به سراغ بحث اصلی می‌رویم و با تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی آغاز می‌کنیم.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد حروف صدادار انگلیسی از تعداد حروف انگلیسی کم‌تر است زیرا مجموعه‌ی اول جزو مجموعه‌ی دوم است. آیا این اصل در مورد مجموعه‌هایی چون $\mathbb{N}$ و زیرمجموعه‌های آن نیز صادق است؟ آیا می‌توان گفت تعداد اعضای مجموعه‌ی اعداد طبیعی و زوج، از تعداد اعضای $\mathbb{N}$ کم‌تر است؟

برای پاسخ به این سؤال باید مفاهیم متناهی و نامتناهی را در مجموعه‌ها بررسی کنیم و برای آن تعریفی جامع و مانع ارائه دهیم.

قبل از بررسی دو مفهوم متناهی و نامتناهی، به دلیل وابستگی این دو مفهوم به مفهوم «تعداد اعضا»، ابتدا مفهوم **تعداد اعضا** را بررسی می‌کنیم.

در مورد مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی دانش‌آموزان و مجموعه‌ی صندلی‌ها، راه مستقیمی که برای مقایسه‌ی تعداد اعضای این دو مجموعه وجود دارد، شمارش تعداد اعضای هر مجموعه و مقایسه‌ی اعداد حاصل است.

اما آیا از این طریق می‌توان تعداد نقاط دو قطعه خط یا تعداد اعداد طبیعی و اعداد طبیعی زوج را با هم مقایسه کرد؟

برای رهایی از این مشکل، استفاده از روش کانتور بهترین راه‌حل است و آن برقراری تناظر یک به یک بین دو مجموعه است.

اگر مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی دانش‌آموزان خارج از کلاس و مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی صندلی‌های داخل کلاس تصور کنیم و بخواهیم بین A و B تناظری یک به یک برقرار سازیم، سه حالت ممکن است رخ بدهد:

۱. حالتی که هیچ دانش‌آموزی خارج از کلاس نمانده باشد و هیچ صندلی خالی نیز در کلاس نباشد. در این حالت، بین دو مجموعه‌ی A و B تناظری یک به یک برقرار شده است که می‌گوییم تعداد اعضای A و B باهم برابرند (A و B هم‌عدد هستند).

۲. حالتی که همه‌ی صندلی‌ها اشغال شده باشند و تعدادی دانش‌آموز نیز در خارج کلاس باقی مانده باشند. در این جا تعداد اعضای A بیش‌تر از تعداد صندلی‌ها بوده است. در این حالت، B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد شده است و نیز A با هیچ زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد نیست.

۳. حالتی که همه‌ی دانش‌آموزان روی صندلی نشسته باشند، ولی بعضی از صندلی‌ها خالی مانده باشند. در این حالت می‌توان گفت: تعداد اعضای B بیش‌تر از تعداد اعضای A است.

حال می‌توان با استمداد از مفهوم تناظر یک به یک، مقایسه‌ی بین تعداد اعضای دو مجموعه مانند A و B را مستقل از مفهوم عدد به صورت این تعریف‌ها تعمیم داد:

تعریف: دو مجموعه‌ی A و B را هم‌عدد می‌گوییم و می‌نویسیم: $A \approx B$؛ هرگاه تناظری یک به یک بین A و B برقرار باشد.

تعریف: اگر مجموعه‌ی A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد باشد، ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد نباشد، می‌گوییم A ضعیف‌تر از B است و می‌نویسیم $A < B$.

قضیه: رابطه‌ی هم‌عددی در مجموعه‌ی مجموعه‌ها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

I) $A \approx A$

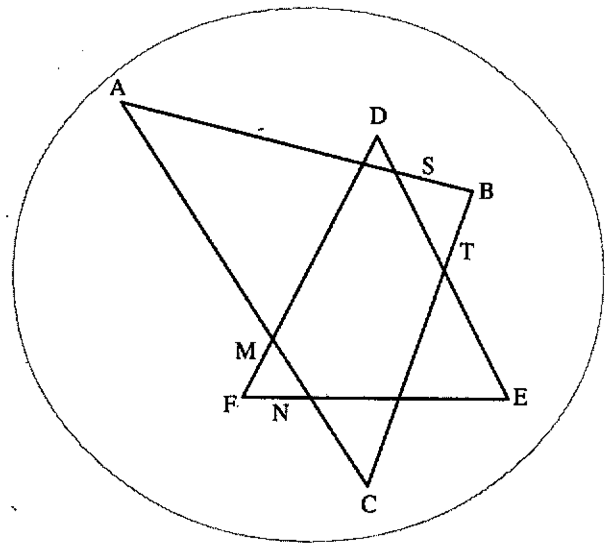
II) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

III) $A \approx B$ و $B \approx C \Rightarrow A \approx C$

قضیه‌ی زیر را که به قضیه‌ی «کانتور و برنشتاین» یا قضیه‌ی «هم‌ارزی» معروف است، می‌پذیریم:

قضیه: اگر مجموعه‌ی A با زیرمجموعه‌ای از B و نیز مجموعه‌ی B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد باشند، آن‌گاه دو مجموعه‌ی A و B با یکدیگر هم‌عدد خواهند بود.

مسأله: ثابت کنید مجموعه نقاط پاره‌خط AC و DE با یکدیگر هم‌عدد هستند.



اثبات: تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه نقاط دو پاره‌خط AC و ST وجود دارد. پس AC با زیرمجموعه‌ای از DE هم‌عدد است و نیز بین مجموعه‌نقاط DE و MN تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. پس DE با زیرمجموعه‌ای از AC هم‌عدد است. پس بنابر قضیه‌ی هم‌ارزی، AC و DE هم‌عددند.

تعریف: به ازای عدد طبیعی k، مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی با k را قطعه‌ی kام از اعداد طبیعی می‌نامیم و با N_k نشان می‌دهیم:

$N_k = \{۱,۲,۳,\ldots,k\}$

مثال: $N_۴ = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $N_۸ = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

تعریف: مجموعه‌ی A را متناهی می‌نامیم، هرگاه تهی باشد یا با قطعه‌ای مانند N_k از اعداد طبیعی هم‌عدد باشد. اگر $A = \varnothing$ باشد، می‌گوییم تعداد اعضای A صفر است و اگر $A \approx N_k$ باشد، تعداد اعضای A را (که عددی منحصربه‌فرد است) k می‌نامیم و می‌نویسیم: $n(A) = k$

در واقع وقتی $A \approx N_k$، بنابر مطالب گفته شده، بین A و N_k تناظری یک‌به‌یک برقرار می‌شود و این به نوعی شمارش اعضای A توسط N_k محسوب می‌شود.

$A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$

$N_k = \{۱,۲,۳,\ldots,k\}$

تناظر یک‌به‌یک $f = \{(۱,a_۱),(۲,a_۲),\ldots,(k,a_k)\}$

مجموعه‌های متناهی ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را از مجموعه‌های نامتناهی جدا می‌کنند. مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

قضیه‌ی۱: هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی، متناهی است و اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $B \subseteq A$، آن‌گاه $۰ \le n(B) \le n(A)$.

قضیه‌ی۲: هیچ مجموعه‌ی متناهی نمی‌تواند با یک زیرمجموعه‌ی حقیقی خود (زیرمجموعه‌ی حقیقی A مجموعه‌ای است چون B که $B \neq A$ و $B \subset A$) هم‌عدد باشد.

قضیه‌ی۳: اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

I) $(A \cup B)$ و $(A \cap B)$ و $(A - B)$ متناهی هستند

II) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

III) $n(A \times B) = n(A).n(B)$

حال این مسأله پیش می‌آید که مجموعه‌ای چون $\mathbb{N}$ با هیچ قطعه‌ای از $\mathbb{N}$ یعنی با هیچ قطعه‌ای از خودش هم‌عدد نیست. پس متناهی نیست. به چنین مجموعه‌هایی چه می‌توان گفت؟ درست است این مجموعه‌ها که متناهی نیستند، نامتناهی نامیده می‌شوند، یعنی در حالت کلی:

تعریف: مجموعه‌ی A را نامتناهی می‌نامیم، هرگاه متناهی نباشد. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی A نامتناهی است، هرگاه تهی نباشد و با هیچ قطعه‌ای از اعداد طبیعی هم‌عدد نباشد.

مجموعه‌های نامتناهی نیز ویژگی‌های خاص خود را دارند که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

قضیه‌ی۱: هر مجموعه که زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، نامتناهی است.

قضیه‌ی۲: هر مجموعه که با یک زیرمجموعه‌ی حقیقی خود هم‌عدد باشد، نامتناهی است.

قضیه‌ی ۳: مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است (کاربرد قضیه‌ی ۲) (زیرا $\mathbb{N}$ با $۲\mathbb{N}$ تناظر یک‌به‌یک دارد).

$$\begin{array}{lccccc} \mathbb{N}: & ۱ & ۲ & ۳ & \ldots\ldots & n \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ ۲\mathbb{N}: & ۲ & ۴ & ۶ & \ldots\ldots & ۲n \end{array} \quad \begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to ۲\mathbb{N} \\ f(n)=۲n \end{array}$$ (f تابعی دوسویی است)

قضیه‌ی ۴: هر مجموعه که با یک مجموعه‌ی نامتناهی هم‌عدد باشد، نامتناهی است.

نتیجه: Z نامتناهی است.

$$f:\mathbb{N}\to Z$$

$$f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{۲} & \text{زوج } n \\ \dfrac{۱-n}{۲} & \text{فرد } n \end{cases}$$

(f تناظری یک‌به‌یک است یا تابعی دوسویی است)

سرانجام به بحث بسیار مهم و شاید تا حدی چالش‌برانگیز می‌رسیم به نام مفهوم شمارایی و ناشمارایی!

چه مجموعه‌هایی شمارا یا شمارش‌پذیرند؟ آیا مفهوم شمارش‌پذیری و مفهوم متناهی در مجموعه‌ها معادل یکدیگرند؟ برای پاسخ به این سؤال‌ها باید تعریف مجموعه‌های شمارا و ناشمارا به‌درستی تبیین شود.

تعریف: مجموعه‌ی A را شمارا یا شمارش‌پذیر می‌نامیم، هرگاه با $\mathbb{N}$ هم‌عدد باشد و اگر مجموعه‌ای متناهی یا شمارا باشد، آن را حداکثر شمارا می‌نامیم.

با توجه به تعریف بالا می‌توان گفت:

۱. مجموعه‌های شمارا نامتناهی هستند (زیرا با $\mathbb{N}$ هم‌عدد هستند)؛

۲. هر مجموعه‌ی متناهی حداکثر شماراست؛

۳. اعضای مجموعه‌های شمارا را می‌توان توسط $\mathbb{N}$ برچسب‌گذاری کرد. در واقع $\mathbb{N}$ مجموعه‌ای برچسب‌گذار است، همان‌طور که اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $n(A)=k$، مجموعه‌ی A را می‌توان توسط N_k برچسب‌گذاری کرد؛

۴. مجموعه‌های شمارا دوبه‌دو هم‌عدد هستند؛

۵. هریک از مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $۲\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی زوج) و $۲\mathbb{N}+۱$، Z و W شمارا هستند؛

۶. مجموعه‌ی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شماراست؛

$$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$$f(m,n)=۲^{m-۱}(۲n-۱)$$

(به عنوان تمرین ثابت کنید این تابع دوسویی است)

۷. مجموعه‌ی Z (اعداد صحیح) شماراست.

(ثابت می‌شود که f تابعی دوسویی است و

$$f:\mathbb{N}\to Z$$

$$f(n)=\left[\frac{n}{۲}\right]\times(-۱)^n$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اعداد صحیح و مثبت توسط تأثیر f روی اعداد طبیعی زوج و بقیه توسط اعداد طبیعی فرد تولید می‌شوند).

$$f(۱)=۰\times(-۱)^۱=۰\ ,\ f(۲)=۱\times(-۱)^۲=۱$$

$$f(۳)=۱\times(-۱)^۳=-۱\ ,\ f(۴)=۲\times(-۱)^۴=۲$$

$$f(۵)=۲\times(-۱)^۵=-۲\ ,\ f(۶)=۳\times(-۱)^۶=۳$$

$$f(۲n+۱)=\left[\frac{۲n+۱}{۲}\right]\times(-۱)^{۲n+۱}=n+\left[\frac{۱}{۲}\right]\times(-۱)^{۲n+۱}=-n$$

$$f(۲n)=\left[\frac{۲n}{۲}\right]\times(-۱)^{۲n}=n\times(-۱)^{۲n}=n$$

قضیه‌های مربوط به مجموعه‌های شمارا

قضیه‌ی ۱: هر مجموعه‌ی نامتناهی، زیرمجموعه‌ای شمارا دارد.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. عضو دلخواهی از A انتخاب می‌کنیم و آن را $a_۱$ می‌نامیم. چون A نامتناهی است، پس $A-\{a_۱\}$ تهی نیست. عضو دلخواهی از $A-\{a_۱\}$ انتخاب می‌کنیم و آن را $a_۲$ می‌نامیم. پس $a_۱\neq a_۲$. به‌همین ترتیب، به‌ازای عدد طبیعی n اعضای $a_۱$ و $a_۲$ و... و a_n را به طریق فوق که همگی دوبه‌دو متمایز هستند، انتخاب می‌کنیم و از مجموعه‌ی $A-\{a_۱,\ldots,a_n\}$ نیز عضو دلخواه $a_{n+۱}$ را. درنهایت مجموعه‌ی $B=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_n,\ldots\}$ را که مجموعه‌ای شمارا و زیرمجموعه‌ی A است می‌سازیم.

قضیه‌ی ۲: هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی شمارا، حداکثر شماراست.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارا باشد و $E\subseteq A$، اگر E متناهی باشد که حکم ثابت است و اگر E متناهی نباشد،

بنابر قضیه‌ی قبل، زیرمجموعه‌ای شمارا چون E_1 دارد. و چون A شماراست، پس $E_1 \approx A$. از طرف دیگر، $E \subseteq A$ و $E \approx E$ پس A زیرمجموعه‌ای هم‌عدد با E و E نیز زیرمجموعه‌ای هم‌عدد با A دارد. پس بنابر قضیه‌ی هم‌ارزی، $E \approx A$ و بنابراین E شماراست.

قضیه‌ی ۳: اگر A مجموعه‌ای شمارا و B مجموعه‌ای حداکثر شمارا و ناتهی باشد، مجموعه‌ی $A \times B$ شماراست.

$$\left.\begin{array}{l} \text{شمارا } A \Rightarrow A \approx \mathbb{N} \\ \text{شمارا } B \Rightarrow B \approx \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow A \times B \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \Rightarrow \text{شماراست } A \times B$$

در اثبات فوق، از قضیه‌ی زیر که آن را بدون اثبات می‌پذیریم استفاده شده است:

$$\begin{array}{l} A \approx B \\ C \approx D \end{array} \Rightarrow A \times C \approx B \times D$$

قضیه‌ی ۴: اگر E مجموعه‌ای ناشمارا باشد و A زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارا از E باشد، آن‌گاه $E - A \approx E$.

قضیه‌ی ۵: هر مجموعه‌ی نامتناهی حداقل با یک زیرمجموعه‌ی حقیقی خود هم‌عدد است. اگر A نامتناهی باشد و B زیرمجموعه‌ای متناهی و ناتهی از A باشد، واضح است که $(A-B)$ یک زیرمجموعه‌ی حقیقی A است و بنابر قضیه‌ی ۴، $A - B \approx A$.

شاید جالب‌ترین نتیجه‌ای که بتوان از مطالب گفته شده گرفت، شمارش‌پذیر بودن مجموعه‌ی اعداد گویا یعنی Q باشد که اگر فرض کنیم:

$$Q = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in Z,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

واضح است که با فرض $(m,n) = ۱$ (m و n نسبت به هم اول باشند)، هر $\frac{m}{n}$ را به شکل منحصربه‌فردی می‌توان به صورت زوج مرتب (m,n) نمایش داد. در این حالت و با توجه به تعریف ضرب دکارتی می‌توان نوشت:

$$\left\{(m,n) \middle| m \in Z,\ n \in \mathbb{N}\right\} = Z \times \mathbb{N}$$

پس ملاحظه می‌کنید که $Q \approx Z \times \mathbb{N}$ و چون (قبلاً ثابت شد که $Z \times Z$ شماراست) $Z \times \mathbb{N}$ شماراست، پس Q نیز شماراست و نیز می‌توان نتیجه گرفت که $(\mathbb{R} - Q)$ یعنی مجموعه‌ی اعداد گنگ، مجموعه‌ای ناشماراست.



تفریح اندیشه

● حسین نامی ساعی

کی حوض پر می‌شود؟

یک لوله‌ی آب، حوضی را در ۳۵ دقیقه، لوله‌ی دیگری در ۴۰ دقیقه، و لوله‌ی بعدی در ۵۰ دقیقه پر می‌کنند. اگر هر سه لوله‌ی آب هم‌زمان باز باشند، در چه مدت حوض پر می‌شود؟

حل: حجم حوض را x لیتر فرض می‌کنیم. در این صورت، سرعت جریان آب از لوله‌ی اول برابر $\frac{x}{۳۵}$ لیتر در دقیقه است.

(چون: زمان × سرعت = حجم حوض)

بنابراین، مقدار آبی که در T دقیقه، از لوله‌ی اول جاری می‌شود، برابر است با: $\frac{x}{۳۵} \times T$ لیتر.

با باز بودن هر سه لوله در T دقیقه، زمان T به روش زیر محاسبه می‌شود:

$$\left(\frac{x}{۳۵} \times T\right) + \left(\frac{x}{۴۰} \times T\right) + \left(\frac{x}{۵۰} \times T\right) = x$$

$$\frac{T}{۳۵} + \frac{T}{۴۰} + \frac{T}{۵۰} = ۱$$

$$\frac{۴۰T + ۳۵T + ۲۸T}{۱۴۰۰} = ۱$$

$$\frac{۱۰۳T}{۱۴۰۰} = ۱ \Rightarrow T = \frac{۱۴۰۰}{۱۰۳} \simeq ۱۳/۶ \text{ دقیقه}$$

یعنی ۱۳/۶ دقیقه زمان لازم است تا با باز بودن هر سه لوله، حوض پر شود.

احمد قلعه‌داری

مقدمه

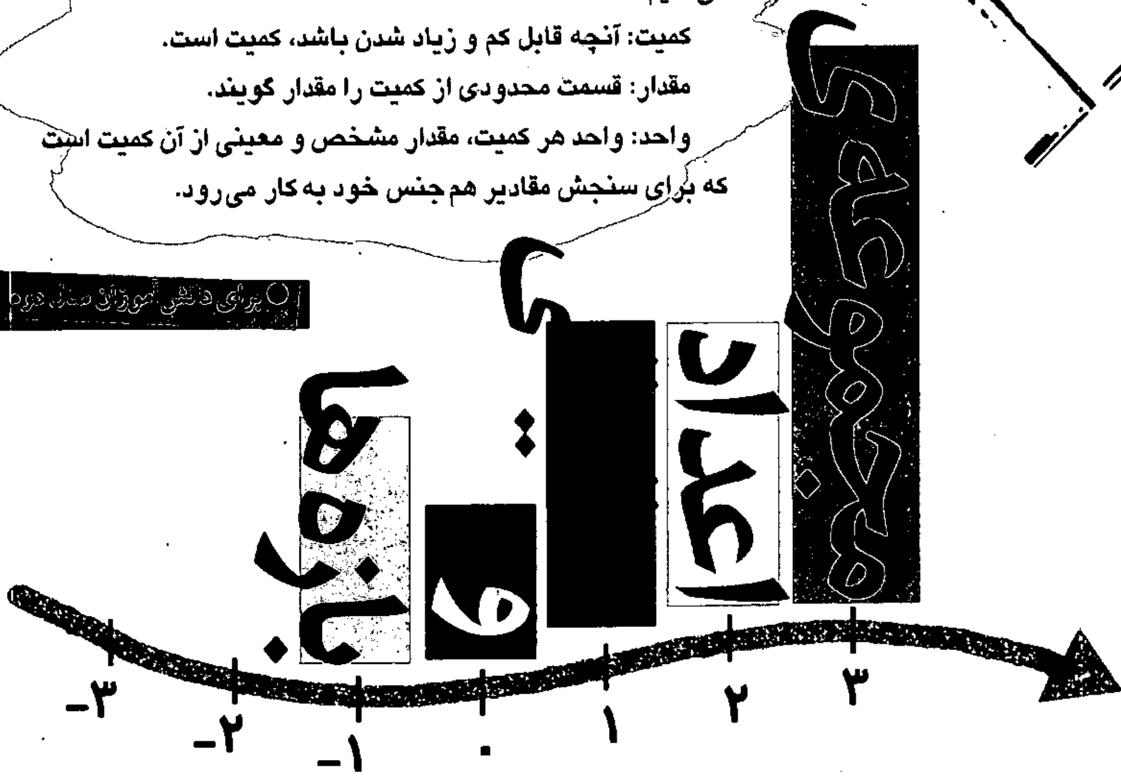
در بیان مطالب ریاضی به مفاهیمی مانند کمیت، مقدار، واحد و عدد برمی‌خوریم که ممکن است برای خواننده خیلی روشن نباشند. به همین خاطر، قبل از ورود به بحث اصلی، این مفاهیم را تعریف می‌کنیم.

کمیت: آنچه قابل کم و زیاد شدن باشد، کمیت است.

مقدار: قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند.

واحد: واحد هر کمیت، مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجش مقادیر هم‌جنس خود به‌کار می‌رود.

برای دانش‌آموزان سال دوم



عدد: نتیجه‌ی سنجش هر مقدار از یک کمیت با واحد هم‌جنس خودش، عدد است.

انواع عدد: اعداد را به سه دسته تقسیم می‌کنند به نام‌های **اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و اعداد شناسایی**.

اعداد اصلی: برای بیان کمیت به‌کار می‌روند. برای مثال، ساعت ۱۱ صبح، نمره‌ی ۱۷ در درس حسابان یا ۲۰ هزار تومان قرض. این اعداد قابل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم با یکدیگر هستند.

اعداد ترتیبی: این اعداد صرفاً در مقایسه به‌کار می‌روند. برای مثال، حمید در درس فیزیک نفر سوم کلاس است، یا علی نفر هفتم در صف اتوبوس است. اعداد سوم و هفتم در این جملات، اعداد ترتیبی نامیده می‌شوند.

اعداد شناسایی: این اعداد صرفاً برای شناسایی به‌کار می‌روند. برای مثال، خیابان بیستم، کوچه‌ی پنجم، اتوبوس خط ۱۱۸.

اعداد چگونه پیدا شدند

پیدا شدن اعداد، از شمارش و اندازه‌گیری ناشی شده است. به این صورت که در زمان‌های قدیم، برای شمارش اشیا یا حیوانات یا... اعداد طبیعی کافی بودند. مثلاً پنج تا گوسفند یا ده تا درخت. اما با پیدایش تدریجی رابطه‌های اجتماعی در آن روزگار، برای بیان بدهی یا سود و زیان، دیگر اعداد طبیعی کافی نبودند و این نیاز، به پیدا شدن اعداد صحیح منجر شد. اما در سنجش مفاهیم و کمیت‌های پیوسته مانند زمان و دما، مقیاسی لازم بود که شامل اعدادی بین اعداد صحیح باشد. در نتیجه، اعدادی پیدا شدند به نام اعداد گویا: مانند $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۷}{۳}$ و $-\frac{۵}{۲}$ و...

در یونان باستان دریافته بودند، نسبت محیط دایره به قطرش، عددی است که نمی‌توان دقیقاً آن را با عددهای گویا بیان کرد؛ اگرچه به‌طور تقریب این عدد را $\frac{۲۲}{۷}$ در نظر می‌گرفتند که تقریب بسیار مناسبی است، زیرا:

$$\frac{۲۲}{۷}=۳/۱۴۲۸۵۷$$

ولی بعدها معلوم شد که این عدد و عددهای نظیر آن، دسته‌ی جدیدی از اعداد را وارد ریاضی می‌کنند به نام عددهای اصم یا گنگ یا رادیکالی؛ مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۵}$ و π و $\sqrt{۷}$ و ...

پس از پیدا شدن این عددها، مجموعه‌ای را که شامل، اعداد صحیح و اعداد گویا و اعداد اصم باشد، مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامیدند و آن را با $\mathbb{R}$ نشان دادند.

با این مقدمه، به تعریفی دقیق‌تر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌پردازیم.

مجموعه‌ی اعداد حقیقی: مجموعه‌ای است شامل زیر مجموعه‌های:

۱. مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N)

مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$N=\{۱,۲,۳,\cdots,n,\cdots\}$$

۲. مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبی (Z)

مجموعه‌ای است شامل اعداد طبیعی و قرینه‌ی آن‌ها و عدد صفر. این مجموعه را به صورت

$$Z=\{\cdots,-n,\cdots,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots,n,\cdots\}$$

نشان می‌دهند.

۳. مجموعه‌ی اعداد صحیح گویا (Q)

مجموعه‌ای است شامل مجموعه‌ی Z و اعداد کسری یا اعشاری بین عضوهای Z؛ مانند

$$\{\cdots,-n,\cdots,-۴,-\frac{۲}{۳},-۱,-\frac{۱}{۱۰},۰,\cdots,\frac{۱}{۲},\cdots,۵,\cdots,\frac{۱۱}{۲},\cdots,n,\cdots\}$$

به بیان ریاضی، این مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\middle| p,q\in Z\ ,\ q\neq ۰\right\}$$

۴. مجموعه‌ی اعداد اصم یا گنگ (Q')

مجموعه‌ی $(\mathbb{R}-Q)$ را مجموعه‌ی اعداد اصم یا گنگ گویند و آن را با Q' نشان می‌دهند؛ مانند مجموعه‌ی $\{\cdots,-\sqrt{۱۵},\cdots,-\sqrt{۱۱},\cdots,-\sqrt{۲},\cdots,\sqrt{۳},\sqrt{۷},\cdots\}$ به بیان ریاضی، این مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$Q'=\{x\in\mathbb{R}|x\notin Q\}$$

نکته‌ی ۱: بسط اعشاری هر عدد گویا ممکن است به سه شکل باشد:

الف) پایان‌پذیر باشد؛ مانند:

$$\frac{۴۵}{۱۲}=۳/۷۵\qquad \frac{۱۸}{۵}=۳/۶\qquad \frac{۵}{۸}=۰/۶۲۵$$

ب) بی‌پایان ولی متناوب ساده باشد؛ مانند:

$$\frac{۵}{۱۱}=۰/۴۵۴۵۴۵\cdots\qquad \frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷۲۷\cdots$$

ج) بی‌پایان ولی متناوب مرکب باشد؛ مانند:

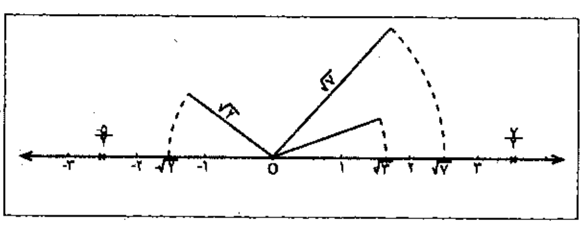
$$\frac{۱۱}{۱۵}=۰/۷۳۳۳\cdots\qquad \frac{۱۳}{۱۸}=۰/۷۲۲۲\cdots$$

نکته‌ی ۲: بسط اعشاری هر عدد اصم یا گنگ، بی‌پایان و غیر متناوب است؛ مانند:

$$\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۰۸۰۷\cdots,\sqrt{۷}=۲/۶۴۵۷۱۳۱۱\cdots$$

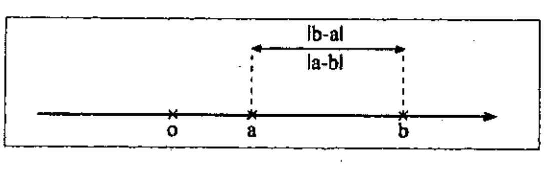
نکته‌ی ۳: عدد اصم یا گنگ را نمی‌توان به صورت عدد گویای $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q نسبت به هم اول باشند. برای مثال، می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{۲}$ را نمی‌توان به صورت عدد گویای $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q نسبت به هم اول باشند (اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم).

نکته‌ی ۴: هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت نقطه‌ای از یک محور مشخص کرد و برعکس هر نقطه از محور را می‌توان به یک عدد حقیقی مربوط ساخت. در واقع تناظری یک‌به‌یک بین اعداد حقیقی و نقاط یک محور وجود دارد.



مبدأ مختصات را متناظر با عدد ۰، اعداد مثبت را سمت راست مبدأ و اعداد منفی را سمت چپ مبدأ در نظر می‌گیرند.

فاصله‌ی بین اعداد حقیقی a و b روی یک محور: فاصله‌ی بین اعداد حقیقی a و b را روی یک محور با $|a-b|$ یا $|b-a|$ نشان می‌دهیم.



بازه‌ها

بسیاری از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی، بازه‌ها هستند.

فرض می‌کنیم $a < b \;,\; a,b \in \mathbb{R}$

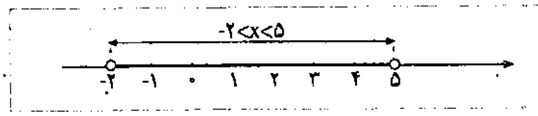
۱ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a < x < b$ صدق می‌کند، یعنی:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

مثال: بازه‌ی $(-۲ , ۵)$ یعنی:

$$(-۲,۵) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x < ۵\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



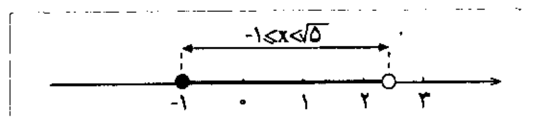
۲ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a \le x < b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$$

مثال: بازه‌ی $[-۱,\sqrt{۵})$ یعنی:

$$[-۱,\sqrt{۵}) = \{x \in \mathbb{R} | -۱ \le x < \sqrt{۵}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



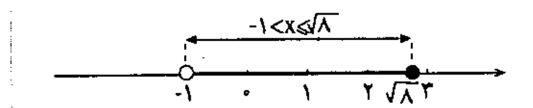
۳ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a < x \le b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$$

مثال: بازه‌ی $(-۱,\sqrt{۸}]$ یعنی:

$$(-۱,\sqrt{۸}] = \{x \in \mathbb{R} | -۱ < x \le \sqrt{۸}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:



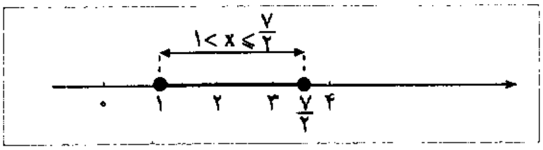
۴ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $a \le x \le b$ صدق می‌کند؛ یعنی:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$$

مثال: بازه‌ی $[۱,\frac{۷}{۲}]$ یعنی:

$$[۱,\frac{۷}{۲}] = \{x \in \mathbb{R} | ۱ \le x \le \frac{۷}{۲}\}$$

که نمایش آن روی محور چنین است:

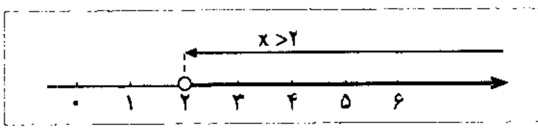


۵ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x > a$ صدق کند؛ یعنی:

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۲، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x > ۲$ صدق می‌کند؛ یعنی: $(۲,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | ۲ < x\}$

که نمایش آن روی محور چنین است:

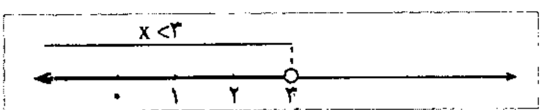


۶ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x < a$ صدق کند؛ یعنی:

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x < ۳$ صدق می‌کند؛ یعنی $(-\infty,۳) = \{x \in \mathbb{R} | x < ۳\}$

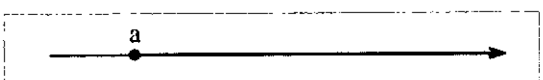
که نمایش آن روی محور چنین است:



۷ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x \ge a$ صدق کند؛ یعنی:

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$$

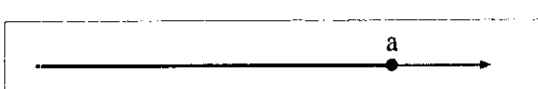
نمایش آن روی محور چنین است:



۸ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی a، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی که در نامساوی $x \le a$ صدق کند؛ یعنی:

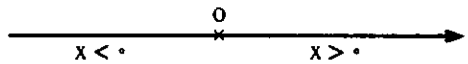
$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$$

نمایش آن روی محور چنین است:



۹ . مجموعه‌ی اعداد حقیقی IR را در بازه‌ها به صورت $(-\infty,+\infty)$ نشان می‌دهند.

$(-\infty,+\infty)=\{x\in R\}$ که نمایش آن همه‌ی محور است.



قدر مطلق

$$|x|=\begin{cases}x\ , & x\ge 0\\ -x\ , & x<0\end{cases}$$

توجه کنید که حاصل $|x|$ عددی مثبت یا صفر است.

مثال: $|x-2|=\begin{cases}(x-2)\ , & x\ge 2\\ -(x-2)\ , & x<2\end{cases}$

۱ . معادله‌ی قدرمطلق

$$\left.\begin{matrix}|x|=a\\ \text{یا}\\ x^2=a^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\pm a\ ,\ a>0$$

مثال: این معادله‌ها را حل کنید:

الف) $|2x-3|=7$

حل:

$|2x-3|=7\Rightarrow 2x-3=\pm 7\Rightarrow 2x=3\pm 7\Rightarrow$

$x=\frac{3\pm 7}{2}\Rightarrow x_1=\frac{3+7}{2}=5$ یا $x_2=\frac{3-7}{2}=-2$

ب) $|2x^2-7|=1$

$|2x^2-7|=1\Rightarrow 2x^2-7=\pm 1\Rightarrow 2x^2=7\pm 1\Rightarrow$

حل:

$$\begin{cases}2x^2=8\\ \text{یا}\\ 2x^2=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=4\\ \text{یا}\\ x^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 2\\ \text{یا}\\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

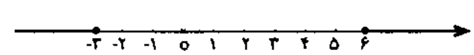
۲ . نامعادله‌ی قدرمطلق

الف)

$$\left.\begin{matrix}|x|\ge a\\ \\ x^2\ge a^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\ge a \text{ یا } x\le -a\quad a>0$$

مثال: نامعادله‌ی $|2x-3|\ge 9$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:



$$|2x-3|\ge 9\Rightarrow\begin{cases}2x-3\ge 9\\ \text{یا}\\ 2x-3\le -9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x\ge 12\\ \text{یا}\\ 2x\le -6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 6\\ \text{یا}\\ x\le -3\end{cases}$$

ب)

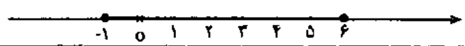
$$\left.\begin{matrix}|x|\le a\\ \\ x^2\le a^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow -a\le x\le a\ ,\ a>0$$

مثال: نامعادله‌ی $|2x-5|\le 7$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:

$|2x-5|\le 7\Rightarrow -7\le 2x-5\le 7\Rightarrow$

$-2\le 2x\le 12\Rightarrow -1\le x\le 6$



ج)

$$\left.\begin{matrix}a\le |x|\le b\\ \\ a^2\le x^2\le b^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow -b\le x\le -a \text{ یا } a\le x\le b\quad 0<a<b$$

مثال: معادله‌ی $1\le|2x-3|\le 9$ را حل کنید و جواب‌ها را روی محور نشان دهید.

حل:

$$1\le|2x-3|\le 9\Rightarrow\begin{cases}-3\le 2x-3\le -1\\ \text{یا}\\ 1\le 2x-3\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le 2x\le 2\\ \text{یا}\\ 4\le 2x\le 6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ \text{یا}\\ 2\le x\le 3\end{cases}$$



توجه: عدد میانی بازه‌ی (a,b) یا بازه‌ی $[a,b]$ برابر $\frac{a+b}{2}$ است.

مثال: عدد میانی حاصل از بازه‌ی $(-\frac{3}{4},\frac{7}{2})\cap(-\frac{1}{2},\frac{17}{4})$ را بیابید.

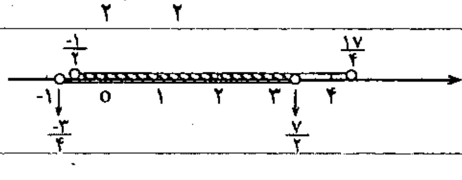
حل: $(-\frac{3}{4},\frac{7}{2})\cap(-\frac{1}{2},\frac{17}{4})=(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$

$$\text{عدد میانی}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{2}$$

به کمک محور نیز می‌توان مثال را حل کرد:

$$\text{اشتراک}=(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$$

$$\text{عدد میانی}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{2}$$



برای دانش آموزان سال سوم

۲

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری

● محمدهاشم رستمی

اشاره:
در شماره قبل درباره‌ی وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم بحث کردیم، اینک در ادامه‌ی مطلب درباره‌ی علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم بحث می‌کنیم.

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری

اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را x' و x'' بنامیم، مجموع ریشه‌های این معادله، $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌های آن $P = x'x'' = \frac{c}{a}$ است. یک روش برای نشان دادن درستی این مطلب، استفاده از دستور (b) برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم است. زیرا داریم:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = x' + x'' = -\frac{b}{a}}$$

$$P = x'x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$\Rightarrow P = x'x'' = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{P = x'x'' = \frac{c}{a}}$$

با استفاده از علامت حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم، یعنی علامت $P = x'x'' = \frac{c}{a}$ و علامت مجموع ریشه‌ها، یعنی علامت $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$ می‌توانیم، علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم را تعیین کنیم. از طرف دیگر، چون وجود ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم با استفاده از علامت $\Delta = b^2 - 4ac$ (یا علامت Δ') مشخص می‌شود، پس برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم باید، Δ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را تعیین علامت کنیم.

مثال۱. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x + 1 = 0$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$a = 2,\ b = -3,\ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = +1 > 0$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ دو ریشه هم‌علامت هستند

$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = +\frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$

درنتیجه هر دو ریشه‌ی معادله مثبت هستند.

مثال ۲. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲} + ۱۳x + ۴ = ۰$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$a = ۲,\ b = ۱۳,\ c = ۴$

$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۱۳)^{۲} - ۴(۲)(۴) = ۱۶۹ - ۳۲ = ۱۳۷ > ۰$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد

$P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۲} = ۲ > ۰ \Rightarrow$ دو ریشه هم‌علامت هستند

$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-۱۳}{۲} < ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی هستند

مثال۳. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۵x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰$ را تعیین کنید (بدون حل کردن معادله).

حل:

داریم:

$a = ۵,\ b = -۲,\ c = -۳$

$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۲)^{۲} - ۴(۵)(-۳) = ۴ + ۶۰ = ۶۴ > ۰$

پس معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-۳}{۵} < ۰$

بنابراین دو ریشه‌ی معادله مختلف‌العلامت هستند.

$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-(-۲)}{۵} = +\frac{۲}{۵} > ۰$

درنتیجه قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است.

نکته: وقتی در یک معادله‌ی درجه دوم، a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ حتماً مثبت است، یعنی معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد و این دو ریشه مختلف‌العلامت هستند. در این حالت برای این‌که بررسی کنیم قدرمطلق کدام ریشه بیش‌تر است، علامت $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ را تعیین می‌کنیم. اگر $-\frac{b}{a} > ۰$ باشد، قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است و اگر $-\frac{b}{a} < ۰$ باشد، قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر خواهد بود.

در صورتی که $-\frac{b}{a} = ۰$ یعنی $b = ۰$ باشد، دو ریشه قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال۴. وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $۷x^{۲} + ۳x - ۲ = ۰$ را بدون حل کردن معادله تعیین کنید.

حل: چون a و c مختلف‌العلامت هستند، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد و چون:

$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{۳}{۷} < ۰$

پس قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر است.

به طور کلی برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ جدول زیر را داریم:

Δ	$\frac{c}{a}$	$-\frac{b}{a}$	نتیجه
$\Delta > ۰$ معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد	$\frac{c}{a} > ۰$ دو ریشه هم‌علامت هستند	$-\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow$	هر دو ریشه مثبت هستند
		$-\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow$	هر دو ریشه منفی هستند
	$\frac{c}{a} < ۰$ دو ریشه مختلف‌العلامت هستند	$-\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow$	قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بیش‌تر است
		$-\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow$	قدرمطلق ریشه‌ی منفی بیش‌تر است
	$\frac{c}{a} = ۰$ یک ریشه صفر است	$-\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow$	یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر مثبت است
		$-\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow$	یک ریشه صفر و ریشه‌ی دیگر منفی است
$\Delta = ۰$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد	$\frac{c}{a} > ۰$	$-\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow$	ریشه‌ی مضاعف مثبت است
		$-\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow$	ریشه‌ی مضاعف منفی است
	$\frac{c}{a} = ۰$	$x' = x'' = ۰$	معادله ریشه‌ی مضاعف صفر دارد
$\Delta < ۰$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد			ریشه‌ی حقیقی وجود ندارد

نکته‌ی مهم: برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری باید Δ ، $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ را برحسب پارامتر محاسبه و در جدولی تعیین علامت کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $x^2 - 2(m+1)x + 3m + 1 = 0$ به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

حل:

Δ یا ′Δ ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

$a = 1,\ b = -2(m+1) \Rightarrow b' = -(m+1),\ c = 3m+1$

$\Delta' = b'^2 - ac = (m+1)^2 - 1(3m+1) = m^2 - m$

$\Delta' = 0 \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m(m-1) = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0, m = 1}$

$\frac{c}{a} = \frac{3m+1}{1} = 3m+1,\ 3m+1 = 0 \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{3}}$

$\frac{-b}{a} = \frac{+2(m+1)}{1} = 2(m+1), 2(m+1) = 0 \Rightarrow m+1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{m = -1}$

m	$-\infty$ تا -1	-1 تا $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ تا 0	0 تا 1	1 تا $+\infty$
Δ	+	+	+	−	+
$\frac{c}{a}$	−	−	+	+	+
$\frac{-b}{a}$	−	+	+	+	+
R	دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه، قدر مطلق ریشه‌ی منفی بزرگ‌تر است	دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه، قدر مطلق ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است	دو ریشه‌ی مثبت	ریشه ندارد	دو ریشه‌ی مثبت

$m = -1$: $x_1 = -x_2$ ؛ $m = -\frac{1}{3}$: $x_1 = 0, x_2 > 0$ ؛ $m = 0$: $x_1 = x_2 > 0$ ؛ $m = 1$: $x_1 = x_2 > 0$

مثال ۲. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $2mx^2 - 2(m-3)x + m - 3 = 0$ به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید (ریشه‌ها را x_1 و x_2 و $x_1 < x_2$ بگیرید).

حل:

′Δ ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$\Delta' = b'^2 - ac = (m-3)^2 - 2m(m-3) = -m^2 + 9,$

$\Delta' = 0 \Rightarrow -m^2 + 9 = 0 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \boxed{m = +3,\ m = -3}$

$\frac{c}{a} = \frac{m-3}{2m},\ m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3},$

$2m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$ ریشه‌ی مخرج

$-\frac{b}{a} = \frac{2(m-3)}{2m},\ m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3},$

$2m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$ ریشه مخرج

m	$-\infty$ تا -3	-3 تا 0	0 تا 3	3 تا $+\infty$
Δ′	−	+	+	−
$\frac{c}{a}$	+	+	−	+
$\frac{-b}{a}$	+	+	−	+
R	ریشه ندارد	$0 < x_1 < x_2$	$x_1 < 0 < x_2$	ریشه ندارد

(در $m = 0$ مقدار $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ برابر ∞ است.)

$m = -3$: $x_1 = x_2 > 0$ ؛ $m = 0$: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \to \infty$ ؛ $m = 3$: $x_1 = x_2 = 0$

مثال ۳. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری $x^2 + (2m+1)x + 2m = 0$ به ازای مقدارهای مختلف پارامتر m بحث کنید (ریشه‌های معادله را x_1 و x_2 و $x_1 < x_2$ بگیرید).

حل:

Δ ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$a = 1,\ b = (2m+1),\ c = 2m$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2m+1)^2 - 4 \times 2m = 4m^2 + 1 + 4m - 8m$

$\Rightarrow \Delta = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2,\ \Delta = 0 \Rightarrow (2m-1)^2 = 0$

$\Rightarrow 2m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$

$\frac{c}{a} = \frac{2m}{1} = 2m,\ 2m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$

$-\frac{b}{a} = \frac{-(2m+1)}{1} = -2m - 1,\ -2m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$

m	$-\infty$		$\frac{-۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
Δ		+		+		+	۰	+	
$\frac{c}{a}$		−		−	۰	+		+	
$\frac{-b}{a}$		+	۰	−		−		−	
R		$x_{۱} < ۰ < x_{۲}$ $\lvert x_{۲}\rvert > \lvert x_{۱}\rvert$	$x_{۱} = -x_{۲}$	$x_{۱} < ۰ < x_{۲}$ $\lvert x_{۱}\rvert > \lvert x_{۲}\rvert$	$x_{۱} < x_{۲} = ۰$	$x_{۱} < x_{۲} < ۰$	$x_{۱} = x_{۲} < ۰$	$x_{۱} < x_{۲} < ۰$	

نکته: نتیجه‌ی جدول مربوط به بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم پارامتری را می‌توان، هم به صورت جملات فارسی (مانند مثال ۱) و هم به صورت نماد ریاضی (مانند مثال‌های ۲ و ۳) نوشت.

مثال ۴. معادله‌ی پارامتری $x^{۲} + ۲x + m - ۳ = ۰$ داده شده است. به ازای مقدارهای متفاوت پارامتر m در وجود و علامت ریشه‌های این معادله بحث کنید.

حل:

Δ'، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم.

داریم:

$$a = ۱,\ b = ۲,\ c = m - ۳$$

$$\Delta' = b'^{۲} - ac = (۱)^{۲} - ۱(m - ۳) = ۱ - m + ۳ = -m + ۴,$$

$$\Delta' = ۰ \Rightarrow -m + ۴ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۴}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m - ۳}{۱} = m - ۳,\ \ m - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۳}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{-۲}{۱} = -۲ < ۰$$

m	$-\infty$		۳		۴		$+\infty$
Δ'		+		+	۰	−	
$\frac{c}{a}$		−	۰	+		+	
$\frac{-b}{a}$		−		−		−	
R		$x_{۱} < ۰ < x_{۲}$ $\lvert x_{۱}\rvert > \lvert x_{۲}\rvert$	$x_{۱} < x_{۲} = ۰$	$x_{۱} < x_{۲} < ۰$	$x_{۱} = x_{۲} < ۰$		

آزمون‌ها

آزمون ۱. برای آن‌که معادله‌ی زیر:

$$x^{۲} - (۲m - ۳)x + m - ۲ = ۰$$

دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m > -۲$ ۲) $m < -۲$

۳) $m > ۲$ ۴) $m < ۲$

حل:

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت باشد، آن است که $\frac{c}{a} < ۰$ باشد. پس باید داشته باشیم:

$$\frac{c}{a} = \frac{m - ۲}{۱} = m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < ۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

۲. حدود m برای آن‌که معادله‌ی $۳x^{۲} - ۲x + m - ۲ = ۰$ دارای دو ریشه‌ی مثبت باشد، کدام است؟

۱) $۲ < m < \frac{۸}{۳}$ ۲) $۲ < m < \frac{۷}{۳}$

۳) $m < \frac{۷}{۳}$ ۴) $m > ۲$

حل:

باید دستگاه نامعادله‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta' > ۰ \\ \frac{c}{a} > ۰ \\ -\frac{b}{a} > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱ - ۳(m - ۲) > ۰ \\ \frac{m - ۲}{۳} > ۰ \\ \frac{۲}{۳} > ۰ \quad \text{همواره برقرار است} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۷ - ۳m > ۰ \\ m - ۲ > ۰ \\ \frac{۲}{۳} > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < \frac{۷}{۳} \\ m > ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲ < m < \frac{۷}{۳}$$

پس گزینه‌ی ۲ درست است.

۳. مقدار m برای آن‌که معادله‌ی $x^2 + mx - 4 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد، کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۴

حل:

شرط آن‌که معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه‌ی قرینه داشته باشد، آن است که:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

در این مسأله باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 + 16 > 0 \\ \dfrac{c}{a} = -4 < 0 \\ b = m = 0 \end{cases}$$

دو نامساوی $m^2 + 16 > 0$ و $-4 < 0$ همواره برقرارند، پس باید $m = 0$ باشد. یعنی گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله‌ها

۱. بدون حل کردن معادله‌های درجه‌ی دوم زیر، وجود و علامت ریشه‌های آن را مشخص کنید.

الف) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

ب) $3x^2 + 5x - 3 = 0$

پ) $x^2 - 17x + 4 = 0$

ت) $\frac{1}{2}x^2 + 9x + 2 = 0$

ث) $3x^2 - 7x + 6 = 0$

ج) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

چ) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

ح) $2x^2 - 18 = 0$

خ) $3x^2 + 4 = 0$

د) $5x^2 = 0$

۲. در وجود ریشه‌های معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

الف) $mx^2 + (m-3)x + m - 4 = 0$

ب) $x^2 - 2mx + 1 = 0$

پ) $(m+1)x^2 - (2m-3)x + m + 1 = 0$

ت) $x^2 + (m-3)x + 4 = 0$

ث) $mx^2 + (m-1)x - 2m = 0$

ج) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 1 = 0$

چ) $(m-1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

۳. حدود m را چنان بیابید که معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، دارای ریشه‌ی حقیقی باشند.

الف) $(3m+1)x^2 - (4m-1)x + 12m = 0$

ب) $mx^2 + (m-1)x + 2m = 0$

پ) $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

ت) $2mx^2 + 2(m-1)x + m - 1 = 0$

۴. ثابت کنید که معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m دارای ریشه‌ی حقیقی هستند.

الف) $mx^2 + (m-1)x - 1 = 0$

ب) $x^2 + (3m-2)x - m - 3 = 0$

پ) $x^2 + 2mx - m^2 - 1 = 0$

ت) $mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$

۵. در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌های درجه‌ی دوم پارامتری زیر، به ازای همه‌ی مقدارهای پارامتر m بحث کنید.

الف) $x^2 - 4x + m = 0$

ب) $x^2 + 2mx + 9 = 0$

پ) $x^2 - 2mx + 3m = 0$

ت) $x^2 - 2(m+1)x + 3(m+1) = 0$

ث) $mx^2 - 3x + m = 0$

ج) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$

چ) $x^2 - 2mx + (m-3)^2 = 0$

ح) $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$



سلسله درس‌هایی از ریاضیات گسسته (۶)

فرمولی در اعداد اول و نتایج آن

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

● جست‌وجوی دستوری برای تعیین اعداد اول

از اساسی‌ترین مسأله‌هایی که در رابطه با اعداد اول مطرح می‌شوند، مسأله‌های زیرند:

۱. تعیین دستور کلی برای محاسبه‌ی p_n (n امین عدد اول) بر حسب n.

۲. تعیین دستور کلی که P_{n+1} را بر حسب P_n بیان کند.

۳. تعیین تابعی که مقادیرش همگی عدد اول باشند.

واضح است که در این مسأله‌ها و مسأله‌های مشابه، جواب‌های بی‌مایه از بحث خارجند. توزیع اعداد اول به حدی نامنظم است که بعضی از ریاضیدانان بزرگ (با اعتذار از محضر ولای ایشان)، شتابزده برخی از این مسأله‌ها را «نامعقول» شمرده‌اند. برای مثال، در صفحه‌ی ۵ کتاب مشهور «مدخلی بر تئوری اعداد»، چاپ سال ۱۹۴۵ هاردی‌ورایت، چنین آمده است: «البته باید به خاطر داشت که یک سؤال طبیعی، اغلب پس از بحث و بررسی، به صورت سؤالی به‌کلی نامعقول در می‌آید... آیا دستوری کلی برای nامین عدد اول P_n وجود دارد؟... گرچه این سؤال را به عنوان یک سؤال طبیعی، می‌توان مقبول دانست، اما به کلی نامعقول است.»

پس از آن‌که در آن ایام، دستور گونه‌هایی برای حل مسأله‌ی ۱ عرضه شد، در چاپ ۱۹۶۸ همان کتاب، پس از مقدمه‌ی ذکر شده چنین می‌خوانیم: «آیا دستور کلی برای nامین عدد اول P_n هست؟... چنین دستوری را نمی‌شناسیم... محققاً امکان وجود چنین دستوری بعیدالاحتمال است.»

چنان‌که ملاحظه می‌شود، دیگر صحبتی از «نامعقول» بودن سؤال در میان نیست.

بنابراین، مسأله‌هایی از این قبیل که گذشت و به‌خصوص تفحص در صورت‌های گوناگون اعداد برای حل مسأله‌های (۱) و (۳)، موضوع تحقیقات فراوان ریاضیدانان بوده است.

در رابطه با مسأله‌ی (۳)، اعدادی به صورت‌های $a^n \pm 1$ که از مشهورترین آن‌ها اعداد اول فرما ($F(n) = 2^n + 1$) و اعداد اول مرسن ($M_p = 2^p - 1$) را می‌توان نام برد، مورد توجه قرار گرفتند. و در رابطه با مسأله‌ی (۲)، رابطه‌ای که $P_{n+1} \ge 3$ را برحسب «همه‌ی اعداد اول پیش از آن» بیان کند، رابطه‌ای است که گاندی[1] در کنگره‌ی ریاضیدانان مسکو در سال ۱۹۶۶ مطرح کرد.

در رابطه با مسأله‌ی (۳) باید گفت: از مسایل مهم مربوط به اعداد اول، مسأله‌ی توزیع آن‌ها در میان اعداد طبیعی است که مشکلات حل نشده‌ی بسیار دارد. قضیه‌ی زیر، پراکندگی اعداد اول را به خوبی آشکار می‌سازد و نشان می‌دهد که اعداد اول در میان اعداد طبیعی، مانند واحه‌هایی دور افتاده در صحرایی پهناورند.

قضیه: در رشته اعداد طبیعی، فواصلی هر قدر بزرگ که بخواهیم هست که خالی از اعداد اول است.

برهان اول: اگر n، عدد طبیعی دلخواهی باشد، از n عدد طبیعی متوالی زیر:

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \cdots, (n+1)!+(n+1)$$

اولی بر ۲، دومی بر ۳ و... و nامی بر $n+1$ بخش‌پذیر است.

برهان دوم: فرض کنیم، p عددی اول باشد، هر قدربزرگ که بخواهیم و a حاصل‌ضرب اعداد اول از ۲ تا p باشد. واضح است که همه‌ی اعداد طبیعی متوالی زیر مرکب خواهند بود:

$$a+2, a+3, \cdots, a+p$$

تبصره: در مقابل این گونه قضیه‌ها، این قضیه برقرار است که اگر $n > 3$، آن‌گاه حداقل یک عدد اول بین n و $2n - 2$ وجود دارد. این قضیه در سال ۱۸۴۵ به وسیله‌ی **برتران** مطرح و برای اولین‌بار در سال ۱۸۵۰ به وسیله‌ی **چیبچف** اثبات شد. قضیه‌ای بالاتر از این نیز ثابت شده که **سرپینسکی** در کتاب خود آن را به چاپ رسانده است.

قضیه: اگر $n > 5$ (عدد طبیعی)، بین n و 2n لااقل دو عدد اول متمایز وجود دارد.

نتیجه‌ی ۱. اگر $n > 1$ عددی طبیعی باشد، بین n و 2n لااقل یک عدد اول وجود دارد.

اثبات: طبق قضیه‌ی چیبچف، این حکم برای عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۳ صحیح است. برای عددهای طبیعی ۲ و ۳ هم صحیح است؛ زیرا بین ۲ و ۴ عدد اول ۳ و بین ۳ و ۶ عدد اول ۵ قرار دارد.

نتیجه‌ی ۲. برای عدد طبیعی $k > 1$، اگر P_k را نمادی برای kامین عدد اول به ردیف به کار بریم، می‌توان نوشت: $P_k < 2^k$ و داریم $P_2 = 3 < 2^2$. اگر برای عدد طبیعی k نابرابری $P_k < 2^k$ صحیح باشد، طبق نتیجه‌ی (۱)، لااقل یک عدد اول بین عددهای 2^k و 2^{k+1} وجود دارد که البته از P_k بزرگ‌تر است. بنابراین، نابرابری $P_{k+1} < 2^{k+1}$ هم با استقرای ریاضی صحیح است.

● چکیده‌ای از سیر تاریخی تلاش‌های دوهزار و سیصد ساله برای حل مسأله‌های اساسی اعداد اول

یکی از اولین پرسش‌هایی که درباره‌ی اعداد اول مطرح می‌شود چنین است: آیا تعداد اعداد اول محدود است یا نامحدود؟

پاسخ این سؤال برای اولین‌بار توسط اقلیدس (بیش از دوهزار و سیصد سال پیش) داده شد. او با نوعی استدلال ریاضی (برهان خلف) ثابت کرد، تعداد اعداد اول نامحدود است. از این زمان به بعد، ریاضیدانان کوشش بسیاری برای یافتن دستورهای ساده‌ی حساب به‌کار بردند که به مدد آن‌ها بتوان، فقط اعداد اول را یافت؛ حتی اگر این دستورها همه‌ی اعداد اول را به‌دست ندهند.

فرما در این مورد حدس مشهوری دارد (که به صورت حکم قطعی بیان نشد) و آن حدس چنین است:

همه‌ی اعداد به صورت $F(n) = 2^n + 1$ اول هستند.

این حدس به ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ صحیح است و این گونه اعداد اول را «اعداد اول فرما» نام نهادند.

در سال ۱۷۳۲، اویلر توانست $F(5)$ را به صورت زیر تجزیه کند:

$$F(5) = 2^{2^5} + 1 = 641 \ . \ 6700417$$

بنابراین ثابت شد که $F(5)$ عدد اول نیست. بعدها، اویلر توانست ثابت کند، بسیاری دیگر از این اعداد تجزیه‌پذیر و در نتیجه مرکب هستند.

لازم به ذکر است که روش‌های بسیار عمیقی برای تجزیه‌ی این اعداد در هر حالت خاص لازم است و به‌خاطر عظمت اعداد، غالباً این روش‌ها با مشکلات رفع نشدنی مواجه می‌شوند. تا به امروز هنوز نتوانسته‌اند ثابت کنند که به ازای

$n > 4$ ، بعضی دیگر از اعداد فرما عدد اول هستند.[۲]

تابع بسیار جالب و ساده‌ی دیگری که تعدادی از اعداد اول را به دست می‌دهد، تابع اویلر است:

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

در واقع به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots, 40$ ، عبارت $f(n)$ عدد اول به دست می‌دهد و حال آن‌که به ازای $n=41$ خواهیم داشت: $f(41) = 41^2$ که عدد اول نیست.

تابع دیگری که به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots, 79$ عدد اول تولید می‌کند، به صورت زیر است:

$$f(n) = n^2 - 79n + 1601$$

این تابع مولد اعداد اول نیز، به ازای $n = 80$ با شکست مواجه می‌شود. **ریچارد کورانت** می‌گوید: «**در واقع جست‌وجوی عبارت‌های ساده‌ای که فقط عدد اول به دست دهند، کار بیهوده‌ای است و بیهوده‌تر از آن، کوشش برای یافتن دستوری جبری است که «همه‌ی» اعداد اول را به دست دهد.**»

از زمان اقلیدس تا هم‌اکنون، بشر در آرزوی فرمولی بوده است که فقط اعداد اول را بدهد. ابتدا فکر می‌کردند که یک چند جمله‌ای مانند $F(x)$ با ضرایب صحیح یافت می‌شود که وقتی به جای n مقدار صحیح گذاشته شود، عدد اول حاصل شود. اما به زودی دریافتند، اگر $F(a)=p$ اول باشد آن‌گاه $F(a+kp)$ برای هر k صحیح، بر p بخش‌پذیر است. یعنی ثابت شد که تابعی وجود ندارد و F نمی‌تواند فقط اعداد اول را توزیع کند. بعد از این‌که بشر از چند جمله‌ای ناامید شد، سراغ فرمول‌های غیرچند جمله‌ای رفت.

اولین کسی که فرمولی وجودی ارایه داد، **میلز**[۳] بود که قضیه‌ی زیبای آن چنین است:

قضیه (میلز): عددی حقیقی مانند a وجود دارد به طوری که $F(n) = \lfloor a^{3^n} \rfloor_{n=1,2,\ldots}$ اعداد اول را می‌دهد.

بعد از میلز این قضیه توسط **کویپر**[۴] به شکل زیر تعمیم داده شد:

قضیه (کویپر): برای هر عدد صحیح $c \geq 3$ ، یک عدد حقیقی a وجود دارد، به طوری که $(n \in N) F(n) = \lfloor a^{c^n} \rfloor$ اعداد اول را می‌دهد.

بعدها قید صحیح بودن c نیز برداشته شد.

قضیه: اگر $c > \frac{8}{3}$ یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه یک عدد حقیقی مثل a وجود دارد، به طوری که $(n \in N) F(n) = \lfloor a^{c^n} \rfloor$ اعداد اول را می‌دهد.

و بالاخره **نیون**[۵] قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

قضیه (نیون): برای هر عدد حقیقی $c > 1$ ، یک عدد حقیقی a وجود دارد، به طوری که $F(n) = \lfloor c^{a^n} \rfloor_{n=1,2,\ldots}$ اعداد اول را می‌دهد.

توجه: عدد حقیقی a در قضایای بالا یکتا نیست. به علاوه، همه‌ی این فرمول‌ها وجودی هستند و هیچ‌کدام حتی یک عدد اول را هم مشخص نمی‌کنند.

کار روی کشف فرمولی برای تولید اعداد اول ادامه یافت تا سرانجام توسط **ویلانز**[۶]، با استفاده از «**قضیه‌ی ویلسن**»، فرمولی برای تشخیص اعداد اول ارایه شد:

$$n \in N \;;\; F(n) = \left\lfloor \cos^2 \pi \frac{(n-1)!+1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n=1 \text{ یا } n \text{ اول باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ اول نباشد} \end{cases}$$

توضیح: در این تابع چون عدد $(n-1)!$ به کار رفته، واضح است که کار با آن غیر عملی است و حتی برای عددی نزدیک به $n = 10^{10}$ هم، غیرقابل محاسبه است. به همین علت، این تابع تشخیص فقط می‌تواند جنبه‌ی تئوری داشته باشد (عدد $100!$ نزدیک به عدد 50^{100} است، زیرا: $(n! \approx (\frac{n+1}{2})^n)$.

حال اگر $\pi(m)$ تعداد اعداد اول نابیش‌تر از m باشد:

$$\pi(m) = -1 + \sum_{n=1}^{m} F(n) \qquad \text{(F: تابع ویلانز)}$$

و با توجه به این‌که kامین عدد اول، نابیش‌تر از 2^k است؛ P_k (kامین عدد اول) را نیز در قالب فرمولی می‌توان ارایه داد.

به همین ترتیب، فرمول‌های دیگری نیز با استفاده از «قضیه‌ی ویلسن» به دست آمد که به صورت زیر هستند:

(٭) اگر $x(\frac{(x-1)!^2}{x} = \frac{1}{x} + k$ (یک عدد صحیح)) x اول باشد

(٭٭) اگر $x(x|(x-1)!^2)$ اول نباشد

$$F(x) = \frac{\sin^2 \pi \frac{(x-1)!^2}{x}}{\sin^2 \frac{\pi}{x}} = \begin{cases} 1 & (٭) \\ 0 & (٭٭) \end{cases}$$

$$F(x,y) = \frac{y-1}{2}\left[|B^2 - 1| - (B^2 - 1) \right] + 2 \;;$$

$x, y \in N \ , \ B = x(y+1) - (y!+1)$

طبق قضیه‌ی ویلسن، $(y+1)$ اول است و داریم $F(1,1) = 2$ و اگر p یک عدد اول فرد باشد، آن‌گاه برای $y = p - 1$ داریم:

$$x = \frac{1}{p}\left((p-1)!+1\right)$$

بنابراین:

$$F(x, y) = p$$

توضیح: عدد اول ۲ برای بی‌شمار مقدار x و y به دست می‌آید، ولی هر عدد اول فرد p فقط از یک زوج یکتای (x,y) به دست می‌آید.

فرمول جالب دیگری که در رابطه با یافتن ۱+nامین عدد اول، با داشتن اعداد اول کم‌تر از آن به دست آمد، توسط گاندی در کنگره‌ی ریاضیدانان مسکو در سال ۱۹۶۶ مطرح شد. به این شکل که اگر p_n، nامین عدد اول فرض شود و μ تابع موبیوس و $Q = P_1.P_2.....P_n$، آن‌گاه $P_{n+1} \geq 3$ از نابرابری زیر به دست می‌آید:

$$1 < 2^{P_{n+1}}\left(-\frac{1}{2} + \sum_{d|Q}\frac{\mu(d)}{2^d - 1}\right) < 2$$

توجه داشته باشید، برای هر عدد حقیقی a، حداکثر یک عدد صحیح k یافت می‌شود، به طوری که داشته باشیم:

$$1 < 2^k.a < 2$$

جای شگفتی است که ریاضیدانی چون هاردی نتوانست چنین فرمول‌هایی را به‌دست آورد. او حتی فکر می‌کرد، چنین فرمول‌هایی وجود ندارند. زیرا در سخنرانی خود در سال ۱۹۲۸ در آمریکا گفته است: «مثلاً اگر کسی از من بخواهد فرمولی برای nامین عدد اول بنویسیم یا P_n را بر حسب P_{n+1} بیابم، فقط می‌توانم بگویم که سؤال نامعقولی کرده است و احتمالاً چنین فرمولی وجود ندارد.»

کاش به همین جمله بسنده می‌کرد. او سپس با ارایه‌ی فرمول‌ها و توجیه‌هایی نشان می‌دهد که چنین فرمول‌هایی نباید وجود داشته باشند. البته این سخنرانی خیلی با اهمیت بود و بعداً در مجموعه مقالات MAA که جایزه دریافت می‌کنند، قرار گرفت. ولی باور کردنی نیست، فرمولی که وجودش فقط قضیه‌ی ویلسن را نیاز داشت، چنین دور از ذهن ریاضیدانی نظیر هاردی باشد. اگر او هم حالا زنده بود، برایش باور نکردنی بود که زمانی چنین اظهار نظری کرده است.

در جست‌وجوی قانونی که حاکم بر توزیع اعداد اول باشد، مرحله‌ی قاطع هنگامی طی شد که ریاضیدانان کوشش‌های بیهوده را برای یافتن دستور ریاضی ساده‌ای که «همه»ی اعداد اول را به دست دهد، کنار گذاشتند و از تعیین تعداد واقعی اعداد اولی که در میان n عدد متوالی ابتدا بر واحد وجود دارد، صرف نظر کردند. به جای آن، وجهه‌ی همت خود را متوجه به‌دست‌آوردن اطلاعاتی درباره‌ی «میزان متوسط» توزیع اعداد اول در میان همه‌ی اعداد کردند.

گائوس به وسیله‌ی ملاحظات تجربی که از مطالعه‌ی جداول اعداد اول حاصل می‌شد، به این نتیجه رسید که نسبت $\frac{\pi(N)}{N}$ به تقریب برابر با $\frac{1}{LnN}$ است و هر قدر که N بزرگ‌تر می‌شود، این مقدار تقریبی به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود. او نشان داد که رابطه‌ی $\frac{\pi(N)}{N} \approx \frac{1}{LnN}$ به‌طور مجانبی برابر است و به این ترتیب، مسأله‌ی تعداد اعداد اول نیز به‌طور تقریبی حل شد:

$$\pi(N) \approx \frac{N}{LnN}$$

نتیجه: با ملاحظه‌ی سیر تاریخی مربوط به مسأله‌های اساسی اعداد اول در می‌یابیم که همه‌ی اطلاعات امروز ما بر پایه‌ی «**قضیه‌ی ویلسن**» بنا شده‌اند و می‌دانیم که هر تابع بر این قضیه متکی باشد، هیچ ارزش عملی نخواهد داشت و تنها برهانی تئوریک را در بر دارد.

ادامه دارد

زیرنویس

1. J. M. Gandhi

۲. مقاله‌ای تحت عنوان «تجزیه‌ی اعداد فرما» برای n>4 و مرکب بودن آن‌ها، از این جانب آماده‌ی چاپ است.

3. W.H.Mills

4. L.Kuiper

5. I.Niven

6. C.P.Willans

منابع

۱. مصاحب، دکتر غلامحسین. تئوری مقدماتی اعداد (دوره ۵ جلدی)

۲. کورانت، ریچارد ورابینز، هربرت. ریاضیات چیست؟

۳. مجله رشد آموزش ریاضی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی آموزش‌وپرورش

۴. سرپینسکی، واتسلا. ۲۵۰ مسأله‌ی حساب.

5. The discovery of prime numbers formula and it's results & other top researches (uthor: S.M.R.Hashemi Moosavi)(Brill/Vsp)

6. www.primenumbersformula.com



۱ دنباله‌های عددی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی
پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

● دکتر محمدصادق عسگری

روش اثبات کرانداری و یا بی‌کرانی یک دنباله

۱. یک روش بررسی کرانداری و بی‌کرانی یک دنباله، با استفاده از تعریف‌ها آن است که بُرد دنباله را تشکیل دهیم. در این صورت، کران بالا و پائین بُرد دنباله، همان کران بالا و پائین دنباله است.

۲. می‌دانیم که بعضی از دنباله‌ها با جمله‌ی عمومی $f(n) = a_n$، در واقع تحدید تابع حقیقی $f(x)$ $(x \geq 1)$ روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند. بنابراین، برای بررسی کرانداری و بی‌کرانی این نوع دنباله کافی است، کرانداری تابع $f(x)$ را بررسی کنیم. در صورت کرانداری، تابع $f(x)$ برای هر $x \geq 1$ می‌توان کرانداری دنباله را نتیجه گرفت.

۳. کرانداری و بی‌کرانی بعضی از دنباله‌ها را می‌توان با استفاده از خواص اعداد طبیعی، خواص نامساوی‌ها و خواص قدرمطلق بررسی کرد.

مثال: کدام یک از دنباله‌های زیر، کراندار و کدام بی‌کران هستند؟

۱. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

اگر برد دنباله را تشکیل دهیم، داریم:

$$\text{برد دنباله} = \left\{\frac{n^2}{2^n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\dots, \frac{64}{256}, \frac{49}{128}, \frac{36}{64}, \frac{25}{32}, \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}\right\}$$

ملاحظه می‌شود، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $0 < \frac{n^2}{2^n} < \frac{9}{8}$؛ یعنی دنباله کراندار است.

۲. $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \frac{n}{n+1} < 1$$

یعنی این دنباله کراندار است.

۳. $a_n = \mathrm{Arctg}(\frac{1}{n})$

می‌دانیم، تابع $f(x) = \mathrm{Arctg}x$ صعودی است، درنتیجه داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} \le 1 \Rightarrow \mathrm{Arctg}(0) < \mathrm{Arctg}(\frac{1}{n}) \le \mathrm{Arctg}(1)$$

$$\Rightarrow 0 < \mathrm{Arctg}(\frac{1}{n}) \le \frac{\pi}{4}$$

یعنی دنباله کراندار است.

۴. $a_n = \frac{n^2+1}{2n^2-1}$

قرار می‌دهیم: $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-1}$ $(x \ge 1)$ و جدول تغییرات f را رسم می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{-6x}{(2x^2-1)^2} \le 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$$

x	1			$+\infty$
f′(x)	−	−	−	
f(x)	2	↘	↘	$\frac{1}{2}$

تابع f نزولی است و همواره داریم: $\frac{1}{2} < f(x) \le 2$.

درنتیجه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ نیز $\frac{1}{2} < \frac{n^2+1}{2n^2-1} \le 2$؛ یعنی دنباله کراندار است.

۵. $a_n = \frac{n^2+3n+6}{n+2}$

قرار می‌دهیم: $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+2}$ $(x \ge 1)$ و جدول تغییرات f را رسم می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+6}{x+2} = +\infty$$

x	1					$+\infty$
f′(x)	+	+	+	+	+	
f(x)	$\frac{10}{3}$	↗	↗	↗	↗	$+\infty$

تابع f صعودی است و همواره داریم: $f(x) \ge \frac{10}{3}$.

درنتیجه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ نیز $\frac{n^2+3n+6}{n+2} \ge \frac{10}{3}$؛ یعنی دنباله از بالا بی‌کران است.

۶. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{n^2} \le \frac{(-1)^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow -1 \le \frac{-1}{n^2} \le \frac{(-1)^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \le 1$$

$$\Rightarrow -1 \le \frac{(-1)}{n^2} \le 1 \Rightarrow$$ دنباله کراندار است.

۷. $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$

$$\text{برد دنباله} = \left\{\dots -\sqrt{7}, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, \dots\right\}$$

دنباله بی‌کران است.

۸. $a_n = n^2 + \sin n$

با روش برهان خلف ثابت می‌کنیم، دنباله‌ی a_n بی‌کران است. فرض کنیم دنباله‌ی a_n کراندار باشد (فرض خلف). درنتیجه، عدد حقیقی $M > 0$ وجود دارد، به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|n^2 + \sin n| \le M$:

$$n^2 = |n^2 + \sin n - \sin n| \le |n^2 + \sin n| + |-\sin n|$$
$$\le M + |\sin n| \le M + 1$$

$$\Rightarrow n^2 \le M + 1 \Rightarrow n \le \sqrt{M+1}$$

یعنی مجموعه‌ی اعداد طبیعی از بالا کراندار است. اما این

تناقض است، بنابراین فرض خلف باطل است. درنتیجه دنباله‌ی a_n بی‌کران است.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$a_1=1\ ,\ \ a_{n+1}=\frac{2(a_n+1)}{3}$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$.

به ازای $n=1$، داریم: $a_1=1$. درنتیجه: $0<a_1<2$.

فرض کنیم، حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد؛ یعنی $0<a_k<2$. ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است.

$$0<a_k<2\Rightarrow 0<\frac{2}{3}a_k<\frac{4}{3}\Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{2}{3}a_k+\frac{2}{3}<\frac{4}{3}+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{2(a_k+1)}{3}<2\Rightarrow 0<a_{k+1}<2$$

بنابراین، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$. درنتیجه، دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: ثابت کنید دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر، کراندار است.

$$a_1=1\quad a_{n+1}=\frac{a_n+2}{2}$$

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$. به ازای $n=1$ داریم: $a_1=1$. درنتیجه: $0<a_1<2$. فرض کنیم به ازای $n=k$، $0<a_k<2$. ثابت می‌کنیم، به ازای $n=k+1$ نیز: $0<a_{k+1}<2$.

$$0<a_k<2\Rightarrow 2<a_k+2<4\Rightarrow 1<\frac{a_k+2}{2}<2$$

$$\Rightarrow 0<a_{k+1}<2$$

درنتیجه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0<a_n<2$؛ یعنی دنباله کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$a_1=\sqrt{2}\quad a_n=\sqrt{a_{n-1}+2}$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\sqrt{2}\le a_n<2$.

به ازای $n=1$ داریم: $\sqrt{2}\le a_n=\sqrt{2}<2$. درنتیجه حکم برقرار است.

فرض کنیم، به ازای $n=k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $\sqrt{2}\le a_k<2$. ثابت می‌کنیم، به ازای $n=k+1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی $\sqrt{2}\le a_{k+1}<2$.

$$\sqrt{2}\le a_k<2\Rightarrow 2+\sqrt{2}\le a_k+2<4\Rightarrow 2\le 2+\sqrt{2}\le a_k+2<4$$

$$\Rightarrow 2\le a_k+2<4\Rightarrow \sqrt{2}\le\sqrt{a_k+2}<\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\le a_{k+1}<2$$

یعنی دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$x_1=-2\ ,\ \ x_{n+1}=\frac{n}{n+1}x_n$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $-2\le x_n<0$.

به ازای $n=1$ داریم: $-2\le x_1=-2<0$. درنتیجه حکم برقرار است.

فرض کنیم به ازای $n=k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $-2\le x_k<0$. ثابت می‌کنیم به ازای $n=k+1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی $-2\le x_{k+1}<0$.

$$\begin{cases}-2\le x_k<0\\ \dfrac{k}{k+1}>0\end{cases}\Rightarrow \frac{-2k}{k+1}\le\frac{kx_k}{k+1}<0\Rightarrow -2\le\frac{-2k}{k+1}\le x_{k+1}<0$$

$$\Rightarrow -2\le x_{k+1}<0$$

یعنی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$x_1=\sqrt{2}\quad x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\quad (n\ge 1)$$

ثابت کنید این دنباله کراندار است.

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\sqrt{2}\le x_n\le 2$.

به ازای $n=1$ داریم: $\sqrt{2}\le x_1=\sqrt{2}\le 2$. درنتیجه

حکم برقرار است.

فرض کنیم به ازای $n = k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $\sqrt{2} \le x_k \le 2$. ثابت می‌کنیم به ازای $n = k + 1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی: $\sqrt{2} \le x_{k+1} \le 2$.

$$\sqrt{2} \le x_k \le 2 \Rightarrow 2\sqrt{2} \le 2x_k \le 4 \Rightarrow \sqrt{2\sqrt{2}} \le \sqrt{2x_k} \le 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{2\sqrt{2}} \le x_{k+1} \le 2 \Rightarrow \sqrt{2} \le x_{k+1} \le 2$$

درنتیجه، دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{5}{4} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \ (n \ge 2)$$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

حل: فرض کنیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$، به صورت $x_n = p^n$ باشد. عدد p را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = p^{n+1} \\ x_n = p^n \\ x_{n-1} = p^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

$$\Rightarrow 2p^{n+1} = p^n + p^{n-1} \Rightarrow 2p^{n+1} = p^{n-1}(p+1)$$

$$\Rightarrow 2p^2 = p + 1 \Rightarrow 2p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ p = 1 \end{cases}$$

بنابراین، جمله‌ی عمومی دنباله را به صورت ترکیب خطی از دو عدد $p = -\frac{1}{2}$ و $p = 1$ درنظر می‌گیریم؛ یعنی: $x_n = A + \frac{(-1)^n B}{2^n}$. چون $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = \frac{5}{4}$، بنابراین: $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$ است. به‌علاوه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(-1)^n}{2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \le 1 + \frac{(-1)^n}{2^2} \le 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le x_n \le \frac{5}{4}$$

یعنی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

تفریح اندیشه

● حسین تامی‌ساعی

آب‌انبار چه‌قدر آب دارد؟

$\frac{1}{5}$ آب موجود در آب‌انباری را مصرف می‌کنیم. پس از آن، $\frac{1}{5}$ آب باقی‌مانده را نیز خارج می‌کنیم. بعد از این برداشت، آب باقی‌مانده در آب‌انبار به اندازه‌ی $\frac{1}{5}$ گنجایش آن است. حساب کنید چه کسری از آب‌انبار، آب داشته است؟

حل: فرض می‌کنیم، موجودی آب‌انبار برابر با x، و گنجایش آب‌انبار ۱ باشد. چون $\frac{1}{5}$ آب‌انبار به مصرف رسیده است، پس باقی‌مانده‌ی آب‌انبار $\frac{4}{5}x$ است. $\frac{1}{5}$ این مقدار نیز برابر است با: $\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}x = \frac{4}{25}x$ بنابراین می‌توان معادله‌ی زیر را تشکیل داد:

$$\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}x = \frac{1}{5}$$

$$25 \times (\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}x) = 25 \times \frac{1}{5}$$

$$20x - 4x = 5 \Rightarrow 16x = 5$$

$$x = \frac{5}{16}$$

پس $\frac{5}{16}$ گنجایش آب‌انبار پر بوده است.

درس هایی از
هندسه تحلیلی

قرینه یابی در فضا

۲

برای دانش آموزان دوره‌ی
پیش دانشگاهی رشته‌ی ریاضی

● میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com



اشاره

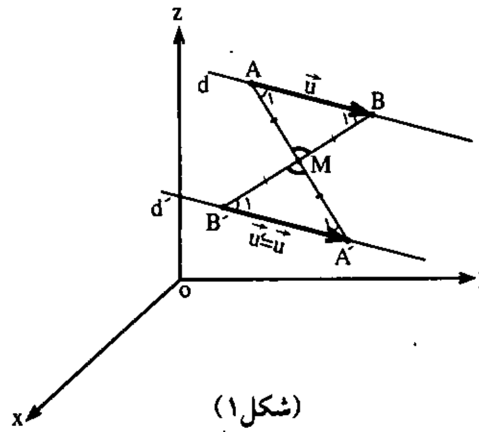
دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی، معمولاً در آزمون‌های متعددی شرکت می‌کنند و در بعضی از آن‌ها، با مسائلی از درس هندسه‌ی تحلیلی روبه‌رو می‌شوند که به طور مستقیم از کتاب درسی طرح نشده‌اند، ولی با توجه به مطالبی که در کتاب درسی وجود دارد، می‌توانند به این‌گونه مسائل پاسخ دهند. یکی از این مباحث قرینه‌یابی در فضاست.

انگیزه‌ی اصلی نگارش این مقالات سؤالی بود که یک روز در کلاس درس هندسه‌ی تحلیلی دانش‌آموزان پرسیدند. آن‌ها می‌خواستند بدانند، معادله‌ی قرینه‌ی یک صفحه را نسبت به صفحه‌ی دیگر چگونه می‌توان تعیین کرد. در پاسخ به سؤال، مبحث قرینه‌یابی در فضا را مطرح کردم و نتیجه‌ی این تجربه را در قالب چند مقاله در مجله‌ی برهان ملاحظه می‌کنید.

در شماره‌ی قبل، قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر، قرینه‌ی نقطه نسبت به خط و قرینه‌ی نقطه نسبت به صفحه را بررسی کردیم. بهتر است قبل از مطالعه‌ی مقاله‌ی حاضر، قسمت اول آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

قرینه‌ی خط نسبت به نقطه

فرض کنیم d یک خط و M نقطه‌ای در فضا باشد. برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M، کافی است، دو نقطه‌ی دلخواه مانند A و B را روی خط d درنظر بگیریم، سپس قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به M به‌دست می‌آوریم و A' و B' می‌نامیم. بنابه تعریف، خط d' که از دو نقطه‌ی A' و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است.



(شکل۱)

قضیه: هرگاه d' قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M باشد، آن‌گاه داریم: $d \| d'$.

برهان: با توجه به شکل۱ و هم‌نهشت بودن دو مثلث MAB و $M'A'B'$ (ض‌زض) نتیجه می‌گیریم که: $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ و $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$. پس بنابر عکس قضیه‌ی تالس: $d \| d'$.

با توجه به این قضیه می‌توان گفت که برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M، کافی است، قرینه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه از خط d مانند A را نسبت به M پیدا کنیم و آن را A' بنامیم. خطی که از A' موازی با d رسم می‌شود، همان d' یعنی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است. بنابراین، برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی۱. یک نقطه‌ی دلخواه مانند A روی خط d درنظر می‌گیریم.

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی M به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر، در شماره‌ی قبل به طور کامل بررسی شده است).

مرحله‌ی۳: معادله‌ی خطی که از A' می‌گذرد و موازی با d است، معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M است.

توجه: در صورتی که نقطه‌ی M روی خط d باشد، قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M همان خط d است.

مسأله‌ی۱. معادله‌ی قرینه‌ی خط d به معادله‌ی زیر را نسبت به نقطه‌ی $M(1,-1,2)$ به‌دست آورید.

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

حل

مرحله‌ی۱. در معادله‌ی خط d قرار می‌دهیم $x = 1$، تا مختصات نقطه‌ی دلخواه از خط d را به‌دست آوریم.

$$x = 1 \Rightarrow y = 0, z = -3; A(1,0,-3) \in d$$

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به نقطه‌ی M به‌دست می‌آوریم:

$$x_{A'} = 2x_m - x_A = 2 - 1 = 1$$
$$y_{A'} = 2y_m - y_A = -2 - 0 = -2$$
$$z_{A'} = 2z_m - z_A = 4 + 3 = 7$$

درنتیجه: $A'(1,-2,7)$.

مرحله‌ی۳. معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از نقطه‌ی A' می‌گذرد و موازی با خط d است.

بردار هادی خط d' $\quad \vec{u'} = \vec{u} = (2,3,-1)$

$$d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

اکنون همین مسأله را به صورت یک تست می‌آوریم و برای آن راه‌حلی کوتاه ارائه می‌کنیم.

تست: معادله‌ی قرینه‌ی خط d به معادله‌ی زیر نسبت به نقطه‌ی $M(1,-1,2)$ کدام است؟

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-1}$$

۱) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+6}{-1}$

۲) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-7}{-1}$

۳) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-6}{1}$

۴) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+7}{-1}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. زیرا اگر d' قرینه‌ی خط d نسبت به نقطه‌ی M باشد، آن‌گاه داریم:

الف) $d \| d'$، یعنی بردارهای هادی دو خط، با هم

موازی‌اند.

ب) قرینه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه از d نسبت به M، در معادله‌ی خط 'd صدق می‌کند.

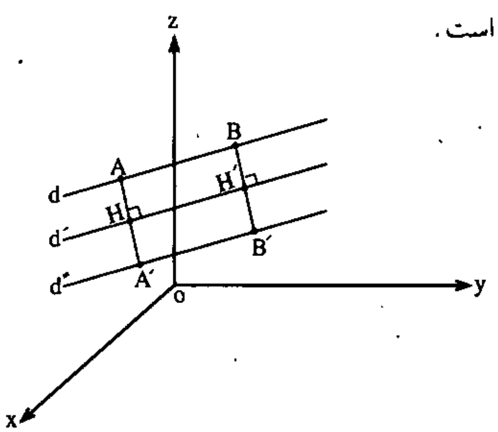
معادله‌های خط‌های گزینه‌های ۲ و ۳ با d موازی‌اند، پس یکی از این گزینه‌ها درست هستند. نقطه‌ی دلخواه $A(1,0,-3)$ را روی d درنظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که قرینه‌ی این نقطه نسبت به M، نقطه‌ی $A'(1,-2,7)$ است و مختصات 'A فقط در گزینه‌ی ۳ صدق می‌کند.

□

قرینه‌ی یک خط نسبت به خط دیگر

فرض کنیم d و 'd دو خط در فضا باشند. در صورتی قرینه‌ی d نسبت به 'd وجود دارد که d و 'd در یک صفحه قرار داشته باشند، چون دو خط d و 'd در یک صفحه‌ی موازی یا متقاطع هستند، بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر دو خط d و 'd موازی باشند، دو نقطه‌ی دلخواه A و B را روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به 'd پیدا می‌کنیم و 'A و 'B می‌نامیم. بنابه تعریف، خطی که از 'A و 'B می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به 'd است.



(شکل۲)

نتیجه: همان‌طور که در شکل۲ ملاحظه می‌کنید، دو خط d و "d بر 'AA عمودند؛ از آن‌جا که دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند، نتیجه می‌گیریم که: $d \| d''$.

با توجه به نتیجه‌ی اخیر وقتی d موازی 'd است، برای مشخص کردن قرینه‌ی d نسبت به 'd نقطه‌ی دلخواهی مانند A را روی d درنظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به 'd به‌دست می‌آوریم و 'A می‌نامیم. اکنون خطی که از 'A موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به 'd است.

بنابراین، برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط 'd ($d \| d'$) مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی۱. نقطه‌ی دلخواه A را روی d مشخص می‌کنیم.

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به 'd محاسبه می‌کنیم و 'A می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به خط، در شماره‌ی قبل به‌طور کامل بررسی شده است).

مرحله‌ی۳. معادله‌ی خطی که از 'A موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به 'd است.

مسأله‌ی۲. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به خط 'd پیدا کنید.

$$d: \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

$$d': \frac{x+1}{4} = \frac{1-y}{2} = \frac{z-3}{2}$$

حل: دو خط d و 'd موازی هستند. بنابراین طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی۱. در معادله‌ی خط d قرار می‌دهیم $x=0$ تا مختصات نقطه‌ی دلخواه از d را به‌دست آوریم.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, z = 0; A(0,0,0)$$

مرحله‌ی۲. قرینه‌ی A را نسبت به خط 'd به‌دست می‌آوریم، به این منظور، ابتدا تصویر نقطه‌ی A روی 'd (یعنی نقطه‌ی H) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

الف) معادله‌ی پارامتری خط 'd

$$d': \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

ب) مختصات پارامتری تصویر نقطه‌ی A روی 'd

$$H \in d' \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{vmatrix} 4t' - 1 \\ -2t' + 1 \\ 2t' + 3 \end{vmatrix}$$

ج)

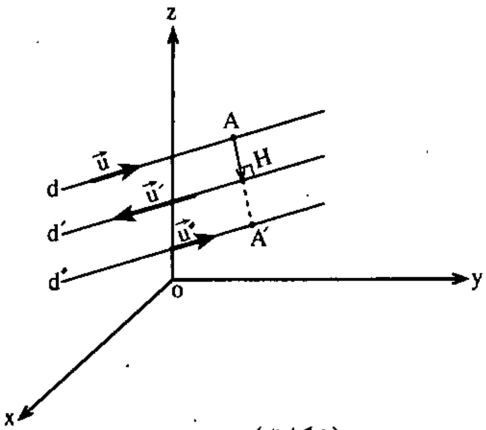
$$\vec{AH} = (4t' - 1, -2t' + 1, 2t' + 3)$$

بردار هادی خط 'd $\vec{u}' = (4,-2,2)$

د)

$$\vec{AH}.\vec{u} = 0 \Rightarrow (4t' - 1, -2t' + 1, 2t' + 3).(4,-2,2) = 0 \Rightarrow t' = 0$$

$t' = 0 \Rightarrow H(-1,1,3)$ تصویر نقطه‌ی A روی خط 'd



(شکل۳)

اکنون با داشتن مختصات دو نقطه‌ی A و H می‌توانیم مختصات نقطه‌ی A′ (شکل۳) را محاسبه کنیم.

$$A'\begin{cases} x_{A'} = ۲x_H - x_A = -۲ \\ y_{A'} = ۲y_H - y_A = ۲ \\ z_{A'} = ۲z_H - z_A = ۶ \end{cases} \Rightarrow A'(-۲,۲,۶)$$ مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d′

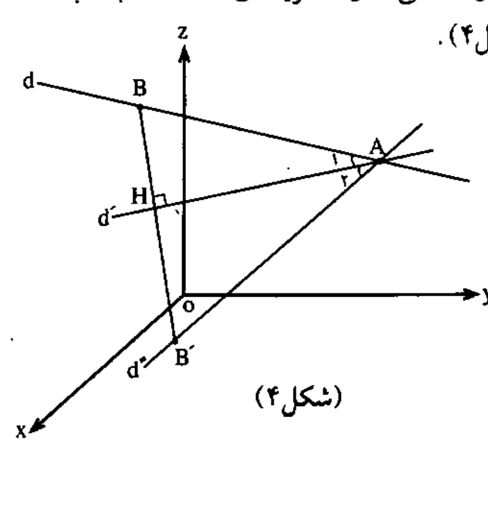
مرحله‌ی۳. معادله‌ی خطی که از A′ موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی d نسبت به d′ است.

$$A'(-۲,۲,۶), u''\parallel u = (-۲,۱,-۱) \xrightarrow{(شکل۳)} u'' = (-۲,۱,-۱)$$

$$d'': \frac{x+۲}{-۲} = \frac{y-۲}{۱} = \frac{z-۶}{-۱}$$ معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط d′

□

حالت دوم: اگر دو خط d و d′ متقاطع باشند، مختصات محل تقاطع این دو خط را A می‌نامیم. سپس نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی d درنظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به d′ به‌دست می‌آوریم و B′ می‌نامیم. بنابه تعریف، خطی که از A و B′ می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به d′ است (شکل۴).



(شکل۴)

بنابراین، برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به خط d′، به طوری که دو خط متقاطع باشند، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی۱. مختصات محل تقاطع دو خط را محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی A).

مرحله‌ی۲. نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی d درنظر می‌گیریم. سپس قرینه‌ی این نقطه را نسبت به خط d′ محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی B′).

مرحله‌ی۳. خطی که از A و B′ می‌گذرد، همان قرینه‌ی خط d نسبت به خط d′ است.

نتیجه: همان‌طور که در شکل ۴ ملاحظه می‌کنید، دو مثلث AHB و AHB′ بنابر حالت «ض‌زض» هم‌نهشت هستند. درنتیجه: $\angle A_۱ = \angle A_۲$. پس d′ نیمساز زاویه‌ی بین دو خط d و d″ است.

مسأله‌ی ۳. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به خط d′ به دست آورید.

$$d: \frac{x-۱}{۱} = \frac{y-۲}{۲} = \frac{z-۳}{۳}$$

$$d': \frac{x-۳}{۲} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z+۱}{-۴}$$

حل: دو خط d و d′ متقاطع هستند، بنابراین طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی ۱.

$$d: \begin{cases} x = t+۱ \\ y = ۲t+۲ \\ z = ۳t+۳ \end{cases} ; \frac{t+۱-۳}{۲} = \frac{۲t+۲-۱}{-۱} = \frac{۳t+۳+۱}{-۴}$$

$$\Rightarrow \frac{t-۲}{۲} = \frac{۲t+۱}{-۱} = \frac{۳t+۴}{-۴}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{t-۲}{۲} = \frac{۲t+۱}{-۱} \Rightarrow t = ۰ \\ \frac{t-۲}{۲} = \frac{۳t+۴}{-۴} \Rightarrow t = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ دو خط d و d′ متقاطع هستند

$$t = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰+۱ \\ y = ۰+۲ \\ z = ۰+۳ \end{cases} \Rightarrow A(۱,۲,۳)$$ مختصات محل تقاطع در خط d و d′

مرحله‌ی ۲. با فرض $x = ۲$ و قرار دادن آن در معادله‌ی خط d، مختصات نقطه‌ی دلخواهی مانند B از خط d به دست

می‌آید.

$$x = 2 \Rightarrow y = 4, z = 6; B(2,4,6)$$

اکنون قرینه‌ی نقطه‌ی $B(2,4,6)$ را نسبت به خط d' محاسبه می‌کنیم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر B را روی d' می‌یابیم و آن را H می‌نامیم.

الف)

معادله‌ی پارامتری خط d'

$$d': \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = -4t - 1 \end{cases}$$

ب)

مختصات پارامتری نقطه‌ی H

$$H \in d' \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{vmatrix} 2t' + 3 \\ -t' + 1 \\ -4t' - 1 \end{vmatrix}$$

ج)

$$\vec{BH} = (2t' + 3 - 2, -t' + 1 - 4, -4t' - 1 - 6)$$

$$\vec{BH} = (2t' + 1, -t' - 3, -4t' - 7)$$

بردار هادی خط d'

$$\vec{u} = (2, -1, -4)$$

$$\vec{BH}.\vec{u} = 0 \Rightarrow (2t' + 1, -t' - 3, -4t' - 7).(2, -1, -4) = 0$$

$$\Rightarrow t' = -\frac{11}{7}$$

د)

$$t' = -\frac{11}{7} \Rightarrow H \begin{vmatrix} -\frac{22}{7} + 3 \\ \frac{11}{7} + 1 \\ \frac{44}{7} - 1 \end{vmatrix} \Rightarrow H(-\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{37}{7})$$

اکنون با داشتن مختصات دو نقطه‌ی B و H می‌توانیم، مختصات نقطه‌ی B' (قرینه‌ی B نسبت به d') را محاسبه کنیم:

$$x_{B'} = 2x_H - x_B = -\frac{2}{7} - 2 = \frac{-16}{7}$$

$$y_{B'} = 2y_H - y_B = \frac{36}{7} - 4 = \frac{8}{7}$$

$$z_{B'} = 2z_H - z_B = \frac{74}{7} - 6 = \frac{32}{7}$$

مختصات قرینه‌ی B نسبت به d'

$$\Rightarrow B'(-\frac{16}{7}, \frac{8}{7}, \frac{32}{7})$$

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و B' می‌گذرد (d'')، قرینه‌ی d نسبت به d' است.

$$\vec{AB'} = (-\frac{16}{7} - 1, \frac{8}{7} - 2, \frac{32}{7} - 3) = (\frac{-23}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{11}{7})$$

بردار هادی خط d''

$$\vec{u_1} \parallel \vec{AB'} \Rightarrow \vec{u_1} = (-23, -6, 11)$$

معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به خط d'

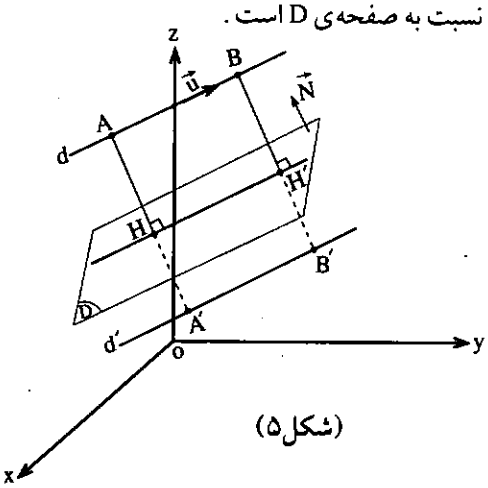
$$\frac{x - 1}{-23} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 3}{11}$$

□

قرینه‌ی خط نسبت به صفحه

فرض کنیم d و D به ترتیب یک خط و یک صفحه در فضا باشند. چون وضعیت نسبی خط و صفحه در فضا دو حالت موازی یا متقاطع را دارد، بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر خط d با صفحه‌ی D موازی باشد، دو نقطه‌ی دلخواه A و B را روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این دو نقطه را نسبت به صفحه‌ی D پیدا می‌کنیم و A' و B' می‌نامیم؛ بنا به تعریف، خطی که از A' و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.



(شکل۵)

نکته: H و H' به ترتیب تصویر دو نقطه‌ی A و B روی صفحه‌ی D هستند. خطی که از H و H' می‌گذرد (شکل ۵)، تصویر خط d روی صفحه‌ی D است.

نتیجه: همان‌طور که در شکل ۵ ملاحظه می‌کنید، دو خط d و d' با خط HH' موازی‌اند. از آن‌جایی که دو خط موازی با یک خط با هم موازی هستند، نتیجه می‌گیریم که: $d \parallel d'$.

با توجه به نتیجه‌ی اخیر در حالتی که خط d موازی صفحه‌ی D است، برای مشخص کردن قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D، نقطه‌ی دلخواهی مانند A روی d در نظر می‌گیریم، و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم و

A' می‌نامیم. اکنون خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است. بنابراین برای یافتن معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D $(d \| D)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱. نقطه‌ی دلخواه A را روی خط d مشخص می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به صفحه‌ی D محاسبه می‌کنیم و A' می‌نامیم (روش یافتن قرینه‌ی نقطه نسبت به صفحه، در شماره‌ی قبل به طور کامل بررسی شده است).

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با d می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

مسأله‌ی ۴. معادله‌ی قرینه‌ی خط d را نسبت به صفحه‌ی D به دست آورید.

$$d: \frac{x+۱}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z-۳}{-۲}$$

$$D: ۳x + ۴y + z = ۰$$

حل: خط d با صفحه‌ی D موازی است؛ زیرا بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه بر هم عمودند: همان‌طور که ملاحظه می‌کنید:

$\vec{u} = (۲, -۱, -۲)$ بردار هادی خط d

$\vec{N} = (۳, ۴, ۱)$ بردار نرمال صفحه‌ی D

$$\vec{u}.\vec{N} = ۶ - ۴ - ۲ = ۰$$

مرحله‌ی ۱. با فرض $x = -۱$ و قرار دادن آن در معادله‌ی خط d، مختصات نقطه‌ی دلخواهی مانند A از d به دست می‌آید.

$$x = -۱ \Rightarrow y = ۰, z = ۳; A(-۱, ۰, ۳)$$

مرحله‌ی ۲. قرینه‌ی A را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر نقطه‌ی A روی صفحه‌ی D (یعنی نقطه‌ی H) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

الف) $\vec{N} = (۳, ۴, ۱)$ بردار نرمال صفحه‌ی D است.

ب) معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از A بر صفحه‌ی D عمود می‌شود:

$$AH: \begin{cases} x = ۳t + ۱ \\ y = ۴t \\ z = t - ۳ \end{cases}$$ معادله‌ی پارامتری خط AH

ج)

$$H \in AH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{vmatrix} ۳t' + ۱ \\ ۴t' \\ t' - ۳ \end{vmatrix}$$

$$H \in D \Rightarrow ۳(۳t' + ۱) + ۴(۴t') + t' - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow t' = ۰$$
$$t' = ۰ \Rightarrow H(۱, ۰, -۳)$$

د) اگر A' قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه H وسط AA' است. بنابراین داریم:

$$x_{A'} = ۲x_H - x_A = ۲ + ۱ = ۳$$
$$y_{A'} = ۲y_H - y_A = ۰ + ۰ = ۰$$
$$z_{A'} = ۲z_H - z_A = -۶ - ۳ = -۹$$
$$\Rightarrow A'(۳, ۰, -۹)$$ قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی D

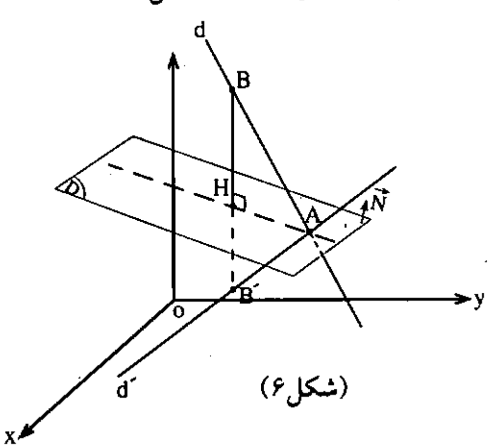
مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A' موازی با خط d رسم می‌شود، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

$$A'(۳, ۰, -۹) \quad و \quad \vec{u'} \| \vec{u} = (۲, -۱, -۲)$$

$$d': \frac{x-۳}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۹}{-۲}$$ معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D

□

حالت دوم: اگر خط d و صفحه‌ی D متقاطع باشند، مختصات محل تقاطع خط و صفحه را A می‌نامیم، سپس نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی خط d در نظر می‌گیریم و قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم و B' می‌نامیم. بنا به تعریف، خطی که از A و B' می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است (شکل ۶).



(شکل ۶)

نکته: خطی که از دو نقطه‌ی A و H (تصویر B روی صفحه‌ی D) می‌گذرد (شکل ۶)، تصویر خط d روی صفحه‌ی

D است.

برای یافتن قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D، به‌طوری که خط و صفحه متقاطع باشند، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱. مختصات محل تقاطع خط و صفحه را محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی A).

مرحله‌ی ۲. نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی خط d در نظر می‌گیریم. سپس قرینه‌ی این نقطه را نسبت به صفحه‌ی D محاسبه می‌کنیم (نقطه‌ی ´B).

مرحله‌ی ۳. خطی که از A و ´B می‌گذرد، همان قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

مسأله‌ی ۵. قرینه‌ی خط d را نسبت به صفحه‌ی D به دست آورید.

$$d: \frac{x-۲}{۳} = \frac{y+۱}{-۲} = \frac{z}{۱}$$

$$D: x + ۵y - ۳z = ۷$$

حل: خط d و صفحه‌ی D متقاطع هستند، زیرا:

$\vec{N} = (۱,۵,-۳)$ بردار نرمال صفحه‌ی D

$\vec{u} = (۳,-۲,۱)$ بردار هادی خط d

$$\vec{u}.\vec{N} = ۳ - ۱۰ - ۳ = -۱۰ \neq ۰ \Rightarrow d \nparallel D$$

مرحله‌ی ۱. مختصات محل تقاطع خط و صفحه را محاسبه می‌کنیم:

$$d: \begin{cases} x = ۳t + ۲ \\ y = -۲t - ۱ \\ z = t \end{cases}$$

$$A \in d \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: A \begin{vmatrix} ۳t' + ۲ \\ -۲t' - ۱ \\ t' \end{vmatrix}$$

$$A \in D \Rightarrow (۳t' + ۲) + ۵(-۲t' - ۱) - ۳(t') = ۷$$
$$\Rightarrow t' = -۱$$

$t' = -۱ \Rightarrow A(-۱,۱,-۱)$ مختصات تقاطع خط و صفحه

مرحله‌ی ۲. با قرار دادن $x = ۲$ در معادله‌ی خط d، مختصات نقطه‌ی دلخواهی از آن، مانند B را محاسبه می‌کنیم:

$x = ۲ \Rightarrow y = -۱, z = ۰; B(۲,-۱,۰)$

اکنون مختصات قرینه‌ی B را نسبت به صفحه‌ی D به دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا مختصات تصویر نقطه‌ی B را روی D (یعنی نقطه‌ی H) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

الف) $\vec{N} = (۱,۵,-۳)$ بردار نرمال صفحه است.

ب) معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از B بر صفحه‌ی D عمود می‌شود:

$$BH: \begin{cases} x = t - ۲ \\ y = ۵t + ۱ \\ z = -۳t \end{cases}$$ معادله‌ی پارامتری خط BH

ج)

$$H \in BH \Rightarrow \exists t' \in \mathbb{R}: H \begin{vmatrix} t' - ۲ \\ ۵t' + ۱ \\ -۳t' \end{vmatrix}$$

$$H \in D \Rightarrow (t' - ۲) + ۵(۵t' + ۱) - ۳(-۳t') = ۷$$
$$\Rightarrow t' = \frac{۴}{۳۵}$$

$$t' = \frac{۴}{۳۵} \Rightarrow H(-\frac{۶۶}{۳۵}, \frac{۵۵}{۳۵}, \frac{-۱۲}{۳۵})$$

د) اگر ´B قرینه‌ی B نسبت به صفحه‌ی D باشد، آن‌گاه H وسط ´BB است. بنابراین داریم:

$$x_{B'} = ۲x_H - x_B = -\frac{۱۳۲}{۳۵} - ۲ = \frac{-۲۰۲}{۳۵}$$

$$y_{B'} = ۲y_H - y_B = \frac{۱۱۰}{۳۵} + ۱ = \frac{۱۴۵}{۳۵}$$

$$z_{B'} = ۲z_H - z_B = \frac{-۲۴}{۳۵} - ۰ = \frac{-۲۴}{۳۵}$$

$$\Rightarrow B'(\frac{-۲۰۲}{۳۵}, \frac{۱۴۵}{۳۵}, \frac{-۲۴}{۳۵})$$

مرحله‌ی ۳. معادله‌ی خطی که از A و ´B می‌گذرد، قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D است.

$$A(-۱,۱,-۱) \quad و \quad B(\frac{-۲۰۲}{۳۵}, \frac{۱۴۵}{۳۵}, \frac{-۲۴}{۳۵})$$

$$\vec{u} = \vec{AB} = (\frac{-۱۶۷}{۳۵}, \frac{۱۱۰}{۳۵}, \frac{۱۱}{۳۵}) \parallel (-۱۶۷, ۱۱۰, ۱۱)$$

$$d': \frac{x+۱}{-۱۶۷} = \frac{y-۱}{۱۱۰} = \frac{z+۱}{۱۱}$$ معادله‌ی قرینه‌ی خط d نسبت به صفحه‌ی D

ادامه دارد...

اشاره

در سال ۱۸۵۹ میلادی سر ویلیام روان همیلتن (۱۸۶۵ـ۱۸۰۵) ریاضیدان برجسته‌ی ایرلندی، نوعی بازی را که از یک دوازده‌وجهی که از چوب سفت و محکم، قطعه‌ای زنجیر و بیست پرچم تشکیل شده بود، به بازار عرضه کرد. در این بازی، هر رأس دوازده‌وجهی به نام یکی از شهرهای مهم و مشهور آن زمان نامگذاری شده بود، و بازیکن به عنوان جهانگرد، باید از یک شهر شروع به حرکت می‌کرد و سپس از شهرهای بعدی، تنها و تنها یک بار عبور می‌کرد و دوباره به همان شهری که حرکت خود را از آن آغاز کرده بود، بازمی‌گشت. در این بازی، جهانگرد از هر شهری که دیدار می‌کرد، یک پرچم را در رأس متناظر با آن شهر، در دوازده وجهی قرار می‌داد و به همین ترتیب تا شهر آخر. زنجیر نیز مسیر حرکت جهانگرد را نشان می‌داد. این بازی که به عنوان یک معما به بازار ارائه شده بود، آن قدر سهل و آسان بود که هر فرد عامی نیز می‌توانست آن را حل کند. به همین دلیل، فروش



گراف همیلتنی

● احسان یارمحمدی

آن در بازار، نه تنها با اقبال خوب مواجه نشد، بلکه به صورت کامل دچار شکست شد. عرضه‌ی این بازی توسط همیلتن باعث شد، رده‌ای خاص از گراف‌ها در نظریه‌ی گراف‌ها پا به عرصه‌ی ظهور بگذارند که به افتخار همیلتن، گراف‌های همیلتنی نامیده شدند.

مسیر همیلتنی: در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ و اندازه‌ی q، مسیری را که همه‌ی رأس‌های گراف G را یک‌بار و تنها یک‌بار مرور کند، مسیر همیلتنی می‌نامیم.

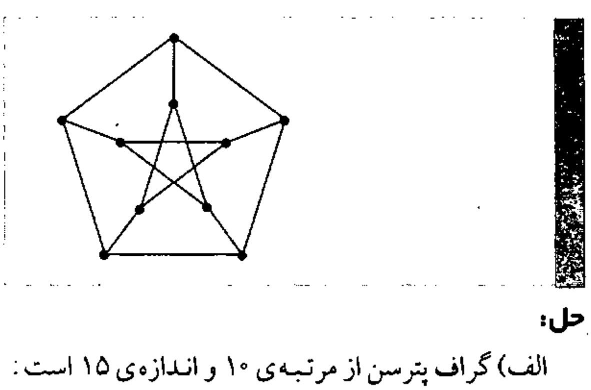
دور همیلتنی: در گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ و اندازه‌ی q، دوری را که شامل همه‌ی رأس‌های گراف G باشد، دور همیلتنی می‌نامیم.

گراف همیلتنی: گراف ساده‌ی $G = (V, E)$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ و اندازه‌ی q را همیلتنی می‌نامیم، اگر دارای دور همیلتنی باشد.

مثال ۱: شکل زیر، نمودار گراف پترسن است.

الف) مسیری همیلتنی در این گراف مشخص کنید.

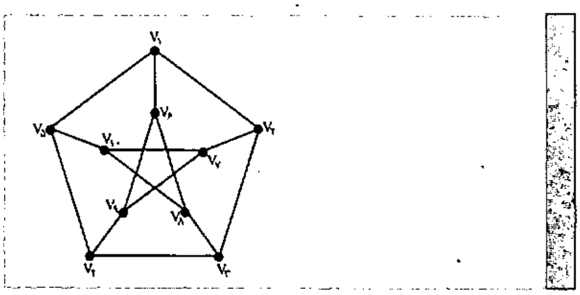
ب) آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟



حل:

الف) گراف پترسن از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۱۵ است: بنابراین، مجموعه رأس‌های آن به صورت $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ است.

اکنون رأس‌های گراف پترسن را به وسیله‌ی مجموعه رأس‌های متناظر با آن، برچسب‌گذاری یا به عبارت دیگر نامگذاری می‌کنیم. بنابراین، نمودار گراف پترسن به صورت زیر می‌شود:



با توجه به شکل بالا، هریک از مسیرهای زیر، یک مسیر همیلتنی برای گراف پترسن است.

۱. $v_1v_2v_3v_4v_5v_{10}v_8v_6v_9v_7$

۲. $v_{10}v_5v_4v_9v_7v_2v_3v_8v_6v_1$

۳. $v_4v_9v_6v_8v_3v_2v_1v_5v_{10}v_7$

ب) گراف پترسن همیلتنی نیست، چون در نمودار آن هیچ دور همیلتنی وجود ندارد.

قضیه‌ی ۱

گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی $p \leq 2$ همیلتنی نیست.

برهان

اگر گراف ساده‌ی G دارای مرتبه‌ی $p \leq 2$ باشد، به آن معناست که $p = 1$ یا $p = 2$ است که باعث پدیدار شدن سه گراف متمایز از یکدیگر می‌شود.

اگر $p = 1$ باشد، بنابراین گراف متناظر با یک رأس، گراف کامل K_1 است که گراف تهی $\overline{K_1}$ نیز تلقی می‌شود. اگر $p = 2$ باشد، در این صورت گراف متناظر با دو رأس یا گراف کامل K_2 یا گراف تهی $\overline{K_2}$ است.

بنابراین چون گراف‌های کامل K_1 و K_2 را به ترتیب می‌توان درخت‌های T_1 و T_2 نامید، درنتیجه در گراف کامل K_1 مسیری وجود ندارد که بخواهیم در مورد همیلتنی بودن یا نبودن آن بحث کنیم. در گراف K_2 هر چند که مسیری به طول

۱ وجود دارد، ولی این مسیر همیلتنی هیچ‌گاه نمی‌تواند یک دور باشد، و این با گراف همیلتنی در تناقض است.

گراف تهی $\overline{K_2}$ گرافی بدون یال با تعداد رأس ۲ است که گرافی ناهمبند است. درضمن، در گراف تهی $\overline{K_2}$ به علت وجود نداشتن یال، مسیری وجود ندارد که دوری وجود داشته باشد، و این با گراف همیلتنی در تناقض است.

قضیه‌ی ۲

گراف (ساده) همیلتنی G، همبند است.

برهان

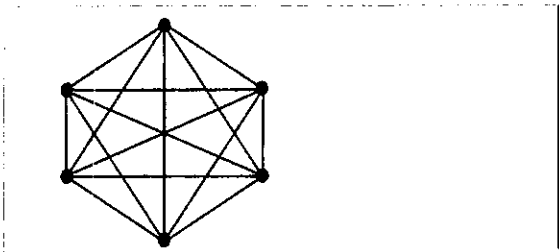
گراف G همیلتنی است، بنابراین دارای دور همیلتنی و به واسطه‌ی آن دارای مسیری همیلتنی است که هریک از رأس‌های گراف G را مرور می‌کند. بنابراین، هر ۲ رأس از مجموعه رأس‌های گراف G، به‌وسیله‌ی یک مسیر به یکدیگر مجاور می‌شوند. بدین معنی که بین هریک از رأس‌های گراف G یک مسیر وجود دارد که این تعریف گراف همبند است.

مثال ۲: در گراف ۵ـ منتظم G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی $q - 2p = 3$ برقرار است. آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

در گراف rـ منتظم G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، رابطه‌ی $rp = 2q$ برقرار است. بنابراین:

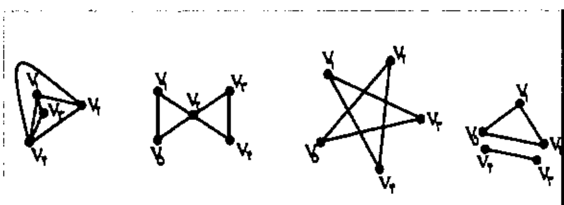
$$\begin{cases} 5p = 2q \\ q - 2p = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{5}{2}p \\ q = 2p + 3 \end{cases} \Rightarrow p = 6,\ q = 15$$

در گراف کامل K_p با اندازه‌ی q، رابطه‌ی $q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است. درنتیجه، این گراف ۵ـ‌منتظم G یک گراف کامل K_6 نیز هست و در آن حداقل یک دور با طول ۶ یافت می‌شود، پس این گراف همیلتنی است.



تمرین‌ها

۱. شکل‌های زیر نمودارهای گراف‌های ساده‌ی G_1، G_2، G_3 و G_4 هستند.



الف) کدام یک از گراف‌های ساده‌ی G_1، G_2، G_3 و G_4 دارای مسیر همیلتنی است؟ استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

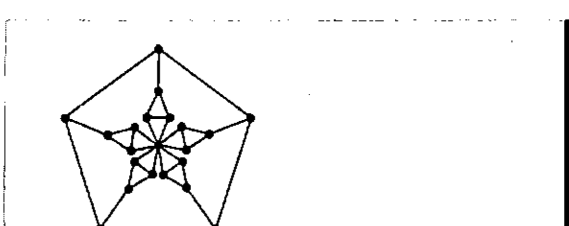
ب) کدام یک از گراف‌های مکمل متناظر با گراف‌های ساده‌ی G_1، G_2، G_3 و G_4 دارای دور همیلتنی است؟ دلیل خود را بیان کنید.

۲. ثابت کنید گراف کامل K_p با اندازه‌ی q، همیلتنی است.

۳. شکل زیر نمودار گراف «وُرک شاپ» است.

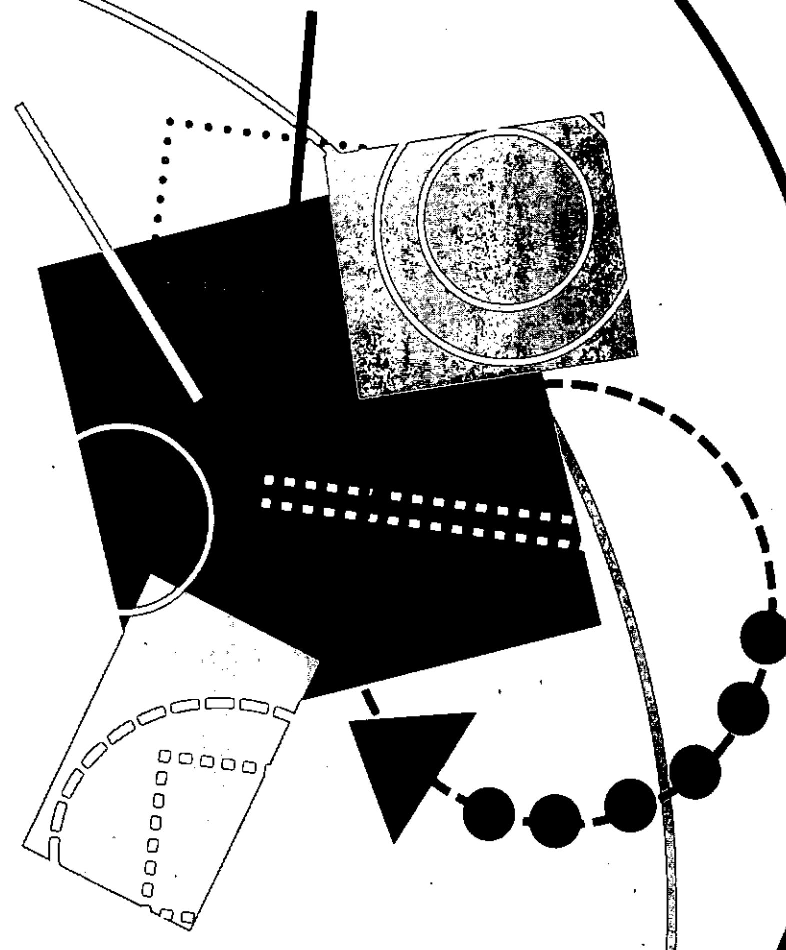
الف) آیا در این گراف مسیری که همه‌ی رأس‌های آن را یک‌بار و تنها یک‌بار مرور کند، وجود دارد؟ استدلال خود را شرح دهید.

ب) آیا گراف «وُرک شاپ» همیلتنی است؟ چرا؟



المپیاد ریاضی انگلستان (۱۲ ژانویه‌ی ۲۰۰۰)

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون جهان ۴



● ترجمه، هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در کشور انگلستان از سال ۱۹۶۶ تاکنون، هر سال برگزار می‌شود. مجموعه مسائل المپیاد ریاضی این کشور، از آغاز تا سال ۱۹۹۶ در کتابی منتشر شده است که نگارنده آن را ترجمه و انتشارات مدرسه در سال ۱۳۸۲ منتشر کرده است. علاقه‌مندان برای آشنایی با نحوه‌ی برگزاری این رقابت‌ها و نوع سؤالات می‌توانند به کتاب فوق مراجعه کنند.[1]

سؤالات دور اول این رقابت‌ها که در سال ۲۰۰۰ میلادی، روز چهارشنبه دوازدهم ژانویه، برگزار شد، در این‌جا همراه با راهنمایی می‌آیند. مدت زمان آزمون سه ساعت و نیم و شامل پنج مسأله بوده است. هر مسأله ده امتیاز داشته و به کارگیری ماشین حساب و ابزارهای محاسبه‌ای در آزمون، ممنوع بوده است. اکنون صورت مسأله‌های مذکور، و نیز راه‌حل آن‌ها که از مترجم هستند، به ترتیب ارائه می‌شوند.

۱. مماس مشترک دو دایره‌ی متقاطع C_1 و C_2 به ترتیب در نقاط P و Q بر آن‌ها مماس است. دو دایره در نقاط M و N متقاطعند و N به PQ نزدیک‌تر از M است. خط راست PN

دایره‌ی $C_۲$ را در نقطه‌ی R قطع می‌کند. ثابت کنید MQ زاویه‌ی $\angle PMR$ را نصف می‌کند.

۲. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، $۱۲۱^n - ۲۵^n + ۱۹۰۰^n - (-۴)^n$ بر ۲۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۳. مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. بین تمام نقاط P واقع بر محیط مثلث، نقطه‌ای را بیابید که به ازای آن مقدار AP+BP+CP مینیمم شود.

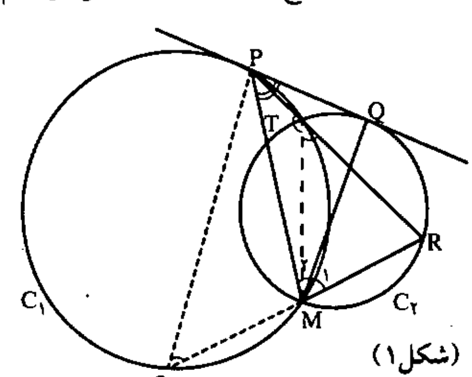
۴. برای هر عدد صحیح مثبت $k > ۱$، دنباله‌ی بازگشتی $\{a_n\}$ را با دو رابطه‌ی $a_۰ = ۱$ و $a_n = kn + (-۱)^n a_{n-۱}$ (به‌ازای هر $n \ge ۱$) تعریف می‌کنیم. همه‌ی مقادیر k را به دست آورید که به ازای آن‌ها، عدد ۲۰۰۰ جمله‌ای از دنباله باشد.

۵. هفت کوتوله تصمیم دارند چهار گروه برای شرکت در امتحان عصر طلایی[۲] تشکیل دهند. البته تعداد اعضای گروه‌ها یکسان نخواهد بود. برای مثال، ممکن است یک گروه شامل داک[۳] به تنهایی، گروه دیگر فقط شامل دوپی[۴] و گروهی هم شامل اسلیپی[۵] و هپی[۶] و گرامپی[۷] و گروه آخر شامل باشفول[۸] و اسنیزی[۹] باشد.

آن‌ها به چند طریق می‌توانند چهار گروه تشکیل دهند؟ (ترتیب گروه‌ها و نیز کوتوله‌های عضو آن‌ها مهم نیست، اما هر کوتوله فقط می‌تواند عضو یک گروه باشد). فرض کنید سفیدبرفی هم قبول کند که در گروه‌ها وارد شود، در این صورت آن‌ها به چند طریق می‌توانند گروه‌ها را تشکیل دهند؟

راهنمایی و حل مسائل

۱. نقطه‌ی برخورد PM با دایره‌ی $C_۱$ را T می‌نامیم و وتر مشترک MN را رسم می‌کنیم. همچنین MR را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی $C_۱$ را در S قطع کند و S را به P وصل می‌کنیم.



(شکل۱)

چون چهارضلعی PNMS محاطی است، بنابراین $\hat{N}_۱ + \hat{S} = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{N}_۱ + \hat{N}_۲ = ۱۸۰^\circ$ و درنتیجه: $\hat{S} = \hat{N}_۲$ و $\hat{N}_۲ = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲}$ و بنابراین: $\hat{S} = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲}$. همچنین در دایره‌ی $C_۱$ زاویه‌ی $M\hat{P}Q$ زاویه‌ی ظلی و برابر با $\frac{\overset{\frown}{PM}}{۲}$ است و زاویه‌ی $\hat{S}$ نیز محاطی و برابر $\frac{\overset{\frown}{PM}}{۲}$ است. بنابراین داریم: $\angle MPQ = \hat{S}$ و درنتیجه: $\angle MPQ = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲}$. حال در دایره‌ی $C_۲$، زاویه‌ی $\angle MPQ$، زاویه‌ی خارجی است و درنتیجه: $\angle MPQ = \frac{\overset{\frown}{MQ} - \overset{\frown}{TQ}}{۲}$ و بنابراین:

$$\frac{\overset{\frown}{MQ} - \overset{\frown}{TQ}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{MR}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{MQ} - \overset{\frown}{TQ} = \overset{\frown}{MR} \Rightarrow$$
$$\overset{\frown}{MR} + \overset{\frown}{RQ} - \overset{\frown}{TQ} = \overset{\frown}{MR} \Rightarrow \overset{\frown}{RQ} = \overset{\frown}{TQ} \Rightarrow \angle M_۱ = \angle M_۲$$

۲. می‌توان نوشت:

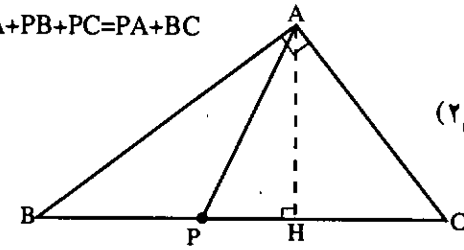
$$A = ۱۲۱^n - ۲۵^n + ۱۹۰۰^n - (-۴)^n$$
$$= (۱۹۰۰^n - ۲۵^n) + (۱۲۱^n - (-۴)^n)$$
$$= (۱۹۰۰ - ۲۵)\underbrace{(۱۹۰۰^{n-۱} + ۱۹۰۰^{n-۲} \times ۲۵ + \cdots + ۲۵^{n-۱})}_{k}$$
$$+ (۱۲۱ - (-۴))\underbrace{(۱۲۱^{n-۱} + \cdots + (-۴)^{n-۱})}_{k'}$$
$$= ۱۸۷۵k + ۱۲۵k' = ۱۲۵(۱۵k + k') = ۱۲۵k''$$
$$\Rightarrow ۱۲۵|A$$

بار دیگر می‌نویسیم:

$$A = (۱۲۱^n - ۲۵^n) + (۱۹۰۰^n - (-۴)^n)$$
$$= (۱۲۱ - ۲۵)\underbrace{(۱۲۱^{n-۱} + \cdots + ۲۵^{n-۱})}_{m}$$
$$+ (۱۹۰۰ - (-۴))\underbrace{(۱۹۰۰^{n-۱} + \cdots + (-۴)^{n-۱})}_{m'}$$
$$= ۹۶m + ۱۹۰۴m' = ۱۶(۶m + ۱۱۹m') = ۱۶m''$$
$$\Rightarrow ۱۶|A \Rightarrow ۱۶|A, ۱۲۵|A, \ (۱۶,۱۲۵)$$
$$= ۱ \Rightarrow ۱۶ \times ۱۲۵|A \Rightarrow ۲۰۰۰|A$$

۳. فرض می‌کنیم: $BC > AB \ge AC$ اگر نقطه‌ی P روی BC باشد، مطابق **شکل۲** داریم:

$$PA+PB+PC=PA+BC$$

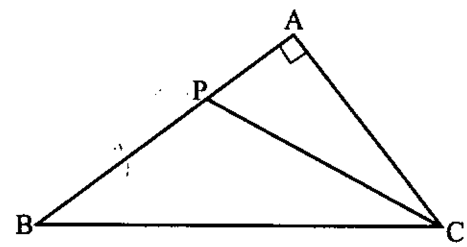


(شکل۲)

و چون BC ثابت است، این مقدار وقتی مینیمم می‌شود که PA مینیمم شود و این در صورتی است که P روی H، (پای ارتفاع AH) باشد. در این حالت، مجموع فوق برابر است با:

$$AH+BC=a+h_a \qquad (1)$$

اما اگر P روی AB باشد، مطابق شکل۳ داریم:



(شکل۳)

$$PA+PB+PC=AB+PC$$

و چون AB ثابت است، این مقدار وقتی مینیمم می‌شود که PC مینیمم شود و این در صورتی است که P روی A باشد. در این حالت مجموع فوق برابر است با:

$$AB+AC=b+c \qquad (2)$$

درحالتی که P روی AC باشد نیز به همین نتیجه می‌رسیم.
اکنون کافی است بین دو مقدار رابطه‌های (۱) و (۲) مقایسه‌ای انجام دهیم و کوچک‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم. می‌توانیم ثابت کنیم: $a+h_a > b+c$

برای این منظور توجه می‌کنیم که: $b=a\sin B$ و $c=a\cos B$ و $h_a=\frac{bc}{a}=a\sin B\cos B$ و درنتیجه:

$$b+c=a(\sin B+\cos B) \text{ و } a+h_a=a(1+\sin B\cos B)$$

حال کافی است نشان دهیم: $1+\sin B\cos B > \sin B+\cos B$
و یا:
$1-\sin B-\cos B+\sin B\cos B>0$ و این معادل است با:

$$(1-\sin B)(1-\cos B)>0$$

و درستی نامساوی اخیر واضح است. بنابراین مینیمم مقدار فوق برابر است با: $b+c$ و نقطه‌ی P باید روی A باشد.

۴. برای حل این مسأله، ابتدا تعداد زیادی از جملات دنباله را با استفاده از قانون دنباله می‌نویسیم:

$a_0=1,\ a_1=k+(-1)a_0=k-1,$

$a_2=2k+(-1)^2a_1=3k-1$

$a_3=3k+(-1)^3a_2=1, a_4=4k+(-1)^4a_3=4k+1,$

$a_5=5k+(-1)^5a_4=k-1$

$a_6=6k+(-1)^6a_5=7k-1,\ a_7=7k+(-1)^7a_6=1,$

$a_8=8k+(-1)^8a_7=8k+1$

$a_9=9k+(-1)^9a_8=k-1,$

$a_{10}=10k+(-1)^{10}a_9=11k-1,$

$a_{11}=11k+(-1)^{11}a_{10}=1$

$a_{12}=12k+(-1)^{12}a_{11}=12k+1,$

$a_{13}=13k+(-1)^{13}a_{12}=k-1,$

$a_{14}=14k+(-1)^{14}a_{13}=15k-1$

$a_{15}=15k+(-1)^{15}a_{14}=1,\cdots$

اکنون نگاهی به شانزده جمله‌ی متوالی دنباله بیندازید:

$$1, k-1, 3k-1, 1, 4k+1, k-1, 7k-1, 1, 8k+1, k-1,$$
$$11k-1, 1, 12k+1, k-1, 15k-1, 1, \cdots$$

دلیل نوشتن این تعداد جمله آن است که نظام موجود بین آن‌ها را دریابید. به جز جمله‌ی اول (a_0) بقیه‌ی جملات نظام مشخصی دارند و به سادگی روشن است که هر چهار جمله‌ی متوالی یک نظم دارند. جملات دوم (a_1) و ششم (a_5) و دهم (a_9) و... همگی مساوی $k-1$ هستند و جملات چهارم (a_3)، هشتم (a_7)، دوازدهم (a_{11}) و... همگی مساوی ۱ هستند. به این ترتیب می‌توان برای هر $P\ge 1$ نوشت:

$$a_{4P-3}=k-1,\ a_{4P-1}=1,\ a_{4P-2}=(4P-1)k-1,$$
$$a_{4P}=4Pk+1$$

درستی این دستورات را می‌توان به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کرد. برای مثال یکی از آن‌ها را اثبات می‌کنیم. با استقرا روی P، ثابت می‌کنیم: $a_{4P-3}=k-1$ به ازای $P=1$ درستی حکم واضح است: $a_1=k-1$. حال فرض می‌کنیم به ازای $P=n$ حکم درست باشد، یعنی $a_{4n-3}=k-1$ و ثابت می‌کنیم به ازای $P=n+1$ نیز حکم درست است: $a_{4n+1}=a_{4(n+1)-3}=k-1$.

برای این منظور می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a_{4n-2} &= (4n-2)k+(-1)^{4n-2}a_{4n-3}=(4n-2)k+k-1 \\ &= (4n-1)k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4n-1} &= (4n-1)k+(-1)^{4n-1}a_{4n-2} \\ &= (4n-1)k-(4n-1)k+1=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4n} &= 4nk+(-1)^{4n}a_{4n-1}=4nk+1, \\ a_{4n+1} &= (4n+1)k+(-1)^{4n+1}a_{4n} \\ &= (4n+1)k-4nk-1=k-1 \end{aligned}$$

و درستی حکم ثابت می‌شود. اکنون می‌توانید درستی سایر حکم‌ها را نیز به همین صورت اثبات کنید.

حال به راحتی می‌توان پاسخ مسأله را به دست آورد. جملات ردیف $4P-1$ همگی مساوی ۱ هستند و جملات ردیف $4P-3$ مساوی $k-1$ هستند. بنابراین می‌توانند مساوی ۲۰۰۰ باشند:

$$k-1=2000 \Rightarrow k=2001$$

بنابراین، به ازای $k=2001$ بی شمار جمله‌ی مساوی ۲۰۰۰ در دنباله خواهیم داشت.

جملات ردیف $4P$ نمی‌توانند مساوی ۲۰۰۰ باشند، زیرا در این صورت داریم:

$$4Pk+1=2000 \Rightarrow 4Pk=1999,\ \ Pk=\frac{1999}{4}$$

و چون: $P, k \in Z$، این تساوی ممکن نیست. ولی جملات ردیف $4P-3$ نیز می‌توانند مساوی ۲۰۰۰ باشند:

$$(4P-1)k-1=2000 \Rightarrow (4P-1)k=2001=3\times 23\times 29$$

در این جا حالت‌های زیر قابل تصورند:

$$\begin{cases}4P-1=3\\ k=667\end{cases} \quad \begin{cases}4P-1=23\\ k=87\end{cases} \quad \begin{cases}4P-1=87\\ k=23\end{cases} \quad \begin{cases}4P-1=667\\ k=3\end{cases}$$

غیر قابل قبول

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$(k,P)=(87,6)$ یا $(23,22)$ و $(3,167)$

بنابراین به طور خلاصه به ازای چهار مقدار متفاوت k، جمله‌ی ۲۰۰۰ می‌تواند در دنباله وجود داشته باشد. به ازای $k=2001$ بی‌شمار جمله (جملات a_1، a_5، a_9 و...)، به ازای $k=87$، جمله‌ی a_{21}، به ازای $k=23$، جمله‌ی a_{85} و به ازای $k=3$، جمله‌ی a_{665} مساوی ۲۰۰۰ است.

۵. تشکیل گروه‌ها فقط به سه صورت ممکن است: یک گروه چهارنفره و سه گروه یک نفره یا دو گروه یک نفره و یک گروه سه نفره و یک گروه دو نفره یا سه گروه دو نفره و یک گروه یک نفره.

در هریک از این حالت‌ها می‌توان تعداد راه‌های انتخاب گروه‌ها را محاسبه و حاصل آن‌ها را با هم جمع کرد:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{3!}=35 && \text{(حالت اول)} \\ &\frac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!}=35\times 6=210 && \text{(حالت دوم)} \\ &\frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{3!}=\frac{21\times 10\times 3}{6}=105 && \text{(حالت سوم)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$350=105+210+35=\text{تعداد روش‌ها}$$

درحالتی که عده‌ی افراد هشت نفر باشد نیز، با فرایندی مشابه، تعداد روش‌ها را خودتان به‌دست آورید.

زیرنویس

۱. راهنمای المپیاد ریاضی، مؤلف: تونی گاردینر، مترجم: هوشنگ شرقی، انتشارات مدرسه، چاپ اول، ۱۳۸۲.

2. Millennium Quiz

3. Doc

4. Dopey

5. Sleepy

6. Happy

7. Grumpy

8. Bashful

9. Sneezy

(زیرنویس‌های ۲ تا ۹، نام قهرمانان داستان معروف سفید برفی و هفت کوتوله هستند. مترجم)

اتحاد و معادله

تجزیه‌ی عبارت‌های جبری (روشی تازه)

● پرویز شهریاری

تجزیه‌ی یک عبارت جبری به صورت ضرب عامل‌های خود، هم وسیله‌ای برای تشکیل اتحاد است و هم به حل معادله‌ها یاری می‌رساند. برای نمونه، به این مسأله توجه کنید:

مسأله: $f(x)$ به این صورت داده شده است:

$$f(x) = a(b+x)(b^2+x^2-a^2)(a+b-x)$$
$$-x(a+b)(a^2+b^2-x^2)(b+x-a)$$

$f(x)$ را به صورت ضرب چهار عامل تجزیه کنید و سپس معادله‌ی $f(x)=0$ را حل کنید.

حل: عبارت $f(x)$ به ازای $b=0$ و $x=a$ برابر صفر می‌شود، بنابراین بر $b(x-a)$ بخش‌پذیر است. پرانتزها را باز و $f(x)$ را نسبت به x منظم می‌کنیم. اگر آن را بر $b(x-a)$ تقسیم کنیم، در خارج قسمت به این عبارت می‌رسیم:

$$x^3+(a+b)x^2+(a^2-b^2)x+(a^2-b^2)(a+b)$$
$$=x^2(x+a+b)+(a^2-b^2)(x+a+b)$$
$$=(x+a+b)(x^2+a^2-b^2)$$

بنابراین مقدار $f(x)$ به این صورت است:

$$f(x)=b(x-a)(x+a+b)(x^2+a^2-b^2)$$

اگر $f(x)$ را همان عبارت نخستین در نظر بگیریم، یک اتحاد به دست می‌آید. برای $f(x)=0$ هم این چهار جواب را خواهیم داشت:

$$x_1=a,\ x_2=-(a+b),\ x_{3,4}=\pm\sqrt{b^2-a^2}$$

□

در این‌جا راهی برای تجزیه‌ی این عبارت جست‌وجو می‌کنیم:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

ضریب‌های عبارت $f(x)$ را درست (مثبت، منفی یا صفر) می‌گیریم. ضریب بزرگ‌ترین درجه را هم مثبت فرض می‌کنیم:

$$a_n > 0$$

n را درست و مثبت می‌گیریم، یعنی $f(x)$ برابر مقدار ثابت a_0 نیست.

چند جمله‌ای $g(x)$ را با توان مثبت کوچک‌تر از n، و ضریب‌های مثبت را «بخشیابی» از چند جمله‌ای $f(x)$ گوییم؛ به شرطی که بتوان چند جمله‌ای $h(x)$ را (که متمم بخشیاب می‌نامیم) به نحوی پیدا کرد که داشته باشیم:

$$f(x)=g(x).h(x)$$

وقتی که $f(x)$ بخشیابی نداشته باشد، آن را «غیرقابل

تحویل» می‌نامیم. ثابت می‌شود، هر چند جمله‌ای، حاصل ضربی از چند جمله‌ای‌های غیرقابل تحویل است (در این جا از تبدیل به عامل‌های درجه اول صحبتی نمی‌کنیم).

در این جا روش ساده و بسیار زیبای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها به عامل‌های خود، از همان راهی است که م. و. **یاکوکین** در کتاب «نظریه‌ی عددی تبدیل چندجمله‌ای‌ها» طرح کرده است. روشن است که برای تجزیه‌ی یک عبارت، اول باید قابل تحویل بودن آن را ثابت کرد و در صورت مثبت بودن جواب، یکی از عامل‌های آن را معین کرد. ما در این جا به همین مسأله می‌پردازیم.

چندجمله‌ای‌های مثبت

چندجمله‌ای (۱) را مثبت می‌نامیم، به شرطی که همه‌ی ضریب‌های آن نامنفی باشند:

$a_n > 0,\ a_{n-1} \ge 0,\ \cdots,\ a_1 \ge 0,\ a_0 \ge 0$

روشن است، حاصل‌ضرب دو (یا به طور کلی چند) چندجمله‌ای مثبت، یک چندجمله‌ای مثبت است. در حالت کلی، عکس این مطلب درست نیست. یعنی چندجمله‌ای‌های مثبتی وجود دارند که بخشیاب‌های نامثبت دارند؛ برای نمونه:

$$A = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$$

به عنوان نخستین تقریب برای رسیدن به مسأله‌ی کلی تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای دلخواه به صورت عامل‌های یاکوکین، این مسأله‌ی کمکی را می‌آوریم:

مسأله‌ی یاکوکین: برای هر چند جمله‌ای مثبت (با توان‌های مثبت و ضریب‌های درست)، دست‌کم یک زوج متمم یکدیگر با بخش‌های مثبت وجود دارد (و یا ثابت می‌کنیم که برای چندجمله‌ای مفروض، چنین زوجی پیدا نمی‌شود). یاکوکین این مسأله را بر پایه‌ی پیش‌قضیه‌ای ثابت می‌کند، به این شرح:

پیش‌قضیه‌ی ۱. بزرگ‌ترین ضریب حاصل‌ضرب gh دو چندجمله‌ای مثبت g و h، کم‌تر از بزرگ‌ترین ضریب هریک از عامل‌ها نیست.

اثبات: b_{i_0} و c_{j_0} را بزرگ‌ترین ضریب‌های چندجمله‌ای‌های g و h می‌گیریم. از آن‌جا که ضریب $a_{i_0+j_0}$ چندجمله‌ای p=gh با این دستور بیان می‌شود:

$$a_{i_0+j_0} = b_{i_0}c_{j_0} + \cdots$$

(چند نقطه‌ای که در این جا گذاشته‌ایم، به معنای برخی جمله‌های غیرمنفی متمم است) پس:

$$a_{i_0+j_0} \ge b_{i_0}c_{j_0}$$

بنابراین، بزرگ‌ترین ضریب چندجمله‌ای f هم کم‌تر از حاصل ضرب $b_{i_0}c_{j_0}$ نیست و درنتیجه کم‌تر از هریک از ضریب‌های b_{i_0} و c_{i_0} نیست (زیرا عددهای b_{i_0} و c_{i_0}، عددهایی درست و مثبت هستند).

از این به بعد، بزرگ‌ترین ضریب چندجمله‌ای مثبت را، ارتفاع آن می‌نامیم. اکنون m را عدد درست مثبتی در نظر می‌گیریم. هر چندجمله‌ای f را که ارتفاعی کم‌تر از m داشته باشد، به عدد درست و مثبت [f] نسبت می‌دهیم و فرض می‌کنیم:

$$[f] = f(m)$$

بنابراین، اگر داشته باشیم:

$$f(m) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

آن وقت خواهیم داشت:

$$[f] = a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0$$

بنابراین، چون بنابر شرط، ارتفاع چندجمله‌ای f کم‌تر از m است، عددهای a_n، a_{n-1}، ...، a_1، a_0 رقم‌های [f] را در عددشماری با مبنای m تشکیل می‌دهند. به این ترتیب:

$$(\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0})_m$$

را برای هر چندجمله‌ای مثبت (۱) که ارتفاعی کم‌تر از m داشته باشد، داریم:

$$[f] = (\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0})_m$$

به زبان دیگر، برای آن‌که عدد [f] را در دستگاه عددشماری به مبنای m به دست آوریم، کافی است ردیف ضریب‌های چندجمله‌ای f را بنویسیم. روشن است که رابطه‌ی:

$$f \rightarrow [f]$$

ارتباطی یک به یک بین مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های مثبتی که ارتفاعی کم‌تر از m دارند (و شامل چندجمله‌ای با توان صفر هم می‌شوند)، و مجموعه‌ی همه‌ی عددهای مثبت درست دارند. چندجمله‌ای f را که متناظر با عدد a باشد، یعنی برای آن a = [f]، چندجمله‌ای می‌نامیم که به عدد a ارتباط دارد

(در مبنای m). برای به دست آوردن این عدد، باید عدد a را در عددشماری به مبنای m نوشت و رقم‌های این عدد را ضریب‌های چندجمله‌ای f انتخاب کرد. یادآوری می‌کنیم، چندجمله‌ای با توان صفر (که ما آن را در بررسی خود وارد نمی‌کنیم)، با عددهای کوچک‌تر از m و تنها با همان عددها، متناظر است.

از پیش قضیه‌ی ۱ و برابری:

$$f(m) = g(m)h(m)$$

می‌توان این قضیه را نتیجه گرفت:

قضیه‌ی ۱. همه‌ی بخشیاب‌های مثبت چندجمله‌ای f، ارتفاع‌هایی کوچک‌تر از m دارند. درضمن اگر داشته باشیم:

$$f = gh \qquad (۲)$$

این برابری هم برقرار است:

$$[f] = [g][h] \qquad (۳)$$

از این قضیه می‌توان به طور مستقیم، قاعده‌ی زیر را درباره‌ی تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای مثبت به دو چندجمله‌ای مثبت نتیجه گرفت:

قاعده: f را یک چندجمله‌ای مثبت فرض کنید. عدد m را بزرگ‌تر از همه‌ی ضریب‌های چندجمله‌ای انتخاب می‌کنیم، عدد [f] را پیدا و آن را به عامل‌های خود تجزیه می‌کنیم. برای هر زوج بخشیاب‌های متمم یکدیگر a و b از عدد [f] (که بزرگ‌تر از m باشد)، چندجمله‌ای‌های مثبت g و h را در ارتباط با آن‌ها (در مبنای m) تشکیل می‌دهیم. همه‌ی بخشیاب‌های چندجمله‌ای f که متمم یکدیگر باشند، بین همین زوج‌های (h و g) خواهند بود. برای همه‌ی زوج‌ها، حاصل‌ضرب gh را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را با چندجمله‌ای f مقایسه می‌کنیم؛ از این مقایسه یا تجزیه، f به صورت ضرب دو چندجمله‌ی مثبت به دست می‌آید و یا روشن می‌شود که چندجمله‌ای f قابل تجزیه به دو چندجمله‌ی مثبت نیست.

این قاعده ثمربخش است و امکان عملی برای پیدا کردن بخشیاب‌های مثبت یک چندجمله‌ای مثبت را به ما می‌دهد. با این حال، آن را می‌توان کامل کرد، به شرطی که آن را با قاعده‌ی جدا کردن زوج‌هایی از بخشیاب عددهای [f] که لازم نیستند، همراه کنیم؛ یعنی زوج‌هایی که منجر به بخشیاب‌های f نمی‌شوند. فرض کنید:

$$g = b_p x^p + \cdots + b_0$$

$$h = c_q x^q + \cdots + c_0$$

دو بخشیاب متمم چند جمله‌ای (۱) باشند. در این صورت:

$$n = p + q \qquad (۴')$$

$$a_n = b_p c_q \qquad (۵')$$

$$a_0 = b_0 c_0 \qquad (۶')$$

به جز آن:

$$f(1) = g(1)h(1) \qquad (۷')$$

برای هر عدد درست مثبت a که در دستگاه عدد شماری به مبنای m نوشته شده است، نماد $\tau(a)$ را به معنای یک واحد کم‌تر از عدد رقم‌های آن و $\sigma(a)$ را مجموع رقم‌های آن می‌گیریم. به جز این، نمادهای $A(a)$ و $B(a)$ را نخستین رقم عدد a (رقم یکان) و رقم سمت چپ آن (واحد رقم ردیف بالاتر) می‌گیریم. با این نامگذاری می‌توانیم، رابطه‌های (۴') تا (۷') را به این صورت بنویسیم:

$$\tau([f]) = \tau([g]) + \tau([h]) \qquad (۴'')$$

$$B([f]) = B([g])B([h]) \qquad (۵'')$$

$$A([f]) = A([g])A([h]) \qquad (۶'')$$

$$\sigma([f]) = \sigma([g])\sigma([h]) \qquad (۷'')$$

که از آن‌جا، خیلی زود به قانون زیر می‌رسیم:

قانون انتخاب: برای تشکیل زوج (h و g)، بخشیاب‌ها متمم یکدیگر از چندجمله‌ای f، باید تنها از آن زوج‌های (a و b) که بخشیاب‌های متمم عدد [f] هستند و برای آن‌ها این رابطه‌ها برقرار است، استفاده کرد:

$$\tau([f]) = \tau(a) + \tau(b), \qquad (۴)$$

$$B([f]) = B(a)B(b), \qquad (۵)$$

$$A([f]) = A(a)A(b), \qquad (۶)$$

$$\sigma([f]) = \sigma(a)\sigma(b) \qquad (۷)$$

برقراری رابطه‌های (۴) و (۵) و (۶) را می‌توان «با نخستین نگاه»، از برابری ab = [f] نتیجه گرفت. تحقیق رابطه‌ی (۷) کمی دشوارتر است، ولی حتی این رابطه را هم می‌توان «در ذهن» نتیجه گرفت.

رابطه‌های (۴'') تا (۷'')، نه تنها برای درستی برابری (۲)

لازم‌اند، بلکه کافی هم هستند. به جز این، این قضیه هم درست است:

قضیه‌ی ۲: چندجمله‌ای‌های g و h، بخشیاب‌های متمم a و b از عددهای [f]، تنها وقتی بخشیاب‌های متمم یکدیگر از چندجمله‌ای f هستند که رابطه‌ی (۷) برقرار باشد.

اثبات. چندجمله‌ای $f = gh$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید:

$$F = A_N x^N + A_{N-1}x^{N-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

همچنین فرض کنید، همچون قبل داشته باشیم:

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

$$h = c_q x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

بنابراین: $N = p + q$. بنابر قانون ضرب چندجمله‌ای‌ها، هر ضریب A_k (k برابر ۰، ۱، ...، N) از چندجمله‌ای F برابر است با مجموع همه‌ی حاصل‌ضرب‌های $b_i c_j$، که در آن: $i + j = k$. به عنوان نمونه:

$A_0 = b_0 c_0$

$A_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$ و غیره

از طرف دیگر، بنابر شرط: $[f] = [g].[h]$، یعنی:

$$(\overline{a_n \cdots a_0})_m = (\overline{b_p \cdots b_0})_m . (\overline{c_q \cdots c_0})_m$$

با توجه به قانون ضرب عددهای چندرقمی، برای محاسبه‌ی رقم a_0، واحد حاصل‌ضرب، باید رقم‌های b_0 و c_0 را در هم ضرب کرد و از حاصل‌ضرب $b_0 c_0$ رقم واحد بالاتر («دهگان») را کم کرد. بنابراین، اگر در حاصل‌ضرب $b_0 c_0$ به اندازه‌ی ε_0 «دهگان» داشته باشیم، آن‌وقت:

$$a_0 = b_0 c_0 - m\varepsilon_0 \Rightarrow a_0 = A_0 - m\varepsilon_0 \qquad (8_0)$$

سپس عدد «دهگان» حاصل‌ضرب برابر است با مجموع $b_1 c_0 + b_0 c_1 = A_1$، به اضافه‌ی عدد «دهگان» ε_0 که بعد از ضرب واحدها به دست آمده است. بنابراین، «رقم دهگان» از عدد $A_1 + \varepsilon_0$ به دست می‌آید، بعد از کم کردن «صدگان» آن. به زبان دیگر:

$$a_1 = A_1 + \varepsilon_0 - m\varepsilon_1 \qquad (8_1)$$

که در آن، ε_1 عددی نامنفی و درست است. به همین ترتیب:

$$a_2 = A_2 + \varepsilon_1 - m\varepsilon_2 \qquad (8_2)$$

و به طور کلی، برای $k = 0, 1, 2, \cdots, N$:



$$a_k = A_k + \varepsilon_{k-1} - m\varepsilon_k \qquad (۸_k)$$

و در حالت خاص:

$$a_N = A_N + \varepsilon_{N-1} - m\varepsilon_N \qquad (۸_N)$$

(به این ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که: $N \le n$.)

آنچه مربوط به رقم‌های از a_{N+1} تا a_n می‌شود، اگر این رقم‌ها وجود داشته باشند، یعنی $n > N$ باشد، آن‌ها رقم‌های عدد ε_N هستند (در مبنای عددشماری m):

$$\varepsilon_N = a_n m^{n-N} + \cdots + a_{N+2}m + a_{N+1} \qquad (۹)$$

اگر برابری‌های (۸.) تا (۸_N) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$a_0+\cdots+a_n = (A_0+\cdots+A_N) - (m-1)(\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_{N-1}) - m\varepsilon_N$$

عدد $a_{N+1}+\cdots+a_n$ را به دو طرف این برابری اضافه می‌کنیم و برابری (۹) را در نظر می‌گیریم و به این رابطه می‌رسیم:

$$a_0+\cdots+a_n = (A_0+\cdots+A_N) - (m-1)(\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_N) - \left[a_n(m^{n-N-1}-1)+\cdots+a_{N+2}(m-1)\right]$$

ولی:

$$a_0+\cdots+a_n = f(1) = \sigma([f])$$

و مشابه آن:

$$A_0+\cdots+A_N = F(1) = g(1)h(1) = \sigma([g])\sigma([h]) = \sigma(a)\sigma(b)$$

بنابراین، با توجه به شرط:

$$a_0+\cdots+a_n = A_0+\cdots+A_N$$

و به این دلیل که:

$$(m-1)(\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_N) + \left[a_n(m^{n-N-1}-1)+\cdots+a_{N-2}(m-1)\right] = 0$$

که تنها به ازای:

$$\varepsilon_0 = \cdots = \varepsilon_{N-1} = \varepsilon_N = 0$$

برقرار است (که به معنای $a_{N+1} = \cdots = a_n = 0$ است).

به این ترتیب ثابت شد، با تغییر عددهای $a = [g]$ و $b = [h]$، «جابه‌جایی دهگان‌ها» پیش نمی‌آید؛ یعنی:

$$N = n$$

$$a_0 = A_0,\ a_1 = A_1,\ \cdots,\ a_n = A_n$$

قضیه‌ی ۲ به طور کامل ثابت شد. اثبات این قضیه به این معناست که: زوج‌های (a,b) که متمم یکدیگر از عدد [f] هستند و درنتیجه‌ی استفاده از قاعده‌ی بالا به دست می‌آیند، به تغییر زوج‌های (g,h) که بخشیاب‌های متمم چندجمله‌ای f را معین می‌کنند، منجر نمی‌شوند. به زبان دیگر، برای این زوج‌ها، آزمایش $f = gh$ لزومی ندارد.

یادداشت: می‌دانیم، دو چندجمله‌ای درجه‌ی n، تنها وقتی بر هم منطبق هستند که در $n + 1$ نقطه مشترک باشند. با توجه به قضیه‌ی ۲، برای منطبق بودن چندجمله‌ای‌های f و $f = gh$ کافی است (بدون توجه به درجه‌ی آن‌ها) این چندجمله‌ای‌ها در دو نقطه‌ی $x = 1$ و $x = m$ یکسان باشند.

چند مثال. برای این‌که این روش را روشن کنیم، چند نمونه‌ی ساده ولی به اندازه‌ی کافی روشن‌کننده می‌آوریم.

مثال ۱ . همه‌ی بخشیاب‌های این چندجمله‌ای مثبت را پیدا کنید:

$$f = 6x^6 + 7x^5 + 4x^2 + x + 7$$

ارتفاع این چندجمله‌ای برابر است با ۷، به نحوی که می‌توانیم m را برابر ۱۰ بگیریم. ولی به سادگی دیده می‌شود (برای نمونه از روی جدول عددهای اول) که عدد:

$$f(10) = 6700417$$

عددی اول است. بنابراین، این چندجمله‌ای بخشیاب‌های مثبت ندارد.

مثال ۲ . مطلوب است همه‌ی بخشیاب‌های مثبت این چندجمله‌ای

$$f = 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 5$$

در این‌جا هم می‌توانیم $m = 10$ بگیریم. عدد:

$$f(10) = 255855$$

به این صورت، به عامل‌های اول تجزیه می‌شود:

$$255855 = 3 \times 5 \times 37 \times 461$$

بنابراین، می‌توان به پنج امکان تجزیه‌ی عدد $f(10)$ به حاصل‌ضرب دو بخشیاب بزرگ‌تر از ۱۰ رسید:

$$\begin{aligned} f(10) &= 15 \times 17057 \\ &= 111 \times 2305 \\ &= 185 \times 1383 \\ &= 37 \times 6915 \\ &= 461 \times 555 \end{aligned}$$

باید این شرط‌ها برقرار باشد:

$$A([f]) = A(a)A(b),\ \ B([f]) = B(a)B(b)$$

که تنها تجزیه‌ی دوم قابل پذیرش است. این تجزیه برای کافی بودن شرط هم درست است:

$$3+5+5+8+5+5 = (1+1+1)(2+3+5)$$

$$(30 = 3 \times 10)$$

بنابراین: $(x^2 + x + 1)(2x^3 + 3x^2 + 5)$. به جز این، f بخشیاب‌های مثبت دیگری ندارد.

مثال ۳. این چندجمله‌ای را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

$$f = x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20$$

این چندجمله‌ای مثبت نیست. ولی با ضرب آن در ۱− و تبدیل x به x−، به چندجمله‌ای مثبت تبدیل می‌شود. درنتیجه به این چندجمله‌ای می‌رسیم:

$$g = x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20$$

برای تجزیه‌ی این چندجمله‌ای به صورت ضرب عامل‌های خود، می‌توان از دو روش استفاده کرد: نخست می‌توان m = ۱۰۰ گرفت (باید در نظر داشت، به عنوان m بهتر است از 10^k استفاده کنیم که ساده‌تر می‌توان آن را به مبنای ده تبدیل کرد). پس از اندکی محاسبه، می‌توانیم برای عدد:

$$g(100) = 10513222720$$

این تجزیه را پیدا کنیم:

$$g(100) = 10304 \times 1020305$$

برای این که به دستگاه عددشماری با مبنای ۱۰۰ بپردازیم، کافی است این عددها را از راست به چپ به «مرزهای» دورقمی تقسیم کنیم:

$$1,05,13,22,27,20 = 1,03,04 \times 1,02,03,05$$

شرط کافی را آزمایش می‌کنیم:

$$(1+05+13+22+27+20)$$
$$= (1+03+04)(1+02+03+05)$$
$$(88 = 8 \times 11)$$

بنابراین:

$$x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20$$
$$= (x^2 + 3x + 4)(x^3 + 2x^2 + 3x + 5)$$

و درنتیجه:

$$x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20$$
$$= (x^2 - 3x + 4)(x^3 - 2x^2 + 3x - 5)$$

اگر بخواهیم از عددهای بزرگ پرهیز کنیم، می‌توان m را عدد کوچک‌تری گرفت. برای نمونه می‌توان فرض کرد m = ۳۰. در این صورت خواهیم داشت:

$$g(30) = 28721630 = 2 \times 5 \times 7 \times 71 \times 5779$$

بدون زحمت روشن می‌شود که چندجمله‌ای g بخشیاب‌های درجه‌ی اول ندارد. بنابراین برای عدد g(۳۰) باید بخشیاب‌های متمم بزرگ‌تر از عدد $۳۰^۲$، یعنی ۹۰۰ را انتخاب کرد. این زوج بخشیاب‌ها وجود دارند. به سادگی روشن می‌شود که تنها سه تا هستند:

$$g(30) = 5779 \times 4970$$
$$= 11558 \times 2485$$
$$= 28895 \times 994$$

شرط لازم (۶) را آزمایش می‌کنیم. یادآور می‌شویم، رقم سمت راست A(a) از عدد a در دستگاه عددشماری با مبنای ۳۰ برابر است با باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۳۰ (روشن است که این یادآوری جنبه‌ی کلی دارد)، و با انجام این تقسیم خیلی زود به دست می‌آوریم:

$$A(5779) = 19,\ \ A(4970) = 20,$$
$$A(11558) = 8,\ \ A(2485) = 25,$$
$$A(28895) = 15,\ \ A(994) = 4,$$
$$A(28721630) = 20$$

شرط (۶)، تنها برای زوج سوم صادق است. برای این زوج، شرط کافی (۷) را آزمایش می‌کنیم. عددهای ۲۸۸۹۵ و ۹۹۴ را در دستگاه عددشماری به مبنای ۳۰ قرار می‌دهیم و به دست می‌آید:

$$28895 = (1235)_{30}$$
$$994 = (134)_{30}$$

بنابراین:

$$\sigma(28895) = 11$$
$$\sigma(994) = 8$$

در عین حال، عدد $\sigma([g])$ برابر است با مجموع ضریب‌های چندجمله‌ای g، یعنی ۸۸. به این ترتیب، شرط (۷) هم صادق است و درنتیجه:

$$g = (x^3 + 2x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 4)$$

و دوباره به همان تجزیه حالت پیش می‌رسیم.

تعیین نوع مقطع مخروطی

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

● حسین کریمی

در کتاب هندسه‌ی تحلیلی و جبر خطی پیش‌دانشگاهی دیدیم که معادله‌ی هر مقطع مخروطی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

اگر $b^2 - 4ac > 0$ ، آن‌گاه مکان عبارت است از دو خط متقاطع و یا هذلولی.

اگر $b^2 - 4ac < 0$ ، آن‌گاه مکان عبارت است از تهی، نقطه، دایره و یا بیضی.

اگر $b^2 - 4ac = 0$ ، آن‌گاه مکان عبارت است از تهی، خط، دو خط موازی، کل صفحه و یا سهمی.

حال می‌خواهیم با توجه به علامت $b^2 - 4ac$ و وضعیت مرکز تقارن، نوع مکان را دقیقاً مشخص کنیم. برای این منظور، ابتدا به نکات زیر توجه می‌کنیم:

نکته‌ی ۱: اگر $b \neq 0$ ، آن‌گاه مکان نه دایره است و نه کل صفحه.

نکته‌ی ۲: اگر K نقطه‌ای دلخواه از مکان باشد و قرینه‌ی K نسبت به A، نقطه‌ای از همان مکان، آن‌گاه نقطه‌ی A مرکز تقارن آن مکان خواهد بود.

نکته‌ی ۳: نقطه‌ی $A(\alpha = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}, \beta = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac})$ مرکز تقارن $f(x,y) = 0$ است که البته با انجام محاسباتی کمی خسته کننده، می‌توان درستی آن را تحقیق کرد. یعنی می‌توان نشان داد: $f(2\alpha - x, 2\beta - y) = f(x,y)$ بدیهی است که $b^2 - 4ac \neq 0$ فرض شده است.

نکته‌ی ۴: اگر دو خط $\Delta : f'_x = 0$ و $\Delta' : f'_y = 0$ به موازات هم نباشند، $(\Delta' : bx + 2cy + e = 0 , \Delta : 2ax + by + d = 0)$ یعنی $b^2 - 4ac \neq 0$ ، نقطه‌ی تلاقی آن‌ها همان نقطه‌ی A (که در نکته‌ی ۳ قید شد) است.

نکته‌ی ۵: اگر دو خط $\Delta : f'_x = 0$ و $\Delta' : f'_y = 0$ به موازات هم باشند $(b^2 - 4ac = 0)$ نقطه‌ی منحصر به فرد A به عنوان مرکز تقارن وجود نخواهد داشت. در این صورت یکی از دو وضعیت زیر را داریم:

I) اگر $\Delta' \neq \Delta$ ، آن‌گاه مکان فاقد مرکز تقارن خواهد بود.

II) اگر $\Delta' = \Delta$ ، آن‌گاه مکان بی‌شمار مرکز تقارن خواهد داشت که هر نقطه از خط Δ را می‌توان به عنوان مرکز تقارن برای مکان در نظر گرفت.

نکته‌ی ۶: نقطه، دو خط متقاطع، هذلولی و بیضی، یک مرکز تقارن دارند. تهی، یک خط و دو خط موازی، دارای بی‌شمار مرکز تقارن هستند. در مورد تهی، به انتفای مقدم در ترکیب شرطی نکته‌ی ۲ استناد می‌کنیم. در مورد یک خط، هر نقطه‌ی واقع بر آن، مرکز تقارن محسوب می‌شود. در مورد دو خط موازی، هر نقطه‌ی واقع بر خطی که موازی با آن دو و به یک فاصله از آن دو خط باشد را به عنوان مرکز تقارن می‌پذیریم. و بدیهی است که سهمی فاقد مرکز تقارن است.

اکنون نوع مکان‌ها را به طور دقیق معرفی می‌کنیم:

حالت اول. اگر $b^2-4ac>0$ و $f(\alpha,\beta)=0$، آن‌گاه مکان، دو خط متقاطع است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن روی دو خط متقاطع واقع است.

مثال۱: نوع مکان هندسی به معادله‌ی $f(x,y)=10x^2+13xy-3y^2+7x+19y-6=0$ را تعیین کنید.

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}20x+13y+7=0\\ 13x-6y+19=0\end{cases}\Rightarrow A(-1,1)$$

$$b^2-4ac=289>0$$

$$f(-1,1)=10-13-3-7+19-6=0$$

در نتیجه مکان دو خط متقاطع است.

حالت دوم. اگر $b^2-4ac>0$ و $f(\alpha,\beta)\neq 0$، آن‌گاه مکان یک هذلولی است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن بر هذلولی واقع نیست و روی مکان قرار ندارد.

مثال۲: نوع مکان هندسی به معادله‌ی $f(x,y)=12x^2-5xy-3y^2-73x-20y+16=0$ را تعیین کنید.

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}24x-5y-73=0\\ -5x-6y-20=0\end{cases}\Rightarrow A(2,-5)$$

$$b^2-4ac=169>0$$

$$f(2,-5)=48+50-75-146+100+16=-7\neq 0$$

در نتیجه مکان یک هذلولی است.

حالت سوم. اگر $b^2-4ac<0$ و $f(\alpha,\beta)<0$، آن‌گاه مکان یک بیضی است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن درون منحنی است.

مثال۳: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=3x^2+7xy+5y^2-20x-27y+11=0$$

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}6x+7y-20=0\\ 7x+10y-27=0\end{cases}\Rightarrow A(1,2)$$

$$b^2-4ac=-11<0$$

$$f(1,2)=3+14+20-20-54+11=-26<0$$

در نتیجه مکان یک بیضی است.

حالت چهارم. اگر $b^2-4ac<0$ و $f(\alpha,\beta)=0$، آن‌گاه مکان یک نقطه است؛ چرا که در این حالت، مرکز تقارن روی مکان واقع است و مکان همان نقطه‌ی A است.

مثال۴: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=5x^2+10xy+25y^2-10x+70y+85=0$$

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}10x+10y-10=0\\ 10x+50y+70=0\end{cases}\Rightarrow A(3,-2)$$

$$b^2-4ac=-400<0$$

$$f(3,-2)=45-60+100-30-140+85=0$$

در نتیجه مکان همان نقطه‌ی $A(3,-2)$ است.

حالت پنجم. اگر $b^2-4ac<0$ و $f(\alpha,\beta)>0$، آن‌گاه مکان تهی است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن خارج مکان واقع است.

مثال۵: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=13x^2+26xy+26y^2+26x+78y+66=0$$

حل:

$$A:\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}26x+26y+26=0\\ 26x+52y+78=0\end{cases}\Rightarrow A(1,-2)$$

$$b^2-4ac=-676<0$$

$$f(1,-2)=13-56+104+26-156+66=1>0$$

در نتیجه مکان تهی است.

حالت ششم. اگر $b^2-4ac=0$ و $\Delta\neq\Delta'$، آن‌گاه مکان یک سهمی است؛ چرا که در این حالت دو خط متمایز و موازی Δ و Δ' را داریم که فاقد نقطه‌ی مشترکند. یعنی نقطه‌ی A به عنوان مرکز تقارن وجود ندارد و می‌دانیم که سهمی نیز فاقد مرکز تقارن است.

مثال۶: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$$f(x,y)=4x^2+4xy+y^2-x+7y+11=0$$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x=0\\ \Delta': f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta: 8x+4y-1=0\\ \Delta': 4x+2y+7=0\end{cases}$$

$$b^2-4ac=16-16=0$$

$\Delta\parallel\Delta'\ ,\ \Delta\neq\Delta'\Rightarrow$ مکان یک سهمی است

حالت هفتم. اگر $b^2-4ac=0$ و $\Delta=\Delta'$ و $f(x_B,y_B)>0$ که در آن B نقطه‌ی دلخواهی از Δ است، آن‌گاه مکان تهی

است؛ چرا که در این حالت مرکز تقارن خارج مکان واقع است.

مثال۷: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$f(x,y) = x^۲ + ۶xy + ۹y^۲ + ۴x + ۱۲y + ۷ = ۰$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x = ۰ \\ \Delta': f'_y = ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta: ۲x + ۶y + ۴ = ۰ \\ \Delta': ۶x + ۱۸y + ۱۲ = ۰\end{cases} \Rightarrow \Delta = \Delta'$$

و $B(۱,-۱) \in \Delta$

$b^۲ - ۴ac = ۳۶ - ۳۶ = ۰$

مکان تهی است $\Leftarrow ۰ < ۳ = ۷ + ۱۲ - ۴ + ۹ + ۶ - ۱ = f(۱,-۱)$

حالت هشتم. اگر $b^۲ - ۴ac = ۰$ و $\Delta = \Delta'$ و $f(x_B, y_B) = ۰$ که در آن B نقطه‌ی دلخواهی از Δ است، آن‌گاه مکان یک خط است که همان خط Δ است.

مثال ۸: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$f(x,y) = ۹x^۲ + ۱۲xy + ۴y^۲ - ۳۰x - ۲۰y + ۲۵ = ۰$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x = ۰ \\ \Delta': f'_y = ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta: ۱۸x + ۱۲y - ۳۰ = ۰ \\ \Delta': ۱۲x + ۸y + ۲۰ = ۰\end{cases} \Rightarrow \Delta = \Delta'$$

و $B(۱,۱) \in \Delta$

$b^۲ - ۴ac = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰$

$f(۱,۱) = ۹ + ۱۲ + ۴ - ۳۰ - ۲۰ + ۲۵ = ۰ \Rightarrow \Delta: ۳x + ۲y = ۵$

در نتیجه مکان یک خط است.

حالت نهم. اگر $b^۲ - ۴ac = ۰$ و $\Delta = \Delta'$ و $f(x_B, y_B) < ۰$ که در آن B نقطه‌ی دلخواهی از Δ است، آن‌گاه مکان دو خط موازی است؛ چرا که در این حالت تمام مرکز تقارن‌ها (واقع بر Δ) در ناحیه‌ی بین دو خط موازی و به یک فاصله از آن دو خط واقعند.

مثال۹: نوع مکان هندسی به معادله‌ی زیر را تعیین کنید.

$f(x,y) = ۴x^۲ - ۱۲xy + ۹y^۲ - ۱۲x + ۱۸y - ۷ = ۰$

حل:

$$\begin{cases}\Delta: f'_x = ۰ \\ \Delta': f'_y = ۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta: ۸x - ۱۲y - ۱۲ = ۰ \\ \Delta': -۱۲x + ۱۸y + ۱۸ = ۰\end{cases} \Rightarrow \Delta = \Delta'$$

و $B(۰,-۱) \in \Delta$

$b^۲ - ۴ac = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰$

$f(۰,-۱) = ۰ - ۰ + ۹ - ۰ - ۱۸ - ۷ = -۱۶ < ۰$

در نتیجه مکان دو خط موازی است.

بررسی نکته‌ی ۴

می‌دانیم $f(x,y) = ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰$

مقدار $y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{۲ax + by + d}{bx + ۲cy + e}$ به ازای طول و عرض نقطه‌ی M واقع بر $f(x,y) = ۰$، نشاندهنده‌ی شیب خط مماس بر مکان است که از M رسم می‌شود. و نیز می‌دانیم، با شرط $b^۲ - ۴ac \neq ۰$، $f(x,y) = ۰$ دارای مرکز تقارن A است (نکته‌ی۳). پس اگر شیب خط مماس در نقطه‌ی M برابر با m باشد، نقطه‌ی دیگری مانند M' از $f(x,y) = ۰$ وجود دارد که شیب خط مماس در آن نقطه نیز برابر m است.

حال فرض کنیم M نقطه‌ای از مکان باشد، به‌طوری که خط مماس در آن نقطه به موازات محور xهاست $(y' = ۰)$ و M' را قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به A فرض می‌کنیم. پس در آن نقطه نیز شیب خط مماس برابر ۰ است و این بدین معنی است که مقادیر طول و عرض نقاط M و M' در معادله‌ی $۲ax + by + d = ۰$ و یا همان $f'_x = ۰$ صدق می‌کنند و چون A بین M و M' واقع است و در این‌جا $f'_x = ۰$ معرف یک خط است، پس $A \in f'_x = ۰$.

اکنون فرض کنیم N و به تبع آن N' نقاطی از $f(x,y) = ۰$ باشند که مماس بر مکان، در آن نقاط موازی محور yها باشد؛ یعنی به ازای طول و عرض آن نقاط، y' تعریف نشده باشد، یعنی $f'_y = ۰$. پس در صورت وجود N و N'، مقادیر طول و عرض آن نقاط در معادله‌ی $bx + ۲cy + d = ۰$ یعنی در $f'_y = ۰$ صدق می‌کند و چون A بین N و N' واقع است و در این‌جا $f'_y = ۰$ معرف یک خط است، پس $A \in f'_y = ۰$.

نتیجه: اگر $f'_x = ۰$ و $f'_y = ۰$ متقاطع باشند، از حل دستگاه $\begin{cases}\Delta: f'_x = ۰ \\ \Delta': f'_y = ۰\end{cases}$ می‌توان مختصات مرکز تقارن $f(x,y) = ۰$ را به‌دست آورد.

در واقع توجه شود که $f'_x = ۰$ معرف شیب خط مماس نیست، بلکه معرف چگونگی ارتباط بین طول و عرض نقاطی از $f(x,y) = ۰$ است که در آن نقاط، خط مماس بر مکان، موازی محور xهاست. به همین ترتیب، $f'_y = ۰$ معرف چگونگی ارتباط بین طول و عرض نقاطی از $f(x,y) = ۰$ است که در آن نقاط خط مماس بر مکان، موازی محور yهاست.

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

● میر شهرام صدر

۱. اگر داشته باشیم $M=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ مجموعه مرجع و $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{a,c,e,f\}$ و $C=\{a,b,e\}$، مطلوب است:

الف ـ مجموعه $(A\cup B)-(A\cap C)$ را بنویسید.

ب ـ درستی رابطه $A\cup(B\cap C)'=A\cup B'\cup C'$ را تحقیق کنید.

۲. مجموعه $A=\{3k-4 \mid 2\le k<5, k\in N\}$ را با تمام اعضایش مشخص کنید.

۳. ب.م.م دو عدد ۲۰۰ و ۱۹۶ چیست؟

۴. کسر متعارفی $0/12\overline{873}$ چیست؟

۵. نماد علمی اعداد زیر را بنویسید:

الف) 5823493×10^{3} ب) $0/000000721$

۶. تقسیم کنید.

$$(x^3+x^2+2yx^2+3yx+2y^2)+(x+2y)$$

۷. مقدار عبارت زیر را به ازای $a=1$ و $b=2$ و $c=3$ به‌دست آورید:

$$2a-c(b^2-a)$$

۸. جای خالی را پر کنید. $(2x-...)^2=...-20x+...$

۹. حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

الف) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

ب) $\dfrac{a+2}{a-3}+\dfrac{3}{a+2}$

۱۰. اگر $x-\dfrac{1}{x}=3$ حاصل عبارت $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ چیست؟

۱۱. تجزیه کنید.

الف) $12x^2+10x-8$

ب) $(x+2)^2-6x(x+2)-7$

ج) x^5+x^4+1

۱۲. دامنه عبارت گویای زیر چیست؟

$$\frac{x-5}{x^3-36x}$$

۱۳. عبارت زیر را خلاصه کنید.

$$\frac{\dfrac{x^2+y^2}{xy}+2}{\dfrac{x^2-y^2}{2xy}}$$

---

۱. این عبارت را تعیین علامت کنید:

$$p=\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x-1}$$

۲. حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی درجه دوم زیر دارای ریشه‌ی مضاعف باشد:

$$x^2+2mx+2m=0$$

۳. حدود k را چنان تعیین کنید که عبارت درجه دوم داده شده همواره منفی باشد:

$$p=(2k-4)x^2+4k-4$$

۴. نامعادله را حل کنید:

$$\frac{-x^2(-x^2+1)(x^2-3x+2)}{(x^2+1)(x^3-1)(x^2-3x)}\ge 0$$

۵. معادله را حل کنید:

$$\frac{x^2-1}{x-2}-\frac{x}{x+2}=\frac{x^3}{x^2-4}$$

۶. این معادله‌ی اصم را حل کنید:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=1$$

۷. اگر $\sqrt{3}$ ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم زیر باشد، مقدار k را بیابید:

$$kx^2-\sqrt{3}x-6=0$$

۸. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\ge 1\\ x+1 & x<1\end{cases}$$

الف) برد تابع را بیابید.

ب) نسبت $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را در بازه‌ی (۱ و ۳-) بیابید.

ج) ابتدا ضابطه‌ی تابع fof را بیابید و سپس دامنه‌ی آن را تعیین کنید.

د) یک به یکی و پوشایی تابع f را بررسی کنید.

هـ) آیا تابع در بازه‌ی $[1,+\infty)$ معکوس‌پذیر است؟ در صورت معکوس‌پذیری، ضابطه‌ی تابع معکوس f^{-1} را بیابید.

۹. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطه‌ی زیر، همواره بالای محور xها واقع است؟

$$y=(m-2)x^2+\sqrt{3}x+m-1$$

۱۰. از رابطه‌ی زیر f(x) را بیابید و مشخص کنید تابع f زوج است یا فرد؟

$$x^2f(x)+3f(-x)=4x^4$$

ریاضیات ۲

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

هندسه‌ی ۱

● هوشنگ شرقی

۱ . به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید :

الف) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث مساوی 180° است .

ب) مجموع سه زاویه‌ی خارجی هر مثلث برابر 360° است .

۲ . ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و برعکس (یعنی هر چهار ضلعی که قطرهای آن همدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است) .

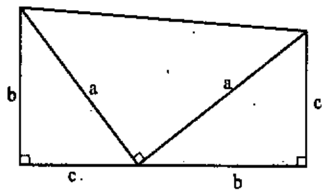
۳ . ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور به دو ساق با یکدیگر برابرند .

۴ . ثابت کنید مساحت هر لوزی برابر با نصف حاصل ضرب دو قطر آن است و سپس به کمک این موضوع ثابت کنید، در هر مربع طول قطر $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع مربع است .

۵ . در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C با یکدیگر زاویه‌ی 110° ساخته‌اند . اندازه‌ی زاویه‌ی A را به‌دست آورید .

۶ . ثابت کنید هر مثلثی که در آن نیمساز زاویه‌ی خارجی یک رأس موازی ضلع مقابل به آن رأس باشد، مثلث متساوی‌الساقین است .

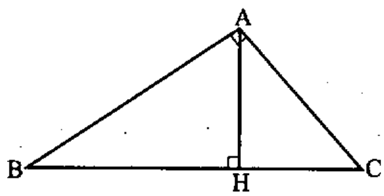
۷ . در شکل ذیل به کمک مساحت‌ها، قضیه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه ثابت کنید .



۸ . در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ثابت کنید :

الف) $AC^2 = BC.CH$

ب) $AH^2 = BH.CH$



۹ . ثابت کنید مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۱۰ . در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ، میانه‌های BM و CN را رسم می‌کنیم . ثابت کنید :

$$BM^2 + CN^2 = \frac{5}{4}BC^2$$

---

۱ . دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی زیر را بیابید؟

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{8 - x^2}}$$

۲ . نشان دهید تابع با ضابطه‌ی زیر، تابعی زوج است .

$$f(x) = \left[\frac{1}{1+x}\right] + \left[\frac{3-2x}{1-x}\right]$$

۳ . اگر f تابعی یک به یک باشد و $g(x) = \frac{2+f(x)}{2-f(x)}$ ، آن‌گاه ضابطه‌ی $g^{-1}(x)$ را بیابید .

۴ . اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 2(\sqrt{2}+1)x^2 + (4\sqrt{2}+1)x - 2$ باشد، صفرهای دیگر تابع را بیابید .

۵ . اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع کند و $M(2,-6)$ می‌نیمم نسبی تابع باشد، a ، b و c را بیابید .

۶ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 5x - 2$ ، اگر $x \to 1^+$ ، آن‌گاه $f(x) \to 3$. اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{20}$ ، آن‌گاه حدود x را بیابید .

۷ . اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + m = 0$ باشند و داشته باشیم: $\alpha^2 + \beta^2 = 29$ ، مقدار عددی $(\alpha^3 + \beta^3)$ را بیابید .

۸ . از رابطه‌ی زیر مقدار عددی x را بیابید .

$$\tan 135^\circ - \cos 330^\circ = x \sin 120^\circ \cot 240^\circ$$

۹ . مطلوب است محاسبه‌ی :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{\sqrt{3x+1} - 2}$$

مسأله‌ی ۱۰ . اگر $x = 1$ و $x = \frac{5}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$ معادله‌های مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{cx^2 - 14x + d}$ باشند، a ، b و c را بیابید .

حسابان ۱

● احمد قندهاری

جبر و احتمال

● هوشنگ شرقی

۱ . به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، درستی روابط زیر را برای هر عدد طبیعی n اثبات کنید:

الف) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

ب) $n \geq 2: \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$

ج) $n^3-n=6r \quad (r \in z)$

۲ . اولاً، با استدلال استنتاجی ثابت کنید، حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی است گویا. ثانیاً، نشان دهید حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیرصفر در هر عدد گنگ، عددی است گنگ. ثالثاً، با یک مثال نقض بررسی کنید که آیا حاصل‌ضرب دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است یا خیر.

۳ . به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید:

$(a^4+b^4)(a^5+b^5) \leq 2(a^9+b^9)$

(a و b عددهای حقیقی و مثبت هستند.)

۴ . S یک مجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. ثابت کنید، اگر اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، لااقل ۴ عضو دارای یک باقی مانده‌اند. حداقل تعداد اعضای S چه قدر باشد تا بتوان گفت، لااقل شش عضو دارای یک باقی مانده‌اند؟

۵ . x و y و z را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$\{x+y, x-y, 3\}=\{2, z\}$

۱ . مکان هندسی نقطه‌ای در فضا را که از یک پاره‌خط به فاصله‌ی ۴ باشد، به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید و بیان کنید.

۲ . در مثلث ABC سه میانه‌ی AM، BN و CP در نقطه‌ی G هم‌رأس هستند. ثابت کنید:

$AM+BN+CP > \frac{3}{4}(AB+AC+BC)$

۳ . از مثلث ABC ضلع BC=a و ارتفاع $AH=h_a$ و BC+AC=a+b معلوم هستند. مثلث را رسم کنید.

۴ . مثلثی را با معلوم بودن یک ضلع و دو ارتفاع نظیر دو ضلع دیگر رسم کنید.

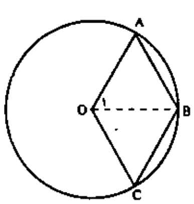
۵ . نقطه‌ی D را به دلخواه درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید محیط PDK از محیط PAK کوچک‌تر است.

۶ . اگر زاویه‌ی بین دو قطر AC و BD از چهارضلعی دلخواه ABCD را α فرض کنیم، ثابت کنید مساحت ABCD برابر است با: $S=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

۷ . دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که بر خط معلوم (D) و دایره‌ی مفروض (C′) مماس شود. مسأله چند جواب دارد؟

۸ . از مثلث ABC، ضلع BC=8 و زاویه‌ی $A=60^\circ$ و ارتفاع AH=3 داده شده است. اولاً مثلث را رسم کنید. ثانیاً فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث را تا ضلع BC به‌دست آورید.

۹ . در شکل، OABC یک متوازی‌الاضلاع است. اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟



۱۰ . ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی به قاعده‌های ۲ و ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. مساحت دایره‌ی محیطی آن را تعیین کنید.

هندسه ی ۲

● حسین کریمی

پاسخ تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱. الف) $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\},\ A\cap C=\{a,b,e\}$

$(A\cup B)-(A\cap C)=\{c,d,f\}$

ب) $B\cap C=\{a,e\}\Rightarrow (B\cap C)'=\{b,c,d,f,g\}$

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)'=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ (۱)

$B'=\{b,d,g\},\ C'=\{c,d,f,g\}$

$\Rightarrow A\cup B'\cup C'=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ (۲)

$(1)=(2)\Rightarrow A\cup(B\cap C)'=A\cup B'\cup C'$

۲. $2\le k<5,\ k\in N\Rightarrow k=2,3,4$

$A=\{3\times2-4,\ 3\times3-4,\ 3\times4-4\}\Rightarrow A=\{2,5,8\}$

۳. $\left.\begin{matrix}196=2^2\times7^2\\ 200=2^3\times5^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow(196,200)=2^2=4$

۴. $x=0/12873873\cdots$

$\Rightarrow 10^2\times x=10^2\times 0/12873873\cdots$

$\Rightarrow 100x=12/873873\cdots$

$\Rightarrow 10^3\times100x=10^3\times12/873873\cdots$

$\Rightarrow 100000x=12873/873873\cdots$

$100000x-100x=12873/873873\cdots-12/873873\cdots$

$99900x=12861\Rightarrow x=\frac{12861}{99900}$

$x=\frac{1429}{11100}$

۵. الف) $5823493\times10^3=5/823493\times10^6\times10^3$

$=5/823493\times10^9$

ب) $0/000000721=7/21\times10^{-7}$

۶.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2+2yx^2+3yx+2y^2 & x+2y \\ \hline -x^3-2yx^2 & x^2+x+y \\ x^2+3yx+2y^2 & \\ -x^2-2yx & \\ yx+2y^2 & \\ -yx-2y^2 & \\ 0 & \end{array}$$

۷. $2a-c(b^2-a)=2\times1-3((2)^2-1)=2-3(4-1)$

$=2-9=-7$

۸. $(2x-5)^2=4x^2-20x+25$

۹. الف) $[(1-x)(1+x)](1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

$=[(1-x^2)(1+x^2)](1+x^4)(1+x^8)$

$=[(1-x^4)(1+x^4)](1+x^8)$

$=(1-x^8)(1+x^8)=1-x^{16}$

ب) $\frac{a+2}{a-3}+\frac{3}{a+2}=\frac{(a+2)^2+3(a-3)}{(a-3)(a+2)}$

$=\frac{a^2+4a+4+3a-9}{(a-3)(a+2)}=\frac{a^2+7a-5}{(a-3)(a+2)}$

۱۰.

$(x^3-\frac{1}{x^3})=(x-\frac{1}{x})^3-3(x-\frac{1}{x})=3^3-3\times3=18$

۱۱. الف) $A=12x^2+10x-8$

$\Rightarrow 12A=12(12x^2+10x-8)$

$\Rightarrow 12A=144x^2+10(12x)-96$

$\Rightarrow 12A=(12x+16)(12x-6)$

$\Rightarrow 12A=4(3x+4)\times3(4x-2)$

$\Rightarrow 12A=12(3x+4)(4x-2)$

$\Rightarrow A=(3x+4)(4x-2)$

ب) $(x+2)^3-6x(x+2)-7$

$=x^3+6x^2+12x+8-6x^2-12x-7=x^3+1$

$=(x+1)(x^2-x+1)$

ج) $x^5+x^4+1=x^5+x^4+1+x^6-x^6$

$=(x^6+x^5+x^4)+(x^6-1)$

$=x^4(x^2+x+1)-(x^3-1)(x^3+1)$

$=x^4(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$

$=(x^2+x+1)(x^4-(x-1)(x^3+1))$

$=(x^2+x+1)(x^4-x^4-x+x^3+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

۱۲. $x^3-36x=0\Rightarrow x(x^2-36)=0\Rightarrow x=0$ یا $x^2-36=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $(x-6)(x+6)=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=6$ یا $x=-6\Rightarrow D=R-\{-6,0,6\}$

۱۳.

$\frac{\frac{x^2+y^2}{xy}+2}{\frac{x^2-y^2}{2xy}}=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}\div\frac{x^2-y^2}{2xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}\times\frac{2xy}{x^2-y^2}$

$=\frac{(x+y)^2}{xy}\times\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}=\frac{2(x+y)}{(x-y)}$

۱. $p = \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1} = \frac{3(x-1) - 4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x-7}{x^2-1}$

$-x-7=0 \,;\; x=-7$ و $x^2-1=0 \,;\; x^2=1 \,;\; x=\pm 1$

x		-7		-1		1	
$-x-7$	+	0	−		−		−
x^2-1	+		+	0	−	0	+
P	+	$P=0$	−	نامعین	+	نامعین	−

$x < -7 : p > 0 \,;\; -7 < x < -1 : p < 0 \,;\; x \neq \pm 1$

$-1 < x < 1 : p > 0 \,;\; x > 1 : p < 0 \,;\; x = -7 : p = 0$

۲. معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی ریشه‌ی مضاعف دارد که مبین آن صفر شود:

$x^2 + 2mx + 2m = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \,;\; \Delta = (2m)^2 - 4(1)(2m) = 0 \,;$

$4m^2 - 8m = 0 \,;\; 4m(m-2) = 0 \,;\; \boxed{m=0 \text{ یا } m=2}$

۳. عبارت درجه دوم $p = ax^2 + bx + c$ وقتی همواره منفی است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

$a = 2k - 4 < 0 \,;\; 2k < 4 \,;\; k < 2$ و

$\Delta = (4)^2 - 4(2k-4)(4k-4) < 0$

$16 - 32(k-2)(k-1) < 0 \,;\; 1 - 2(k^2 - 3k + 2) < 0 \,;$

$2k^2 - 6k + 3 > 0$

در این جا باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} k < 2 \\ 2k^2 - 6k + 3 > 0 \end{cases}$$

$2k^2 - 6k + 3 = 0 \,;\; k = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

$\frac{3-\sqrt{3}}{2} < k < \frac{3+\sqrt{3}}{2} : 2k^2 - 6k + 3 < 0$

$k < \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ یا $k > \frac{3+\sqrt{3}}{2} : 2k^2 - 6k + 3 > 0$

با توجه به $k < 2$، جواب مسأله $k < \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ است.

۴. برای حل نامعادله کافی است این عبارت را تعیین علامت کنیم:

$p = \frac{-x^2(-x^2+1)(x^2-3x+2)}{(x^2+1)(x^3-1)(x^2-3x)}$

$-x^2 = 0 \,;\; x = 0$ (ریشه‌ی مضاعف) و $-x^2 + 1 = 0 \,;\; x^2 = 1 \,;\; x = \pm 1$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \,;\; (x-1)(x-2) = 0 \,;\; x = 1$ یا $x = 2$

$x^2 - 3x = 0 \,;\; x(x-3) = 0 \,;\; x = 0$ یا $x = 3$

$x^3 - 1 = 0 \,;\; x^3 = 1 \,;\; x = 1$ و $x^2 + 1 = 0$ (ریشه‌ی حقیقی ندارد)

x		-1		0		1		2		3	
$-x^2$	−		−	0	−		−		−		−
$-x^2+1$	−	0	+		+	0	−		−		−
x^2-3x+2	+		+		+	0	−	0	+		+
x^2-3x	+		+	0	−		−		−	0	+
x^3-1	−		−		−	0	+		+		+
x^2+1	+		+		+		+		+		+
$P>0$	−	$P=0$	+	نامعین	−	نامعین	+	$P=0$	−	نامعین	+

$\{x | x > 3 \,,\; 1 < x \leq 2 \,,\; -1 \leq x < 0\} =$ مجموعه جواب نامعادله

۵. ابتدا حوزه‌ی تعریف معادله را تعیین می‌کنیم:

$x^2 - 4 \neq 0 \,;\; x^2 \neq 4 \,;\; x \neq \pm 2$ (حوزه‌ی تعریف معادله) $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\frac{x^2-1}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{x^3}{x^2-4}$

$\Rightarrow \frac{(x^2-1)(x+2) - x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^3}{x^2-4}$

$x \neq \pm 2 : (x^2-1)(x+2) - x^2 + 2x = x^3 \,;$

$x^3 + 2x^2 - x - 2 - x^2 + 2x = x^3 \,;\; x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0 \,;\; x = 1$ یا $x = -2 \notin D \,;\; \boxed{\text{جواب: } x=1}$

۶. ابتدا حوزه‌ی تعریف معادله را تعیین می‌کنیم:

$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 4 \end{cases} ;$ (حوزه‌ی تعریف معادله) $D = \{x | x \geq 4\}$

$\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = 1 \,;\; \sqrt{x-3} = 1 - \sqrt{x-4}$

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$x - 3 = (1 - \sqrt{x-4})^2 \,;\; x - 3 = 1 + x - 4 - 2\sqrt{x-4}$

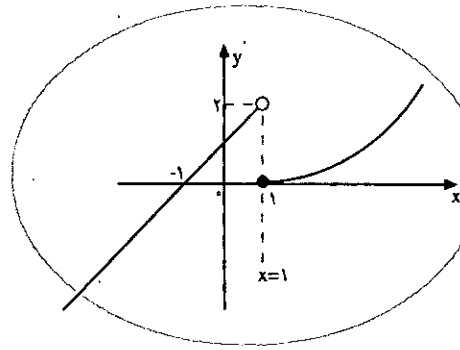
$-2\sqrt{x-4} = 0 \,;\; \boxed{\text{جواب: } x=4}$

۷. چون $x = \sqrt{3}$ ریشه‌ی معادله است، بنابراین در معادله صادق است:

$x = \sqrt{3} : kx^2 - \sqrt{3}x - 6 = 0 \,;\; k(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3}) - 6 = 0$

$3k - 3 - 6 = 0 \,;\; 3k = 9 \,;\; \boxed{\text{جواب: } k=3}$

۸. الف) برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ x+1 & x < 1 \end{cases}$ برابر $R_f = \mathbb{R}$ است، زیرا با توجه به نمودار تابع، بسیار بدیهی است:



ب) نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در بازه‌ی (۱ و ۳-):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)+۱-(x+۱)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=۱$$

ج) ضابطه‌ی fof را تعیین می‌کنیم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=\begin{cases}\sqrt{\sqrt{x-۱}-۱} & x\geq ۱\\ (x+۱)+۱ & x<۱\end{cases}$$

بنابراین:

$$(fof)(x)=\begin{cases}\sqrt{\sqrt{x-۱}-۱} & x\geq ۱\\ x+۲ & x<۱\end{cases}$$

با توجه به ضابطه، دامنه‌ی تعریف تابع fof مجموعه‌ی اعداد حقیقی است:

$D_{fof}=\mathbb{R}$

د) با توجه به نمودار تابع، بدیهی است که تابع f پوشاست (زیرا برد تابع $\mathbb{R}$ است)، ولی یک به یک نیست؛ زیرا اگر مثلاً خط $y=۱$ را با تابع قطع دهیم، این خط نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

هـ) با توجه به نمودار تابع، بدیهی است که تابع در بازه‌ی $[۱,+\infty)$ یک به یک و درنتیجه معکوس‌پذیر است و ضابطه‌ی معکوس آن چنین است:

$x\geq ۱: y=\sqrt{x-۱}\ ;\ y^۲=x-۱\ ;\ x=y^۲+۱\ ;$

$f^{-۱}(x)=x^۲+۱$

۹. این مسأله معادل است با این‌که در تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ پارامترها را چنان تعیین کنیم که y همیشه مثبت باشد:

$$y=(m-۲)x^۲+\sqrt{۳}x+m-۱$$

$$\begin{cases}a>۰\\ \Delta=b^۲-۴ac<۰\end{cases};\ \begin{cases}a=m-۲>۰\\ \Delta=(\sqrt{۳})^۲-۴(m-۲)(m-۱)<۰\end{cases};$$

$$\begin{cases}m>۲\\ ۳-۴(m^۲-۳m+۲)<۰\end{cases};\ -۴m^۲+۱۲m-۸+۳<۰\ ;$$

$$-۴m^۲+۱۲m-۵<۰\ ;\ -۴m^۲+۱۲m-۵=۰\ ;\ m=\frac{-۶\pm\sqrt{۱۶}}{-۴}$$

$$m=\frac{-۶\pm ۴}{-۴}\ ;\ m_۱=\frac{۵}{۲}\ ,\ m_۲=\frac{۱}{۲}\ ;\ m>\frac{۵}{۲}\ \text{یا}\ m<\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}m>۲\\ m<\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ m>\frac{۵}{۲}\end{cases};\ \boxed{\text{جواب: } m>\frac{۵}{۲}}$$

۱۰. در رابطه‌ی مفروض، x را به x- تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} x^۲\times \begin{cases}x^۲f(x)+۳f(-x)=۴x^۴\\ -۳\times\ x^۲f(-x)+۳f(x)=۴x^۴\end{cases}\\ \hline x^۴f(x)-۹f(x)=۴x^۶-۱۲x^۴\\ (x^۴-۹)f(x)=۴x^۴(x^۲-۳)\end{array}$$

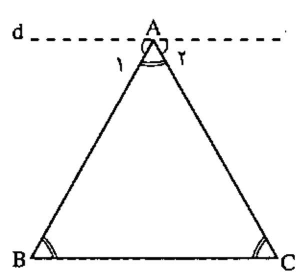
$$x\neq\pm\sqrt{۳}: f(x)=\frac{۴x^۴(x^۲-۳)}{x^۴-۹}=\frac{۴x^۴}{x^۲+۳}$$

با توجه به $f(-x)=f(x)$، تابع $f(x)$ زوج است.

هندسه‌ی ۱

۱.

الف) خط راست d را از A موازی BC رسم می‌کنیم. به کمک قضیه‌ی خطوط موازی و مورب می‌توان نوشت:

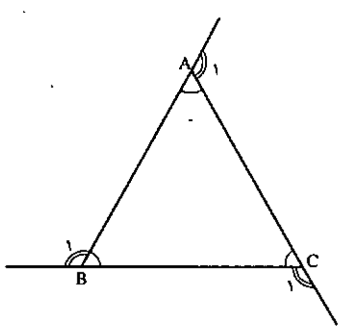


$$\left.\begin{array}{l}d\parallel BC, \text{مورب } AB\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}\\ d\parallel BC, \text{مورب } AC\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\hat{B}+\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

ب)

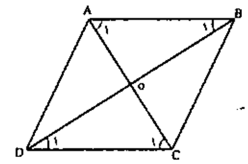


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{A}\\ \hat{B}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{B}\\ \hat{C}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=$$

$$(۱۸۰^\circ-\hat{A})+(۱۸۰^\circ-\hat{B})+(۱۸۰^\circ-\hat{C})$$

$$=۵۴۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})=۵۴۰^\circ-۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

۲.



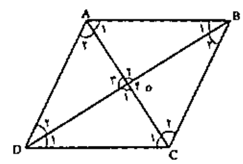
فرض	ABCD متوازی‌الاضلاع است
حکم	$OA = OC$ و $OB = OD$

اثبات:

$AB \parallel CD$، مورب $BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

$AB \parallel CD$، مورب $AC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$

(ز ض ز)
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1, \hat{B}_1 = \hat{D}_1, AB = CD \Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD$
$\Rightarrow OA = OC, OB = OD$



فرض	$OA = OC$ و $OB = OD$
حکم	ABCD متوازی‌الاضلاع است

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD$$ (ض ز ض)

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$ مورب و $AC \Rightarrow AB \parallel CD$ (۱)

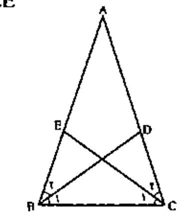
$OA = OC, OB = OD, \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \Delta OAD \cong \Delta OBC$
(ض‌ز‌ض)

$\Rightarrow \angle A_2 = \angle C_2$ مورب و $AC \Rightarrow AD \parallel BC$ (۲)

ABCD متوازی‌الاضلاع است. $\Leftarrow$ (۲) و (۱)

۳.

فرض	$AB = AC, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2$
حکم	$BD = CE$



اثبات:

$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow$

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2$

$\hat{B}_1 = \hat{C}_1, \hat{B} = \hat{C}, BC = BC \Rightarrow \Delta BCE \cong \Delta BCD$ (ز‌ض‌ز)

$\Rightarrow BD = CE$

۴. از چهار رأس لوزی، خط‌های راستی موازی دو قطر رسم می‌کنیم تا چهار ضلعی MNPQ درست شود. چون قطرهای لوزی بر یکدیگر عمودند، پس MN و NP و PQ و QM نیز دو‌به‌دو بر هم عمودند و MNPQ مستطیل است. بنابراین مساحت این مستطیل برابر است با: $S = MN \times NP = BD \times AC$ از طرف دیگر چون قطر هر مستطیل آن را به دو مثلث هم‌نهشت تجزیه می‌کند، داریم:

$\Delta OAB \cong \Delta ANB, \Delta OAD \cong \Delta AMD, \Delta BOC \cong \Delta BDC,$
$\Delta COD \cong \Delta CQD \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ANB} + S_{BPC} + S_{QCD} + S_{AMD}$

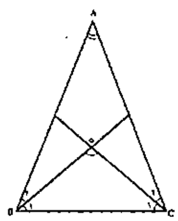
$$\Rightarrow S_{MNPQ} = 2S_{ABCD} = AC \times BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2}$$

۵.

$$\angle BOC = 110° \Rightarrow \angle B_1 + \angle C_1 = 180° - 110° = 70°$$

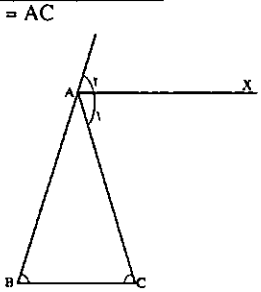
$$\Rightarrow \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 70° \Rightarrow \angle B + \angle C = 140°$$

$$\Rightarrow 180° - \hat{A} = 140° \Rightarrow \hat{A} = 40°$$



۶.

فرض	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, Ax \parallel BC$
حکم	$AB = AC$



اثبات:

$Ax \parallel BC$ و مورب $AC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$

$Ax \parallel BC$ و مورب $AB \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}$

$\hat{A}_1 = \hat{C}, \hat{A}_2 = \hat{B}, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$

۷. مساحت ذوزنقه را از دو راه به دست می‌آوریم: به کمک دستور مساحت ذوزنقه، و به کمک مجموع مساحت‌های سه مثلث قائم‌الزاویه. و آن‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{b+c}{2} \times (b+c) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{2} \quad (1)$$

$$S = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 + 2b^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \Rightarrow$$

$$b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

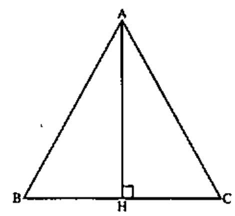
۸. الف:

$$\Delta ABH:\ AB^2 = AH^2 + BH^2 = AH^2 + (BC - CH)^2$$
$$= AH^2 + BC^2 + CH^2 - 2BC.CH$$
$$= \underbrace{(AH^2 + CH^2)}_{AC^2} + (BC^2 - 2BC.CH)$$
$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CH$$
$$= AC^2 + AB^2 + AC^2 - 2BC.CH$$
$$\Rightarrow AC^2 = BC.CH$$

ب:

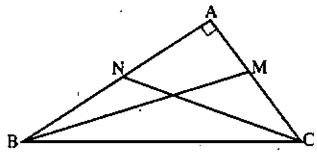
$$\Rightarrow 2AC^2 - 2BC.CH = 0 \Rightarrow AC^2 = BC.CH$$
$$\Delta ACH:\ AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2$$
$$= BC.CH - CH^2 = CH(\underbrace{BC - CH}_{BH}) = BH.CH$$

۹. می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع هر رأس، میانه هم است، بنابراین داریم:



$$BH = CH = \frac{a}{2}$$
$$\Rightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow$$
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right).a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

۱۰.



$$\left.\begin{aligned}\Delta ABM:&\ AB^2 + AM^2 = BM^2\\ \Delta ACN:&\ AC^2 + AN^2 = CN^2\end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow BM^2 + CN^2 = AB^2 + AM^2 + AC^2 + AN^2$$
$$= AB^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$
$$= \frac{AC^2}{4} + AC^2 + \frac{AB^2}{4} + AB^2 = \frac{5}{4}(\underbrace{AB^2 + AC^2}_{BC^2}) = \frac{5}{4}BC^2$$

حسابان

۱.

$$\begin{cases}8 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}\\ 2 \geq \sqrt{8 - x^2} \Rightarrow 4 \geq 8 - x^2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow \begin{cases}x \geq 2\\ \text{یا}\\ x \leq -2\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}\\ x \geq 2 \ \text{یا}\ x \leq -2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2 \leq x \leq 2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} \leq x \leq -2\end{cases}$$
$$\Rightarrow D_f = \left[-2\sqrt{2}, -2\right] \cup \left[2, 2\sqrt{2}\right]$$

۲.

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$
$$\left[\frac{3 - 2x}{1 - x}\right] = \left[\frac{1 + 2 - 2x}{1 - x}\right] = \left[\frac{1 + 2(1 - x)}{1 - x}\right] = \left[\frac{1}{1 - x} + 2\right]$$
$$= \left[\frac{1}{1 - x}\right] + 2$$
$$\Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{1 + x}\right] + \left[\frac{1}{1 - x}\right] + 2$$
$$f(-x) = \left[\frac{1}{1 - x}\right] + \left[\frac{1}{1 + x}\right] + 2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

۳.

$$g(x) = \frac{2 + f(x)}{2 - f(x)}$$
$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x,\ g(x) = \frac{2 + y}{2 - y} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{2 + y}{2 - y}\right) = x$$
$$\Rightarrow g^{-1}\left(\frac{2 + y}{2 - y}\right) = f^{-1}(y)$$
$$\Rightarrow \frac{2 + y}{2 - y} = x \Rightarrow 2 + y = 2x - xy \Rightarrow y(1 + x) = 2x - 2$$
$$\Rightarrow y = \frac{2x - 2}{x + 1} \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{2x - 2}{x + 1}\right)$$

۴. $f(x)$ را بر $x - 2$ تقسیم می‌کنیم. سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x^3 - 2\sqrt{2}x^2 - 2x^2 + 4\sqrt{2}x + x - 2 \;\Big|\; \frac{x - 2}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}$$
$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 1}}{1} = \sqrt{2} \pm 1$$

۵.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad A(0, -2) \quad M(2, -6)$$
$$A(0, -2) \in f \Rightarrow -2 = 0 + 0 + c \Rightarrow \boxed{c = -2}$$

$$x_{Min} = -\frac{b}{۲a} = ۲ \Rightarrow ۴a = -b$$

$$y_{Min} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = -۶ \Rightarrow \frac{-۸a - b^۲}{۴a} = -۶ \Rightarrow ۸a + b^۲ = ۲۴a$$

$$b^۲ = ۱۶a^۲ \Rightarrow ۸a + ۱۶a^۲ = ۲۴a \Rightarrow ۱۶a^۲ - ۱۶a = ۰$$

$$۱۶a(a-۱) = ۰,\ a \neq ۰ \Rightarrow a - ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{a = ۱}$$

$$۴a = -b \Rightarrow ۴ = -b \Rightarrow \boxed{b = -۴}$$

.۶

$$|f(x) - ۳| < \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow |۵x - ۲ - ۳| < \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow |۵(x-۱)| < \frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow ۵|x-۱| < \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow |x-۱| < \frac{۱}{۱۰۰} \quad \begin{cases} x \to ۱^+ \\ |x-۱| = ۰ < x-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۰ < x-۱ < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۱ < x < ۱ + \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۱ < x < \frac{۱۰۱}{۱۰۰}$$

.۷

$$x^۲ - ۵x + m \ ; \ S = ۵ \ ; \ P = m$$

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = ۱۹ \Rightarrow ۲۵ - ۲m = ۱۹$$

$$\Rightarrow ۶ = ۲m \Rightarrow \boxed{m = ۳}$$

$$S = ۵ \ ; \ P = ۳$$

$$\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS = (۵)^۳ - ۳(۳)(۵) = ۱۲۵ - ۴۵$$

$$\Rightarrow \alpha^۳ + \beta^۳ = ۸۰$$

.۸

$$\tan ۱۳۵^\circ - \cos ۳۳۰^\circ = x \sin ۱۲۰^\circ \cot ۲۴۰^\circ$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(\pi - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cos ۳۳۰^\circ = \cos(۲\pi - ۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۱۲۰^\circ = \sin(\pi - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot ۲۴۰^\circ = \cot(\pi + ۶۰^\circ) = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$-۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = x\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) \Rightarrow -\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow x = -(۲ + \sqrt{۳})$$

.۹

$$A = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۳ + x - ۲}{\sqrt{۳x+۱} - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x^۳-۱)+(x-۱)}{\sqrt{۳x+۱}-۲} \times \frac{\sqrt{۳x+۱}+۲}{\sqrt{۳x+۱}+۲}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{\left[(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)\right](\sqrt{۳x+۱}+۲)}{۳x+۱-۴}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x^۲+x+۲)\times(\sqrt{۳x+۱}+۲)}{۳(x-۱)}$$

$$= \frac{(۱+۱+۲)(\sqrt{۴}+۲)}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

۱۰ . یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیش‌تر نباشد. چون $y = \frac{۱}{۲}$ مجانب افقی است پس: $\boxed{a = ۰}$.

$x = ۱$ و $x = \frac{۵}{۲}$ ریشه‌های معادله‌ی (۰= مخرج) هستند. بنابراین:

$$x' + x'' = ۱ + \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱۴}{c} = \frac{۷}{۲} \Rightarrow \boxed{c = ۴}$$

$$x'.x'' = ۱ \times \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{d}{۴} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \boxed{d = ۱۰}$$

$$f(x) = \frac{bx^۲ + ۱}{cx^۲ - ۱۴x + d}$$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y = \frac{b}{c} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{b}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{b = ۲}$$

جبر و احتمال

۱. (الف)

$$n = ۱ : \frac{۱}{۲^۱} = \frac{۲^۲ - ۱ - ۲}{۲^۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

فرض استقرا: $n = k : \frac{۱}{۲^۱} + \frac{۲}{۲^۲} + \cdots + \frac{k}{۲^k} = \frac{۲^{k+۱} - k - ۲}{۲^k}$

حکم استقرا: $n = k+۱ : \frac{۱}{۲^۱} + \frac{۲}{۲^۲} + \cdots + \frac{k}{۲^k} + \frac{k+۱}{۲^{k+۱}} = \frac{۲^{k+۲} - (k+۱) - ۲}{۲^{k+۱}}$

با توجه به فرض استقرا در عبارت سمت چپ حکم، مجموع k جمله‌ی نخست را جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{۲^{k+۱} - k - ۲}{۲^k} + \frac{k+۱}{۲^{k+۱}} = \frac{۲(۲^{k+۱} - k - ۲) + k + ۱}{۲^{k+۱}} =$$

$$\frac{۲^{k+۲} - ۲k - ۴ + k + ۱}{۲^{k+۱}} = \frac{۲^{k+۲} - (k+۱) - ۲}{۲^{k+۱}}$$ (حکم ثابت شد.)

(ب)

$$n = ۲ : \frac{۱}{۲+۱} + \frac{۱}{۲+۲} > \frac{۱۳}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = \frac{۷}{۱۲} = \frac{۱۴}{۲۴} > \frac{۱۳}{۲۴}$$

(فرض استقرا) $n = k : \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{k+۲} + \cdots + \frac{۱}{k+k} > \frac{۱۳}{۲۴}$

(حکم استقرا) $n = k+۱ : \frac{۱}{(k+۱)+۱} + \frac{۱}{(k+۱)+۲} + \cdots + \frac{۱}{k+۱+k-۱} + \frac{۱}{k+۱+k} + \frac{۱}{k+۱+k+۱} > \frac{۱۳}{۲۴}$

به دو طرف فرض استقرا، دو جمله‌ی $\frac{۱}{k+۱+k}$ و $\frac{۱}{k+۱+k+۱}$ را می‌افزاییم:

$$\frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{k+۲} + \cdots + \frac{۱}{k+k} + \frac{۱}{k+۱+k} + \frac{۱}{k+۱+k+۱} > \frac{۱۳}{۲۴} + \frac{۱}{k+۱+k} + \frac{۱}{k+۱+k+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{k+1+k}+\frac{1}{k+1+k+1} > \frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

حال برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$$

و برای اثبات این موضوع از استدلال برگشتی کمک می‌گیریم:

$$\frac{1}{2k+1}>\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\Rightarrow \frac{1}{2k+1}>\frac{2-1}{2(k+1)}$$

$$\frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2k+2}\Rightarrow 2k+1<2k+2$$

و درستی رابطه‌ی اخیر واضح است. اکنون استدلال اصلی را هم ارائه می‌دهیم:

$$2k+1<2k+2\Rightarrow \frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2k+2}\Rightarrow\frac{1}{2k+1}>\frac{2-1}{2k+2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2k+1}>\frac{2}{2k+2}-\frac{1}{2k+2}\Rightarrow\frac{1}{2k+1}>\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2(k+1)}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0\Rightarrow$$

$$\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>\frac{13}{24}$$

$$\overset{\text{با توجه به فرض}}{\Rightarrow}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}>\frac{13}{24}$$ (حکم ثابت شد.)

ج) $n=1\Rightarrow 1^3-1=6r\Rightarrow 0=6r\quad (r=0)$

(فرض استقرا) $n=k\Rightarrow k^3-k=6r'$

(حکم استقرا) $n=k+1\Rightarrow (k+1)^3-(k+1)=6r''$

برای اثبات حکم می‌نویسیم:

$$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1$$
$$=(k^3-k)+3k(k+1)$$

چون یکی از دو عدد متوالی k و $k+1$ زوج هستند، پس $k(k+1)$ نیز زوج است. همچنین طبق فرض: $k^3-k=6r'$، بنابراین:

$$(k+1)^3-(k+1)=6r'+3(2m)=6(r'+m)=6r''$$

۲. اولاً:

$$x=\frac{m}{n}, m,n\in z,\ n\neq 0,\ y=\frac{p}{q}, p,q\in z,\ q\neq 0$$

$$\Rightarrow xy=\frac{m}{n}.\frac{p}{q}=\frac{mp}{np}=\frac{r}{s}, r,s\in z,\ s\neq 0\Rightarrow xy\in Q$$

ثانیاً: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، x گویا، y گنگ و xy گویا باشد. در این صورت داریم:

$$x\in Q, x\neq 0, y\notin Q, xy\in Q\Rightarrow$$

$$x=\frac{m}{n}, m,n\in z, n\neq 0, xy=\frac{p}{q}, p,q\in z, q\neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n}y=\frac{p}{q}\Rightarrow y=\frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}}=\frac{r}{s}, r,s\in z, s\neq 0$$

$$\Rightarrow y\in Q$$

و این با فرض $y\notin Q$ در تناقض است.

ثالثاً: مثال نقض $x=\sqrt{2}\notin Q$ و $y=\sqrt{8}\notin Q$ را می‌آوریم.

$xy=\sqrt{8}\times\sqrt{2}=\sqrt{16}=4\in Q$ (حکم نادرست است.)

۳. استدلال برگشتی:

$$(a^4+b^4)(a^5+b^5)\le 2(a^9+b^9)\Rightarrow$$
$$a^9+a^4b^5+b^4a^5+b^9\le 2a^9+2b^9\Rightarrow$$
$$a^9+b^9-a^4b^5-b^4a^5\ge 0\Rightarrow$$
$$a^4(a^5-b^5)-b^4(a^5-b^5)\ge 0\Rightarrow (a^5-b^5)(a^4-b^4)\ge 0$$
$$\Rightarrow (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\ge 0$$
$$\Rightarrow (a-b)^2(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\ge 0$$

که نابرابری فوق با توجه به این‌که a و b مثبت هستند، درست است. اکنون خودتان استدلال اصلی را با توجه به استدلال برگشتی تنظیم کنید.

۴. باقی مانده‌های تقسیم عددهای طبیعی بر ۲۰، ۰، ۱، ۲، ... و ۱۹ می‌توانند باشند؛ یعنی بیست حالت برای آن‌ها وجود دارد. حال اگر این ۷۰ عدد، در بیست گروه تقسیم شده باشند (بدترین حالت ممکن)، باز هم وقتی شصتمین عدد را در نظر بگیریم، در هر گروه سه عدد قرار می‌گیرند و عدد شصت‌ویکم، در یکی از گروه‌ها واقع می‌شود. این یعنی چهار عدد در یک گروه بوده‌اند و چهار عدد دارای یک نوع باقی مانده خواهند بود. اینک با توجه به برابری ۱+۲۰×۵=۱۰۱ نتیجه می‌گیریم، اگر ۱۰۱ عدد داشته باشیم، لااقل ۶ تای آن‌ها در تقسیم بر ۲۰ یک نوع باقی مانده خواهند داشت.

۵. می‌توان حالت‌های متفاوت زیر را در نظر گرفت:

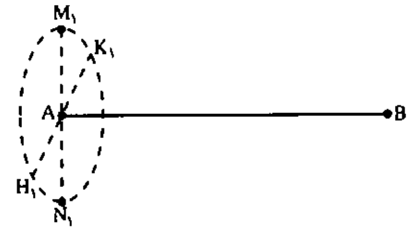
$$\begin{cases}x+y=2\\x-y=3\\z=3\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=3\\x-y=2\\z=3\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=2\\x-y=2\\z=3\end{cases}$$

و از آن‌جا سه دسته جواب زیر را خواهیم داشت:

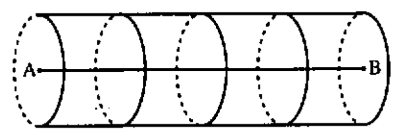
$(x=\frac{5}{2}, y=-\frac{1}{2}, z=3)$ یا $(x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}, z=3)$ یا $(x=2, y=0, z=3)$

هندسه‌ی ۲

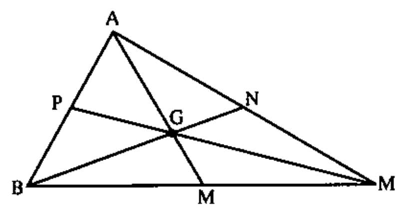
۱. اطراف پاره‌خط AB در فضا، نقاطی به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از آن در نظر می‌گیریم؛ مثل M_1 و N_1 و K_1 و H_1 و... که همگی از پاره‌خط AB به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند و پای عمودهای مرسوم از این نقاط بر AB، نقطه‌ی A باشد.



بدین ترتیب، این نقاط روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر قرار دارند. با در نظر گرفتن چند نقطه‌ی دیگر با شرایط بالا حدس می‌زنیم، مکان فوق، سطح جانبی استوانه‌ی قائمی است که AB محور آن است.



۲.



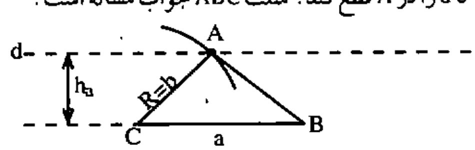
$$\left.\begin{matrix} GA + GB > AB \\ GA + GC > AC \\ GB + GC > BC \end{matrix}\right] \Rightarrow 2(GA + GB + GC) > AB + AC + BC$$

با توجه به این‌که: $GA = \frac{2}{3}AM$ و $GB = \frac{2}{3}BN$ و $GC = \frac{2}{3}CP$ داریم:

$$\frac{4}{3}(AM + BN + CP) > AB + AC + BC \Rightarrow$$

$$(AM + BN + CP) > \frac{3}{4}(AB + AC + BC)$$

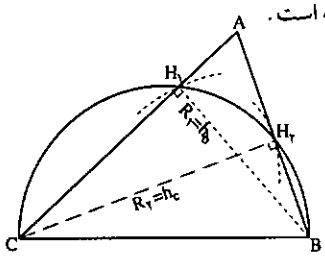
۳. پاره‌خط BC=a را رسم می‌کنیم و خط d را موازی با آن، به فاصله‌ی h_a در نظر می‌گیریم (d، مکان هندسی رأس A است) به مرکز نقطه‌ی C دایره‌ای به شعاع AC=b رسم می‌کنیم تا d را در A قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



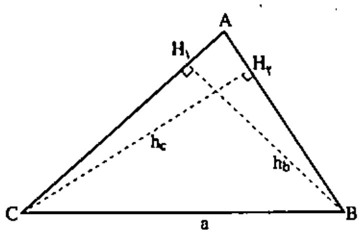
۴.

روش اول: فرض کنیم ضلع‌های BC=a و $BH_1 = h_b$ و $CH_2 = h_c$ را داشته باشیم.

ابتدا پاره‌خط BC=a را رسم می‌کنیم و سپس دایره‌ای به قطر BC می‌کشیم. سپس به مرکز B و به شعاع h_b کمانی رسم می‌کنیم تا دایره‌ی قبلی را در H_1 قطع کند و به مرکز C و به شعاع h_c کمان دیگری رسم تا دایره‌ی اولیه را در H_2 قطع کند. نقطه تلاقی امتداد BH_2 و CH_1 را A می‌نامیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



روش دوم: مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCH_1 را با در دست داشتن BC=a و $BH_1 = h_a$ رسم می‌کنیم و به همین ترتیب مثلث BCH_2 را می‌کشیم و نقطه‌ی A را محل تلاقی امتداد CH_1 و BH_2 در نظر می‌گیریم. مثلث ABC جواب مسأله است.



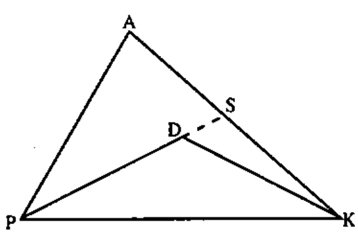
۵.

$$\begin{cases} PA + AS > PS = PD + DS \\ DS + SK > DK \end{cases}$$

$$\Rightarrow PA + AS + DS + SK > PD + DS + DK$$

$$\Rightarrow PA + AK > PD + DK \Rightarrow$$

$$PA + AK + PK > PD + DK + PK$$



۶.

$$S_{ADO} = \frac{1}{2}OD \times AH = \frac{1}{2}OD \times OA \times \sin\alpha$$

با توجه به این‌که $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ و مانند بالا داریم:

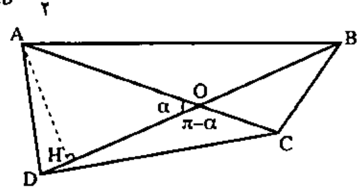
$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OA.OB.\sin\alpha$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2}OC.OD.\sin\alpha \text{ ، } S_{OBC} = \frac{1}{2}OC.OB.\sin\alpha$$

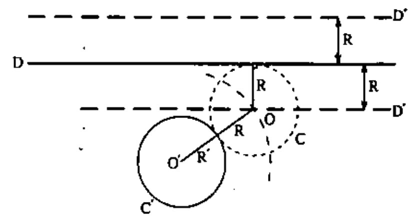
$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{oAD} + S_{OAB} + S_{OCD} + S_{OBC} =$$

$$\frac{1}{2}\sin\alpha(OD.OA + OA.OB + OC.OD + OB.OC)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sin\alpha.AC.BD$$



۷. خط ′D را به موازات D و به فاصله‌ی R از آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به مرکز ′O و به شعاع ′R + R رسم می‌کنیم تا ′D را در O قطع کند. دایره‌ی به مرکز O و به شعاع R جواب مسأله است.



بحث: اگر دایره به شعاع ′R + R باشد و ′D و ″D را قطع کند، مسأله ۴ جواب دارد.

اگر دایره به شعاع ′R + R باشد و ′D را قطع و مماس بر ″D باشد، مسأله ۳ جواب دارد.

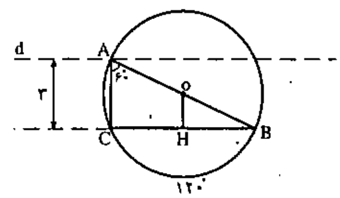
اگر دایره به شعاع ′R + R باشد و فقط ′D را قطع کند، مسأله ۲ جواب دارد.

اگر دایره به شعاع ′R + R باشد و مماس بر ′D باشد و نقطه‌ی مشترکی با ″D نداشته باشد، مسأله ۱ جواب دارد.

اگر دایره به شعاع ′R + R باشد و نه با ′D و نه با ″D نقطه‌ی مشترکی نداشته باشد، مسأله فاقد جواب است.

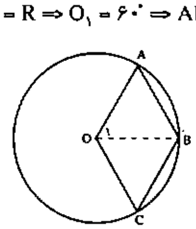
۸. ابتدا ضلع BC=۸ و کمان در خور زاویه‌ی °۶۰ را رسم می‌کنیم. سپس خط d را به فاصله‌ی ۳ و به موازات BC رسم می‌کنیم. محل تلاقی d با کمان در خور، همان رأس A است.

$$OH = \frac{BC}{۲\tan \hat{A}} = \frac{۸}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$



۹. $OA = OC = R \Leftarrow$ چهار ضلعی لوزی است.

$$OA = AB = OB = R \Rightarrow O_1 = ۶۰^\circ \Rightarrow AB = ۶۰^\circ$$



۱۰.

$$AB = HH' = ۲$$

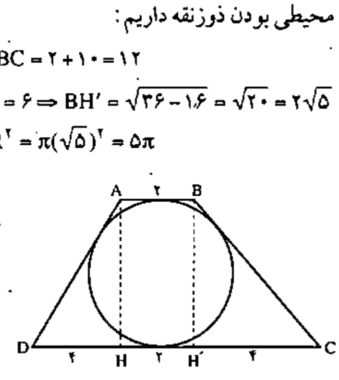
$$\Rightarrow DH = CH' = ۴$$

به دلیل محیطی بودن ذوزنقه داریم:

$$AD + BC = ۲ + ۱۰ = ۱۲$$

$$\Rightarrow BC = ۶ \Rightarrow BH' = \sqrt{۳۶ - ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$S = \pi R^۲ = \pi(\sqrt{۵})^۲ = ۵\pi$$



• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

Mathematics.com

آدرس اینترنتی: http://www.mathematics.com

فهرست اصلی:

۱. ریاضیات Math
۲. روی خط یادگیری Online Learning
۳. مدرسه‌ی خانگی Home School
۴. جبر Algebra
۵. آموزش Education
۶. فعالیت‌های ریاضیاتی Math Activities
۷. آموزش مقدماتی Elementary Education
۸. یادگیری زبان‌ها Learn Languages
۹. آموزش خصوصی ریاضی Math Tutoring
۱۰. کمک در زمینه‌ی ریاضیات Math Help
۱۱. نویسندگی Writing
۱۲. آموزش ریاضی Math Education
۱۳. کمک‌های آموزشی Education Helps

توضیح: هریک از فهرست‌های موضوعی بالا نیز شامل عنوان‌هایی است که در سایت به تفصیل شرح داده شده‌اند.

GraphTheory.com

آدرس اینترنتی: http://www.graphtheory.com

موضوع سایت: شاخه‌ای بسیار زیبا و جالب توجه از ریاضیات گسسته به نام «نظریه گراف».

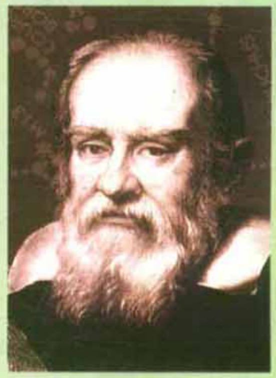
فهرست اصلی:

۱. نظریه گراف و کاربردهای آن
(Graph Theory and It's Applications)
۲. هندبوک نظریه‌ی گراف
(Hand Book of Graph Theory)
۳. نظریه‌ی گراف مکان‌نگر
(Topological Graph Theory)

فهرست منابع نظریه‌ی گراف:

۱. تحقیق (Research)
۲. همایش‌ها (Conferences)
۳. ژورنال‌ها (Journals)
۴. قضیه‌ی چهار رنگ (The Four-Color Theorem)

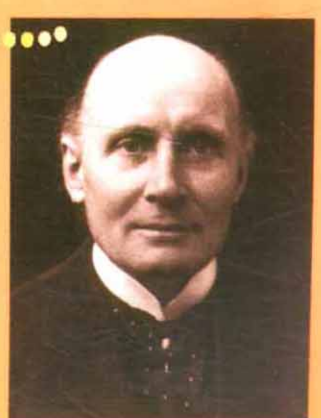
زبان حال ریاضی دانان



جهان را نمی توان فهمید،
مگر آن که زبانش را بیاموزیم و
با حروفی که نگاشته شده
است، آشنا شویم و این همان
زبان ریاضیات است.
گالیلئو گالیله



تناقض نیست اگر بگوییم، در نظری ترین
حالات ریاضی ممکن است به عملی ترین کاربردها
بیش از پیش نزدیک باشیم.
آلفرد نورت وایتهد



برهان خلف حرکتی است ظریف تر از هر
حرکت شطرنج؛ شطرنج باز ممکن است یک
پیاده یا حتی یک سوار را فدای بازی کند، ولی
ریاضی دان تمام بازی را فدا می کند.
ج. اچ. هاردی

بر گرفته از کتاب زبان حال ریاضی دان
به روایت دکتر علی اکبر عالم زاده